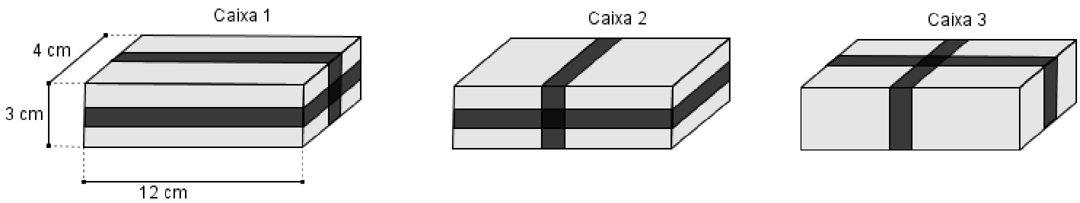
Prova de Matemática

Vestibular 1ª Fase
Resolução das Questões Objetivas

São apresentadas abaixo possíveis soluções para as questões propostas. Nessas resoluções buscou-se justificar as passagens visando uma melhor compreensão do leitor.

1ª Questão

Cada uma das caixas retangulares representadas nas figuras abaixo tem 12 cm de comprimento, 4 cm de largura e 3 cm de altura e foram lacradas com uma fita adesiva preta.



Ordenando crescentemente as caixas pela quantidade de fita gasta em cada uma delas, obtém-se:

a) caixa 1, caixa 2, caixa 3.

b) caixa 1, caixa 3, caixa 2.

c) caixa 3, caixa 1, caixa 2.

d) caixa 2, caixa 3, caixa 1.

e) caixa 3, caixa 2, caixa 1.

Solução:

Calculando o comprimento de fita adesiva gasta em cada uma das caixas obtém-se:
Caixa 1: $4\times12+2\times4+2\times3=48+8+6=62$ cm.
Caixa 2: $2\times12+4\times4+2\times3=24+16+6=46$ cm.
Caixa 3: $2\times12+2\times4+4\times3=24+8+12=44$ cm.
Ordenando crescentemente as caixas pela quantidade de fita gasta em cada uma delas obtém-se: caixa 3, caixa 2, caixa 1.
Gabarito: e

2ª Questão

Um nutricionista está preparando uma refeição com 2 alimentos A e B. Cada grama do alimento A contém 2 unidades de proteína, 3 unidades de carboidrato e 2 unidades de gordura. Cada grama do alimento B contém 4 unidades de proteína, 4 unidades de carboidrato e 3 unidades de gordura. Essa refeição deverá fornecer exatamente 400 unidades de proteína e 500 unidades de carboidrato. A quantidade de gordura que essa refeição irá fornecer é:

a) 300 unidades.

b) 350 unidades.

c) 400 unidades.

d) 450 unidades.

e) 500 unidades.

Solução:

Sejam x e y as quantidades de gramas dos alimentos A e B a serem empregados nessa refeição, respectivamente. Pelas informações do enunciado tem-se:

$$\begin{cases} 2x + 4y = 400 & (1) \\ 3x + 4y = 500 & (2) \end{cases}$$

De (1) segue que: $x = 200 - 2y$. $\quad (3)$.

Substituindo (3) em (2) obtém-se:

$$\begin{aligned} &3(200 - 2y) + 4y = 500 \\ &600 - 6y + 4y = 500 \\ &-2y = -100 \\ &y = 50 \quad (4) \end{aligned}$$

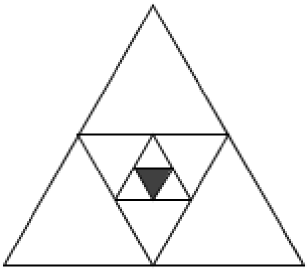
Substituindo (4) em (3) obtém-se: $x = 200 - 2(50)$, ou seja, $x = 100$.

Logo, nessa refeição serão empregados 100 g do alimento A e 50 g do alimento B.
Como cada grama dos alimentos A e B contém, respectivamente, 2 e 3 unidades de gordura, conclui-se então que essa refeição fornecerá $100 \times 2 + 50 \times 3 = 350$ unidades de gordura.

Gabarito: b

3ª Questão

Na figura abaixo, todos os triângulos são equiláteros e os vértices de cada triângulo inscrito coincidem com os pontos médios dos lados do triângulo que o circunscreve. O perímetro do triângulo sombreado é 5 cm.



O perímetro do maior triângulo é:

a) 20 cm.

b) 40 cm.

c) 80 cm.

d) 120 cm.

e) 240 cm.

Solução:

Inicialmente vamos nomear os vértices desses triângulos conforme ilustrado na figura abaixo. Como todos os triângulos são equiláteros tem-se:

$$Perímetro_{ABC} = 3 \times AB$$
$$Perímetro_{DEF} = 3 \times DF$$
$$Perímetro_{GHI} = 3 \times HI$$
$$Perímetro_{JKL} = 3 \times KJ$$

Como D e F são pontos médios de dois lados do triângulo ABC, segue que $DF = \frac{1}{2}AB$, ou seja,

$$AB = 2 \times DF \quad (1)$$

Como H e I são pontos médios de dois lados do triângulo DEF, segue que $HI = \frac{1}{2}DF$, ou seja,

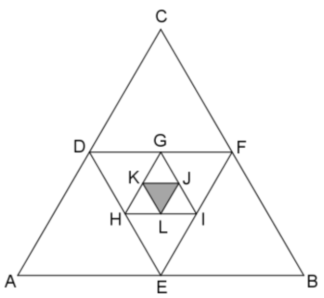
$$DF = 2 \times HI \quad (2)$$

Como K e J são pontos médios de dois lados do triângulo GHI, segue que $KJ = \frac{1}{2}HI$, ou seja,

$$HI = 2 \times KJ \quad (3)$$

Substituindo (3) em (2) obtém-se: $DF = 2 \times (2 \times KJ) = 4 \times KJ \quad (4)$

Substituindo (4) em (1) obtém-se: $AB = 2 \times (4 \times KJ) = 8 \times KJ \quad (5)$



Multiplicando ambos os membros de (5) por 3 obtém-se: $3 \times AB = 3 \times (8 \times KJ)$, ou seja,

$$3 \times AB = 8 \times (3 \times KJ)$$

Mas essa última relação fornece:

$$Perímetro_{ABC} = 8 \times Perímetro_{JKL} = 8 \times 5 = 40 \text{ cm}.$$

Gabarito: b

4ª Questão

Uma lanchonete vende cada copo de suco de laranja por R$ 1,50, obtendo um lucro de 50% sobre o custo do suco. Devido a uma queda na safra, o preço da laranja subiu, o que acarretou um aumento de 20% no custo do suco. O dono da lanchonete, para não diminuir as vendas de suco de laranja, decidiu manter o preço de cada copo de suco em R$ 1,50 e reduzir o tamanho do copo de modo a conservar a margem de lucro de 50% sobre o custo do suco. Originalmente, a capacidade do copo era 300 ml. O novo copo deve ter capacidade de:

a) 150 ml.

b) 200 ml.

c) 250 ml.

d) 275 ml.

e) 280 ml.

Solução:

Como o lucro com a venda do copo de 300 ml de suco de laranja por R$ 1,50 era de 50% sobre o custo, tem-se que "custo + 50% do custo = R$ 1,50", ou seja, $1{,}5 \times \text{custo} = \text{R\$ } 1{,}50$, donde o custo era de R$ 1,00.
Com o aumento de 20%, o custo de um copo com 300 ml de suco de laranja aumentou em R$ 0,20 (que corresponde a 20% de R$ 1,00), passando a ser R$ 1,00 + R$ 0,20 = R$ 1,20. Ao decidir manter o preço em R$ 1,50 pelo copo de suco de laranja e manter a margem de lucro de 50% sobre o preço de custo do suco, foi necessário diminuir a capacidade do copo de maneira a que o custo permanecesse igual a R$ 1,00. Representando por x a capacidade do novo copo, temos:

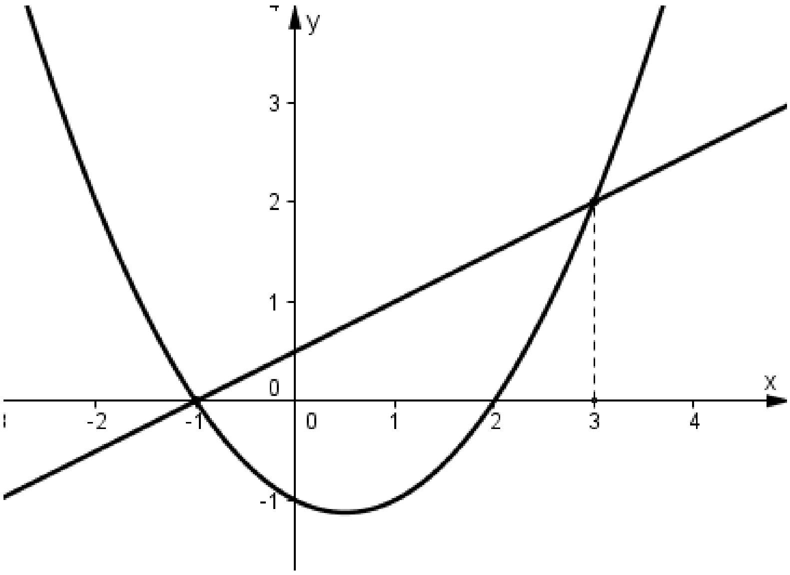
R$ 1,20	---	300 ml
R$ 1,00	---	x ml

$$x = \frac{1 \times 300}{1{,}20} = \frac{300}{1{,}20} = 250 \text{ ml}$$

Gabarito: c

5ª Questão

No plano cartesiano abaixo, estão representados os gráficos de uma função *f*, do 1º grau, e de uma função *g*, do 2º grau.



Considerando o conjunto $S=\{x\in\mathbb{R} \mid f(x)-g(x)>0\}$, é **CORRETO** afirmar que:

a) $S=]-1,3[$.

b) $S=]-1,2[$.

c) $S=]-\infty,-1[\cup]3,+\infty[$.

d) $S=]3,+\infty[$.

e) $S=\varnothing$.

Solução:

Por definição, os gráficos das funções *f* e *g* são, respectivamente, os conjuntos:

$$G(f)=\{(x,f(x)) \mid x\in\mathbb{R}\} \text{ e } G(g)=\{(x,g(x)) \mid x\in\mathbb{R}\}.$$

Como $S=\{x\in\mathbb{R} \mid f(x)-g(x)>0\}=\{x\in\mathbb{R} \mid f(x)>g(x)\}$, segue que o conjunto *S* é a coleção das abscissas dos pontos pertencentes ao gráfico da função *f* que se situam acima dos respectivos pontos do gráfico da função *g*.

Como f é uma função do 1º grau, seu gráfico está representado pela reta e, sendo g uma função do 2º grau, seu gráfico está representado pela parábola. Pelos gráficos ilustrados conclui-se que $S=\{x\in\mathbb{R} \mid -1<x<3\}$, ou seja, $S=]-1,3[$.

Gabarito: a

6ª Questão

Seja $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ uma função. Considere o conjunto *M,* cujos elementos são os pontos de interseção da reta $x = c$ com o gráfico de *f*. Pode-se afirmar que:

a) $M = \varnothing$ para $c < a$ ou $c > b$.

b) $M = [a,b]$.

c) *M* é um conjunto unitário.

d) *M* possui exatamente dois elementos.

e) $M = \mathbb{R}$.

Solução:

Como $f:[a,b] \to \mathbb{R}$, o gráfico da função *f* é definido por $G(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in [a,b]\}$.

O conjunto *M,* cujos elementos são os pontos de interseção da reta $x = c$ com o gráfico de *f*, é definido por $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = c\} \cap G(f)$. Logo, sendo f uma função, só existem dois casos possíveis para o conjunto M:

1º. $M = \varnothing$, se $c \notin [a,b]$;

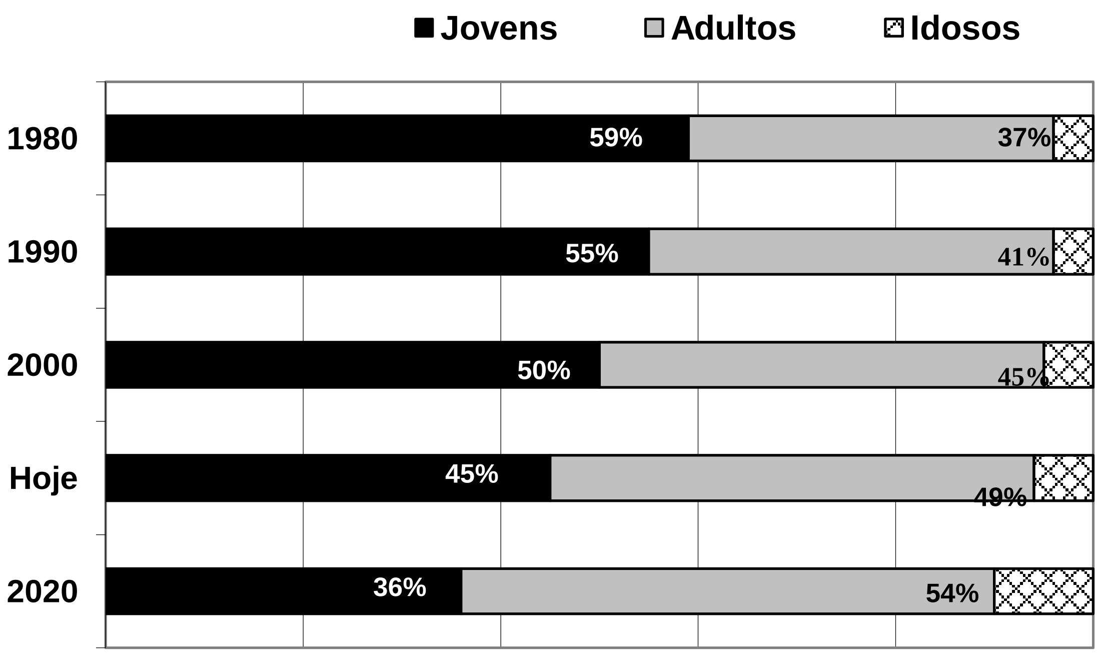
2º. *M* é um conjunto unitário se $c \in [a,b]$.

Portanto, dentre as opções apresentadas, a única que pode ser afirmada é $M = \varnothing$ para $c < a$ ou $c > b$.

Gabarito: a

7ª Questão

O gráfico abaixo divide a população brasileira em três faixas etárias e registra a sua evolução de 1980 até hoje, fazendo, ainda, uma projeção para o ano de 2020.



De acordo com o gráfico, é **CORRETO** afirmar que:

a) em 1980, o número de jovens era menor que a soma de adultos e idosos.

b) em 1990, a diferença entre o número de jovens e adultos era menor que o número de idosos.

c) em 2000, existiam mais jovens do que a soma de adultos e idosos.

d) hoje, a diferença entre jovens e adultos é menor que o número de idosos.

e) em 2020, o número de adultos será menor que a soma de jovens e idosos.

Solução:
Nesse tipo de questão há que se analisar cada uma das alternativas apresentadas a partir das informações contidas no gráfico.
a) “em 1980, o número de jovens era menor que a soma de adultos e idosos.” é **falsa**, pois, em 1980, o percentual de jovens era igual a 59%, restando então 41% para a soma da população de adultos e idosos.
b) “em 1990, a diferença entre o número de jovens e adultos era menor que o número de idosos.” é **falsa**, pois, em 1990, a população de idosos correspondia a 100% - (55% + 41%) = 4% da população do país. Entretanto, a diferença entre o número de jovens e adultos era igual a 55% - 41% = 14% da população brasileira.
c) “em 2000, existiam mais jovens do que a soma de adultos e idosos.” é **falsa**, pois, em 2000, o percentual de jovens era igual a 50% da população. Com isso, a soma dos percentuais de adultos e idosos tem que ser igual a 100% - 50% = 50%, que é o mesmo percentual da população de jovens.
d) “hoje, a diferença entre jovens e adultos é menor que o número de idosos.” é **verdadeira**, pois hoje a população de idosos é igual a 100% - (45% + 49%) = 6% da população brasileira, enquanto que a diferença entre jovens e adultos é igual a 49% - 45% = 4% da população brasileira.
e) “em 2020, o número de adultos será menor que a soma de jovens e idosos.” é **falsa**, pois, em 2020, como o número de adultos será igual a 54% da população brasileira, restará então 46% da população para a soma de jovens e idosos.
Gabarito: d

8ª Questão

Para promover um baile, um clube fez o seguinte levantamento de gastos:

Banda	R$ 3 000,00
Decoração	R$ 2 400,00
Iluminação	R$ 400,00

Além dos gastos acima, o *buffet* cobrará R$ 35,00 por pessoa. O preço do convite individual é R$ 70,00. O número mínimo de convites que o clube deve vender para que o baile não dê prejuízo é:

a) 165.

b) 166.

c) 168.

d) 170.

e) 175.

Solução:

Os custos do baile para x convidados são: $\text{Custo} = \underbrace{3000}_{\text{banda}} + \underbrace{2400}_{\text{decoração}} + \underbrace{400}_{\text{iluminação}} + \underbrace{35x}_{\text{buffet}}$.

Arrecadação com a venda de x convites: $\text{Arrecadação} = 70x$.

Para não haver prejuízo:

$$\text{Arrecadação} \geq \text{Custo}$$
$$70x \geq 3000 + 2400 + 400 + 35x$$
$$35x \geq 5800$$
$$x \geq \frac{5800}{35} \cong 165,71$$

Logo, para não haver prejuízo, o número mínimo de convites a ser vendido é 166.

Gabarito: b

9ª Questão

Sejam x e y tais que $\operatorname{sen}x \cdot \cos x = \frac{1}{8}$ e $y = \operatorname{sen}x + \cos x$. Pode-se afirmar que:

a) $y = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

b) $y = -\frac{\sqrt{5}}{2}$ ou $y = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

c) $y = \frac{5}{2}$.

d) $y = -\frac{5}{2}$ ou $y = \frac{5}{2}$.

e) $y = \frac{5}{2}$ ou $y = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Solução:

Como $y = \operatorname{sen}x + \cos x$, tem-se que:

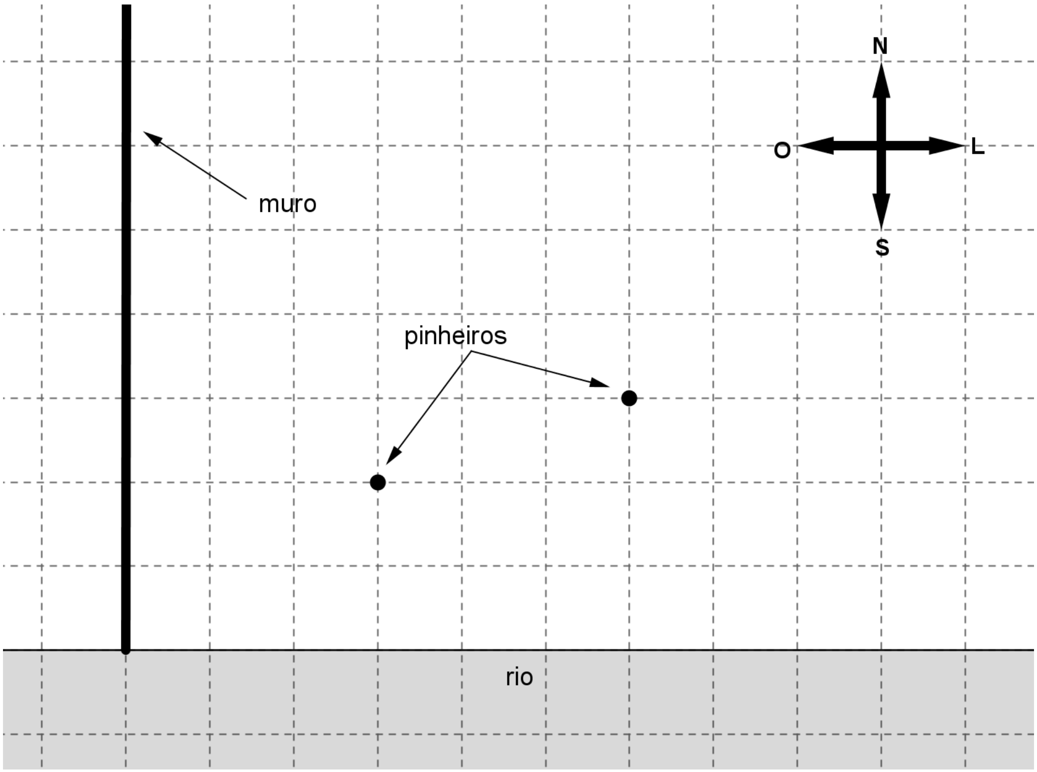
$$y^2 = (\operatorname{sen}x + \cos x)^2$$
$$y^2 = \operatorname{sen}^2 x + 2\operatorname{sen}x\cos x + \cos^2 x$$
$$y^2 = \underbrace{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}_{=1} + 2\underbrace{\operatorname{sen}x\cos x}_{=\frac{1}{8}}$$
$$y^2 = 1 + 2 \times \frac{1}{8} = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$$
$$y = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}$$

Pode-se então afirmar que $y = -\frac{\sqrt{5}}{2}$ ou $y = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Gabarito: b

10ª Questão

Na malha quadriculada abaixo, cujos quadrados têm lados medindo 10 metros, encontra-se o mapa de um tesouro.



Sobre o tesouro, sabe-se que:

- encontra-se na direção determinada pelos dois pinheiros;
- está a 110 metros a leste do muro.

O valor que melhor aproxima a distância do tesouro à margem do rio, em metros, é:

a) 44,3.

b) 45,3.

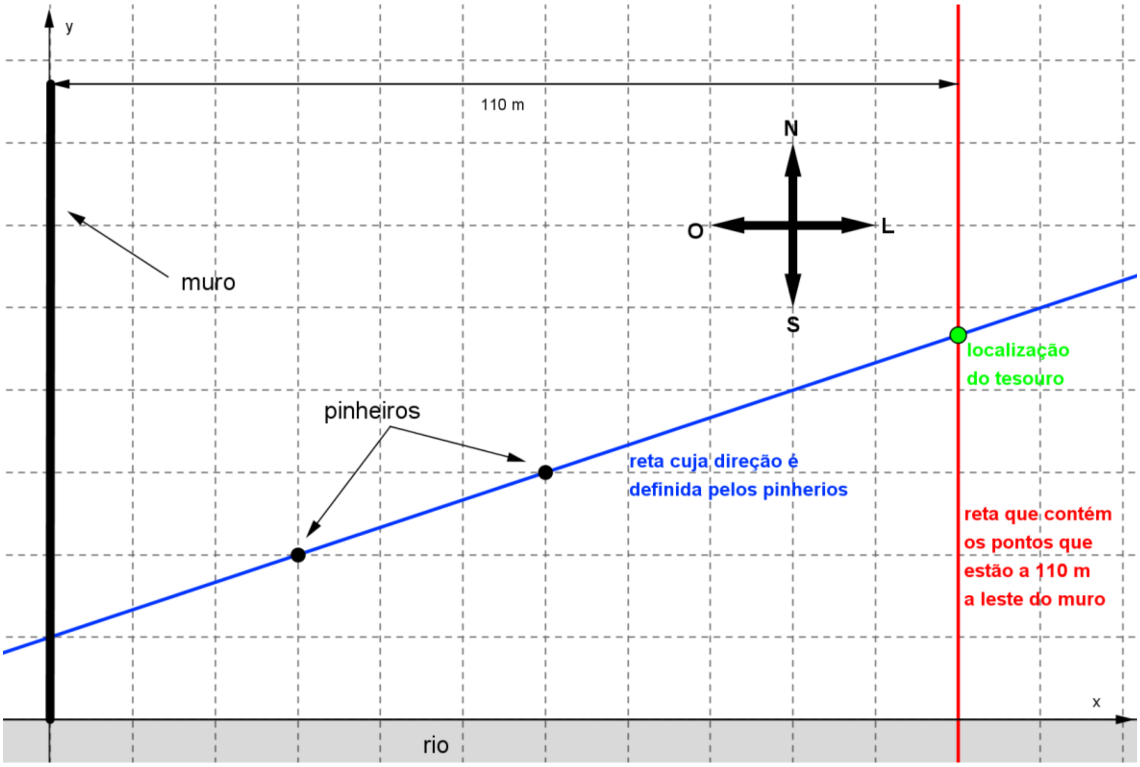
c) 45,7.

d) 46,7.

e) 47,3.

Solução:

Considere a interseção do muro com a margem do rio como a origem de um sistema de coordenadas cujos eixos são dados pela margem do rio e pelo muro, conforme ilustrado abaixo.



O que se pede é a ordenada do ponto de interseção entre a reta cuja direção é definida pelos pinheiros e a reta que contém os pontos que estão a 110m a leste do muro.

As posições desses pinheiros, nesse sistema de coordenadas, são dadas por $A(30,20)$ e $B(60,30)$, já que cada quadrado da malha tem lado medindo 10 m.

Equação da reta cuja direção é definida pelos pinheiros:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y - 20 = \frac{30-20}{60-30}(x-30)$$

$$y = \frac{1}{3}(x-30) + 20$$

$$y = \frac{1}{3}x + 10$$

Equação da reta que contém os pontos que estão a 110 m a leste do muro:

$x = 110$

O ponto de localização do tesouro será a solução do sistema:

$$\begin{cases} y = \dfrac{1}{3}x + 10 \\ x = 110 \end{cases}$$

Substituindo a segunda equação na primeira obtém-se:

$$y = \frac{1}{3}(110) + 10 \cong 36{,}66 + 10 = 46{,}66\,.$$

Logo, o ponto de localização do tesouro está a, aproximadamente, 46,66 m da margem do rio.

Gabarito: d