No dia 3 de julho de 2017 foi inaugurado o novo prédio do Centro de Ciências da UFJF, localizado no Campus sede da Universidade. Em apenas 28 dias, recebemos 8.350 visitantes espontâneos, demonstrando assim o interesse da população pela Ciência e a importância de espaços de popularização científica. Após nossas quatro primeiras Jornadas de divulgação terem ocorrido em nosso antigo prédio e a quinta ser realizada na Praça Antônio Carlos, no centro de Juiz de Fora, tivemos a oportunidade de realizar, durante a SNCT 2017, a 6ª Jornada no novo Centro de Ciências. Realizada com o apoio do Edital MCTIC/CNPQ nº 02/2017, com o tema "A Matemática está em tudo", entre os dias 24 e 29 de outubro de 2017, além da ampliação do espaço físico, tivemos ampliadas também as atividades apresentadas: 1ª Feira de Matemática das Escolas Públicas, oficinas para licenciandos e professores da Educação Básica, Exposição "História da Educação Matemática", Sessões do observatório astronômico, Festival de Curtas de Matemática, Jogos Matemáticos, Contação de Histórias, além do tradicional Ciclo de palestras. Todas as atividades seguiram a temática da SNCT 2017, e contaram com ampla participação dos públicos escolar e geral, destacando-se a visita dos alunos da Escola Estadual de Bicas/MG, propiciada pelos recursos obtidos no projeto. Como um dos resultados da proposta, apresentamos aqui o quarto volume de nossa série "Ciência em Dia – Jornadas de Divulgação Científica", com os textos relativos às palestras ocorridas. Com esta publicação, demonstramos mais uma vez nossa preocupação e nosso compromisso com a Divulgação da Ciência, permitindo que um número ainda maior de pessoas possa compartilhar o conhecimento aqui apresentado, contribuindo na Educação Científica dos Estudantes e do povo brasileiro.

Eloi Teixeira César
Diretor Geral do Centro de Ciências

Semana Nacional de Ciência e Tecnologia 2017

ISBN 978-85-7861-532-1

LF Editorial

PPGEM Educação Matemática

CNPq

Ciência em dia: Jornadas de divulgação científica – A Matemática está em tudo

LF Editorial

Eloi Teixeira César
Thales Costa Soares
Reginaldo Fernando Carneiro
Marco Antonio Escher
Bárbara Bastos de Lima Duque
(Organização)

Ciência em dia:

Jornadas de divulgação científica

A Matemática está em tudo

Semana Nacional de Ciência e Tecnologia 2017

LF Editorial

Ciência em dia:

Jornadas de divulgação científica

A Matemática está em tudo

Semana Nacional de Ciência e Tecnologia 2017

A Matemática está em tudo!

LF Editorial

Eloi Teixeira César
Thales Costa Soares
Reginaldo Fernando Carneiro
Marco Antonio Escher
Bárbara Bastos de Lima Duque
(Organizadores)

Ciência em dia:

Jornadas de divulgação científica

A Matemática está em tudo

2018

1ª Edição

Direção editorial: José Roberto Marinho

Revisão:
Capa: Fabrício Ribeiro
Projeto gráfico e diagramação: Fabrício Ribeiro

Edição revisada segundo o Novo Acordo Ortográfico da Língua Portuguesa

Dados Internacionais de Catalogação na publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Ciência em dia: jornadas de divulgação científica: a matemática está em tudo / Eloi Teixeira César (Organizador). – São Paulo: Editora Livraria da Física, 2018.

Vários autores.
ISBN 978-85-7861-532-1

1. Ciências - Divulgação 2. Matemática 3. Matemática - Estudo e ensino 4. Professores - Formação I. César, Eloi Teixeira.

18-13503 CDD-500.7

Índices para catálogo sistemático:
1. Educação matemática 510.7

Editora Livraria da Física
www.livrariadafisica.com.br

SUMÁRIO

PREFÁCIO

Senti-me honrado em receber o convite para prefaciar este livro. Trata-se de uma importante publicação, claro, dentre muitas das outras publicações das Jornadas realizadas nos outros anos no Centro de Ciências – UFJF, mas, que desta vez, objetiva trazer à tona assuntos caros para a academia e que sugere uma indagação: Por onde anda a matemática?

Como já é tradição no Centro de Ciências, todo ano, durante a Semana Nacional de Ciência e Tecnologia (SNCT), é promovida a Jornada de Divulgação Científica, nome dado aos eventos de popularização voltados para os estudantes do ensino básico e população em geral. Sua primeira versão ocorreu em 2009, a segunda em 2011 (ambas com apoio da FAPEMIG) e a terceira em 2014 (com apoio da Capes e CNPQ), e foi nesse momento que surgiu a ideia despretensiosa de reunir os textos das três jornadas num livro, com o intuito de socializar o conhecimento. Como a ideia deu certo, nas jornadas seguintes foi feito um livro específico para cada uma, com a temática da SNTC do ano. Assim, em 2015 foi publicado "Ciência em dia – Jornadas de divulgação científica – Ano internacional da luz" (patrocinado pelo CNPQ) e em 2016 publicou-se "Ciência em dia – Jornadas de divulgação científica – Ciência alimentando o Brasil" (patrocinado pelo MCTIC).

A 6ª Jornada de Divulgação Científica ocorreu entre os dias 24 e 29 de outubro de 2017, e durante essa semana o Centro de Ciências recebeu visitações agendadas de alunos e professores em suas treze palestras e cinco oficinas, além de uma mesa redonda e sessões do Observatório Astronômico, e também diversas atividades para o público espontâneo, como exposições, Feira de Matemática, contação de histórias, jogos com atividades interativas e a exibição de um festival de curtas. Um evento digno de ser realizado nas recém-inauguradas e belas dependências do Centro de Ciências da UFJF.

E o evento gerou o que agora podemos folhear, "Ciência em dia – Jornadas de divulgação científica – A Matemática está em tudo", com patrocínio do CNPQ, tornando a possibilidade do livro virar uma série, tendo o prenome "Ciência em dia" em cada volume com a ideia de manter a sociedade informada com temas atuais da Ciência.

E para abrilhantar o tema, os participantes puderam compartilhar ideias e ouvir o que 18 pesquisadores provindos de quatro universidades mineiras (UFJF, UFMG, UFU e UFMT), uma universidade paranaense (UEM), uma paulista (UNICAMP), um centro de pesquisa (CBPF) e da Secretaria de Educação de MG tinham a contribuir sobre o tema dado.

Mas então, a Matemática está em tudo? Antes de apresentar um pouco de cada capítulo deste livro, gostaria de deixar alguns questionamentos para o leitor.

Sem dúvida, em cada pote industrializado, em cada sistema de semáforo ou mesmo no contorno das ruas que passamos, há a presença de algum cálculo matemático que auxiliou na sua construção. Mesmo que esses cálculos tenham sido "rudimentares", e que são observados quando encontramos um objeto em ruínas arqueológicas, ou que tenham passado pela experiência humana sem sua formalização, podemos identificar as tentativas e êxitos na construção desses artefatos, ou mesmo quando alguns animais, ao construir suas casas ou depósitos, o fazem otimizando energia e materiais. E eles foram à escola?

Mas gostaríamos de colocar aqui duas questões importantes a serem levadas em conta nessa discussão e que perpassam nossas ações, principalmente no contexto da sala de aula. A primeira refere-se à tentativa de aproximação de conteúdos matemáticos estudados em sala de aula da educação básica ao dia a dia de cada aluno. Encontramos na literatura e compartilhamos a ideia de que esses mundos podem não ser os mesmos em algumas situações. Nas práticas diárias que vivenciamos, fazemos cálculos mentais utilizando as operações básicas (adição, subtração, multiplicação e divisão), porcentagens, cálculo de juros, e para alguns cálculos mais elaborados utilizamos da calculadora para nos auxiliar, instrumento que resiste em ser bem recebido dentro das quatro paredes da escola.

Ou seja, o formalismo dos algoritmos na resolução de equações ou mesmo das operações mais simples passam longe de nossas importantes estimativas para calcular para onde o salário mensal vai. Considero isso uma importante discussão. Não se trata de afastar esses dois mundos, mas saber que suas aproximações não são gravitacionais. Nesse sentido, a matemática pode estar em tudo e, ao mesmo tempo, não estar em lugar nenhum.

Outro aspecto que gostaria de levantar é uma ponderação sobre a própria frase escolhida para o evento nacional: A Matemática está em tudo. Faço isso parafraseando a amiga Viviane Almada, professora e pesquisadora da vizinha universidade federal de São João del-Rei, Minas Gerais, que em nossas conversas me questionou: E se eu não conseguir ver a matemática em tudo?

Ou seja, que matemática eu tenho de enxergar quando olho para determinado objeto? Sua forma geométrica? Sua área? Suas medidas? Quantidade de material utilizado para concebê-lo? Seus movimentos?

E como a frase é imperativa, se eu não consigo "sentir" a matemática ali presente, como me comporto na afirmação? Estou excluído nesse processo educativo? Enquanto profissional que se preocupa com a área de ensino e aprendizagem, não posso deixar tais afirmações sem as devidas ponderações. Como disse, não se trata de advogar em favor de uma delas, mas sim, contextualizá-las. E os artigos aqui apresentados fazem justamente isso. Mostrar que matemática e identificar onde ela está inserida, seu lugar no fenômeno e na prática, baseada na interpretação humana. Afinal, a abelha não se sentou na carteira da escola para construir os alvéolos hexagonais, que armazenam mais mel com um mínimo de cera. Mas estamos ali, observando e explicando. Eu não sei qual matemática está na toalha, mas a uso frequentemente após o banho, e assim continuarei.

E por onde anda a matemática? Vejamos alguns exemplos.

O primeiro capítulo do livro intitula-se "A formação matemática de professores dos anos iniciais: contribuições de uma oficina sobre histórias infantis e matemática", dos autores Reginaldo Fernando Carneiro e Maria Flávia Machado Dias. Neste capítulo, os autores tratam do objetivo em refletir sobre as histórias infantis e a matemática na formação continuada de professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental. Os resultados evidenciaram que a oficina permitiu aos participantes ter contato com o ensino e a aprendizagem da matemática a partir das histórias infantis e vivenciar essa experiência, possibilidade que não conheciam e nunca tinham imaginado. Segundo os autores, ao utilizar histórias infantis, o professor passa a atentar para as situações que são apresentadas pelos livros, de forma a imaginar ou verificar como a matemática pode ser abordada, mas com a preocupação em evitar que as crianças percam o gosto pela leitura, evitando textos que focam somente a matemática.

Os autores Andre Koch Torres de Assis e Marcos Cesar Danhoni Neves nos trazem uma tradução de uma publicação de 1995, agora sob o título "A história da temperatura de 2,7 Kelvin antes de Penzias e Wilson", apresentando a história das estimativas da temperatura do espaço intergaláctico, mostram que modelos baseados em um universo em equilíbrio dinâmico sem expansão previram a radiação 2,7 K antes e melhor do que os modelos baseados no Big Bang, utilizando de cálculos envolvendo a matemática, a física e a química.

Com o tema "A Matemática e o seu ensino: uma perspectiva histórica", a autora Maria Cristina Araújo de Oliveira apresenta uma trajetória da Matemática como prática social que se constitui ao longo do tempo. De forma sintética, a autora aborda diferentes etapas da Matemática e de seu ensino – desde a pré-história ao século XX – por meio de conexões que evidenciam a circulação de modelos e propostas.

"Tecnologias na sala de aula: e agora?" foi uma provocação do autor Marco Antônio Escher, que, numa mistura de transmissão de experiência e resultados de pesquisa, dialoga com o leitor sobre a utilização ou não de tecnologias nas aulas de Matemática. Mostra também que o uso de aplicativos de celulares tem provocado alterações nas práticas do professor, e, com alguns exemplos, faz um convite aos educadores para que se apropriem mais dessas máquinas nos processos de ensino e aprendizagem da Matemática.

Em "Contribuição da matemática das calorias como estratégia de educação reflexiva do consumidor", dos autores Carlos Henrique Fonseca e Éveli Xavier de Souza, podemos presenciar uma discussão relacionando a alimentação e os hábitos de comer, numa perspectiva da educação em Saúde, discutindo, por exemplo, a matemática presente nos cálculos das calorias do que é ingerido pelos humanos.

"Matemática é coisa da sua cabeça!" foi a maneira que os autores Rodrigo Hohl, Alessandra Ghinato Mainieri e Cláudia Helena Cerqueira Mármora escolheram para, usando de uma metáfora, mostram a matemática presente nas técnicas de investigação científica para encontrar a capacidade cerebral humana. Ainda apresentam exemplos de como é possível transpor cálculos mentais para algumas ações e movimentos utilizados no tratamento de pessoas.

Gustavo Pazzini de Brito apresenta o texto “O papel dos métodos perturbativos na Física e uma introdução aos diagramas de Feynman”, onde relaciona a Física (na descrição da natureza) e Matemática (a linguagem natural da Física), e a necessidade da apresentação de métodos de aproximação para que esse diálogo aconteça. Para isso, apresenta uma introdução, aplicação e relevância dos métodos perturbativos no contexto da física de partículas.

No artigo “Formação intercultural de professores indígenas para ensinar Matemática: os jogos como proposta pedagógica”, as autoras Keli Cristina Conti, Danielle Alves Martins e Nayara Katherine Duarte Pinto relatam uma experiência vivenciada no curso de Formação Intercultural de Educadores Indígenas (FIEI) e integra um projeto de pesquisa em desenvolvimento intitulado “Contribuições do Laboratório de Ensino de Matemática para a formação inicial do professor que ensina Matemática”, que busca analisar e interpretar práticas de formação e de atuação de futuros professores de forma a compreender e ressaltar a importância de um LEM para a formação inicial do professor que ensinará Matemática e seu reflexo no processo de ensino e aprendizagem dos estudantes. Com o tema principal a educação escolar indígena, as autoras relatam suas experiências ao apresentar ao grupo de 34 estudantes indígenas jogos e também o uso de computadores em atividades que discutiam conceitos matemáticos.

Em “A Matemática e os fenômenos da natureza”, o autor Edson Vernek pretende provocar a reflexão do leitor sobre a relação entre o uso da matemática para descrever os fenômenos físicos da natureza, entendendo que a observação é só uma das etapas, talvez a primeira, do ser humano ao se deparar com um fenômeno. Suas conclusões apontam para a indissociabilidade entre a matemática e esses fenômenos naturais, encontrada nas comparações entre conceitos e realidade.

Matemáticas da Música, do autor Luis Castelões, traz à tona uma relação milenar entre dois campos do conhecimento humano. A Matemática e a Música. O texto detalha esse relacionamento com o emprego da própria Aritmética e surpreende quando revela o papel da Matemática no âmbito da Composição Musical contemporânea. Entre fórmulas e compassos, vale a pena ouvir!

E por último temos o artigo “O Papel da Topologia na Física”, no qual o autor Sebastião Alves Dias apresenta uma das áreas da matemática, a Topologia, mostrando como ela pode se relacionar com aplicações em pesquisas atuais nas áreas da física da matemática e da física das interações fundamentais.

Das histórias infantis às temperaturas e radiação, investigando aspectos históricos da Matemática ao uso de tecnologias em sala de aula, nas calorias dos alimentos, na atividade cerebral, no estudo da física de partículas, dos fenômenos naturais à formação de professores indígenas, nas aplicações topológicas soando como música aos nossos ouvidos. Que a diversidade de opiniões e a variedade dos temas elencados neste livro possam instigar o leitor a conhecer mais sobre essa área. E, quem sabe responder: por onde anda a matemática?

Marco Antônio Escher
Programa de Pós-graduação em Educação Matemática
Departamento de Matemática – ICE – UFJF

A formação matemática de professores dos anos iniciais: contribuições de uma oficina sobre histórias infantis e Matemática

Reginaldo Fernando Carneiro[1]
Maria Flávia Machado Dias[2]

Introdução

A formação matemática do professor dos anos iniciais está no foco das discussões na área da Educação Matemática, e muitas pesquisas apresentam reflexões sobre a formação inicial e continuada desse docente.

Nesse contexto, vimos desenvolvendo, desde 2015, uma pesquisa intitulada "Práticas docentes em ciências e matemática de professores dos anos iniciais em início de carreira", que busca compreender as práticas docentes de professores iniciantes dos anos iniciais do Ensino Fundamental no processo de aprender e de ensinar ciências e matemática. A pesquisa é financiada pela Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais – Fapemig – e também pela Pró-Reitoria de Extensão da Universidade Federal de Juiz de Fora – UFJF[3].

Realizamos encontros quinzenais na Universidade com um grupo de professores dos anos iniciais, estudantes das licenciaturas em Matemática,

1 Doutor em Educação e Licenciado em Matemática pela UFSCar. Professor da Faculdade de Educação, do Programa de Pós-Graduação em Educação e do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da UFJF. E-mail: reginaldo.carneiro@ufjf.edu.br

2 Licenciada em Pedagogia pela UFJF e professora da Educação Infantil. E-mail: mariafdias22@gmail.com

3 Agradecemos à FAPEMIG (CHE APQ 00771-14) e à Pró-Reitoria de Extensão – PROEX – pelo apoio financeiro.

Pedagogia e Química, estudantes da Pós-Graduação e pesquisadores, pois compreendemos que o compartilhamento de ideias, de experiências, de perspectivas e das opiniões dos participantes contribui para o desenvolvimento profissional de todos.

Nesses encontros são discutidos textos teóricos e desenvolvidas oficinas sobre diferentes temáticas relacionadas às ciências e à matemática. Uma delas abordou as possibilidades das histórias infantis para ensinar matemática, e é sobre essa oficina que vamos apresentar algumas discussões neste texto.

Temos como objetivo refletir sobre as histórias infantis e a matemática na formação continuada de professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental. Para a produção dos dados, utilizamos a gravação do encontro em áudio e vídeo e as atividades realizadas pelos participantes.

Inicialmente, apresentaremos o referencial teórico que embasa nossas discussões e, em seguida, descreveremos e analisaremos as atividades realizadas nessa oficina. Por fim, teceremos algumas considerações.

Histórias infantis e matemática

É na aprendizagem da matemática que as crianças estabelecem relações, levantam hipóteses, tiram conclusões e confrontam ideias, tornando-se sujeitos autônomos, capazes de pensar e de resolver problemas.

A matemática relaciona-se com o desenvolvimento da capacidade de interpretar, de analisar, de sintetizar, de significar, de conceber, de transcender o imediatamente sensível, de extrapolar e de projetar (SOUZA; CARNEIRO, 2015).

Nesse sentido, as histórias infantis apresentam-se como uma possibilidade de ensinar matemática, levando as crianças a desenvolver a imaginação, a viver experiências que não poderiam ser vividas na realidade e a superar limites. De acordo com Oliveira e Passos (2008, p. 321),

> a leitura e o entendimento de uma narrativa favorecem e potencializam processos cognitivos importantes para capacitar a criança a penetrar no estudo da matemática como uma área do conhecimento que exige a compreensão da sua linguagem específica e de raciocínios próprios para a solução de problemas.

Além disso, Machado (apud SOUZA; CARNEIRO, 2015, p. 396) aponta que é importante trabalhar a língua materna e a matemática juntas, uma vez que a língua materna, mais do que um meio de auxiliar a compreender os enunciados, é uma "fonte alimentadora na construção dos conceitos, na apreensão das estruturas lógicas da argumentação e na elaboração da própria linguagem matemática".

Sendo assim, a integração entre a matemática e as histórias infantis vem sendo apontada por vários autores como um caminho possível de mudança no ensino da matemática, possibilitando um estímulo para ouvir, para ler, para pensar e para escrever.

Para Smole et al. (2004), integrar histórias nas aulas de matemática significa uma mudança na maneira de ensinar os conteúdos matemáticos, pois as crianças podem explorar a matemática e a história ao mesmo tempo, e não de forma dissociada.

> Interrogado pelo texto o leitor volta a ele muitas vezes para acrescentar outras expectativas, percepções e experiências, desta forma, a história contribui para que os alunos aprendam e façam matemática, assim como exploram lugares, características e acontecimentos na história, o que permite que habilidades matemáticas e de linguagem desenvolvam-se juntas, enquanto os alunos leem, escrevem e conversam sobre as ideias matemáticas que vão aparecendo ao longo da leitura. É neste contexto que a conexão da matemática com a literatura infantil aparece. (SMOLE et al., 2004, p.2)

Ainda para essas autoras (2004), a história infantil possibilita que a criança tenha uma relação ativa com a linguagem escrita e falada, permitindo que ocorram manifestações do sentir e do saber que levam a criança a inventar, a renovar e a discordar, oferecendo elementos da realidade como um auxílio para compreensão da história.

Assim, nos anos iniciais, as histórias infantis com conteúdos matemáticos ampliam a capacidade imaginativa da criança e permitem uma maior fluidez na construção de significado dos conceitos e dos conteúdos trabalhados a partir da história. Isso faz com que o processo de ensino e de aprendizagem se torne mais prazeroso, significativo e criativo.

Segundo Oliveira e Passos (2008, p. 321), o texto nas aulas de matemática contribui para a "formação de alunos leitores, possibilitando a autonomia de pensamento e o estabelecimento de relações e de inferências, com as quais o aluno pode fazer conjecturas, expor e contrapor pontos de vista, etc.".

Essas autoras (2008, p. 321) ressaltam ainda a importância da imaginação para a matemática, visto que essa "tem um importante papel nos processos de compreensão, reflexão e abstração, pela possibilidade de criação de situações particulares vinculadas a outras conhecidas".

Dessa forma, o livro passa a auxiliar a criança a compreender que a matemática pode ser divertida e instigante, desfaz a ideia de que essa disciplina é difícil, monótona e cansativa e leva o aluno a entender a matemática como uma área do conhecimento que exige uma linguagem específica e raciocínios próprios, como, por exemplo, para a resolução de problemas (OLIVEIRA; PASSOS, 2008).

Nesse mesmo sentido, Smole et al. (2004, p. 3) apontam que é por meio da

> conexão entre literatura e matemática que o professor pode criar novas situações na sala de aula que encorajam os alunos a compreenderem e se familiarizarem mais com a língua matemática, estabelecendo ligações cognitivas entre a linguagem materna, conceitos da vida real e a linguagem matemática formal, dando oportunidades para eles escreverem e falarem sobre o vocabulário matemático, além de desenvolverem habilidades de formulação e resolução de problemas enquanto desenvolvem noções e conceitos matemáticos.

A leitura, segundo Smole et al. (2004), exige interpretação e comunicação, ajuda os alunos a esclarecer, refinar e organizar seus pensamentos, melhorar a interpretação e a resolução de problemas matemáticos e a desenvolver uma melhor significação para a linguagem matemática. As histórias levam o leitor a participar, a emitir opiniões e a utilizar uma variedade de habilidades de pensamento, como classificação, ordenação, levantamento de hipóteses, interpretação e formulação de problemas.

Além disso, as histórias apresentam várias ilustrações – elemento importante para a compreensão do texto –, que podem enriquecer a imaginação do leitor e auxiliar na compreensão de um conceito ou de uma ideia matemática.

Souza e Carneiro (2015, p. 396), apoiados nas ideias de Gómez Granell (1995), também chamam a atenção para a importância do papel do professor: ele precisa apresentar aos alunos situações em que a linguagem matemática e seus símbolos sejam evidenciados, uma vez que a linguagem matemática não faz parte da vida extraescolar das crianças, diferentemente do que ocorre com a língua materna.

Smole et al. (2004) também expõem algumas ideias importantes para o professor trabalhar com as histórias infantis nas aulas de matemática. Sugerem que, para iniciar o trabalho, é preciso que o professor goste de ler, tenha sempre em mãos o livro que irá trabalhar e já tenha feito sua leitura prévia, tenha gostado da história e elaborado atividades de acordo com a turma com que está trabalhando. É importante também que a história escolhida desperte o interesse e o gosto dos alunos, porém não é necessário que cada aluno tenha um exemplar do livro em mãos: o professor pode ler em voz alta para a turma, ou até mesmo em grupo, se houver mais de um. O conteúdo matemático não precisa estar explícito no texto, mas pode surgir de algumas problematizações e até mesmo das ilustrações do livro. Durante a leitura o professor deve estar constantemente questionando com os alunos: *"Qual será a história que esse livro vai contar?"*, *"O que será que vai acontecer?"*, *"Como será o final?"*, *"O que há de parecido entre as páginas?"*.

Trabalhar com histórias infantis nas aulas de matemática é uma tarefa que exige muito do professor, pois, para encontrar a matemática nos livros, é preciso que ele esteja sempre atento a todos os elementos que eles apresentam. Smole et al. (2004, p. 9) indicam que

> muitos livros trazem a matemática relacionada ao próprio texto, outros servirão para relacionar a matemática com outras áreas do currículo; há aqueles que envolvem determinadas habilidades matemáticas que se deseja desenvolver e outros, ainda,

> providenciam uma motivação para o uso de materiais didáticos. Um livro às vezes sugere uma variedade de atividades que podem guiar os alunos para tópicos matemáticos e habilidades além daquelas mencionadas no texto. Isto significa que "garimpando" nas entrelinhas podemos propor problemas utilizando as ideias aí implícitas.

É importante ressaltar que um dos valores da história infantil, assim como da literatura infantil, é despertar o prazer pela leitura, contrapondo-o à valorização da história para exploração apenas da matemática. Dessa forma, é importante que o professor valorize e incentive a compreensão do texto literário e estabeleça as relações entre língua materna e linguagem matemática, de modo que a história infantil não seja somente um ponto de partida, mas que ocorra de fato uma conexão entre essas áreas do conhecimento.

A proposta da oficina sobre histórias infantis e matemática

Na oficina, elaborada a partir do livro *As três partes*[4], de Edson Luiz Kozminski (2009), tivemos como objetivo discutir sobre os desafios e as possibilidades da utilização de histórias infantis e matemática nos anos iniciais.

Reunindo 14 participantes, conversamos inicialmente a partir de alguns questionamentos: "*Possuem o hábito de trabalhar com histórias infantis?*", "*De que maneira trabalham?*", "*Como docentes, vocês já pensaram em articular histórias infantis e matemática?*", "*Em algum momento vocês perceberam a matemática envolvida nesses livros?*", "*Será que é possível pensar matemática a partir desses livros?*".

Em seguida, realizamos duas atividades: em uma delas, solicitamos que criassem novas figuras a partir das três partes; e na outra, os participantes desenharam em uma folha quadriculada diferentes quadriláteros.

Durante a discussão inicial, a maioria dos participantes revelou que nunca tinha pensado que pudesse trabalhar matemática a partir de um livro de história infantil. Por exemplo, Cristiane comentou que já havia utilizado livros para ensinar ciências, mas nunca imaginou essa possibilidade para a

4 O livro conta a história de uma casa que queria ser outras coisas; por isso, dividiu-se em três partes – dois triângulos retângulos e um trapézio – e se transformou em barco, pássaro, peixe, planta, etc.

matemática. Em suas palavras: "*Eu dei aula no Ensino Fundamental muito tempo e utilizava muito livrinho nas ciências, porque tem um bichinho, tem não sei o que, mas na matemática eu nunca tinha pensado que pudesse usar um livro para aprender matemática, para pensar matemática*".

Já Eduarda conheceu essa possibilidade durante a disciplina de matemática em seu curso de Pedagogia e comentou:

> *Você nunca imagina história infantil para ser trabalhado praticamente com qualquer disciplina, a não ser com alfabetização, essas coisas. Aí quando ele* [o professor] *trouxe para pensar a matemática, você passa a ver os livros com uma certa cautela, porque eu estava comentando aqui com eles que eu li um livro lá na escola que chama* A maior boca do mundo, *e eu estava lendo com as crianças em um momento de leitura mesmo, não tinha uma obrigatoriedade de atividade para fazer, [...] e que dá para trabalhar a questão de ordem, primeiro, segundo, etc.*

Nesse comentário de Eduarda é possível verificar que o contato com as histórias infantis e a matemática faz com que o professor, ao ler qualquer livro, pense e crie algumas possibilidades para abordar os conceitos e os conteúdos matemáticos, mesmo não sendo o objetivo da proposta.

Essa é uma tarefa que faz com que o professor esteja atento às possibilidades apresentadas pela história, pois, como discutem por Smole et al. (2004), há diferentes formas de a matemática aparecer no livro. Os conteúdos e os conceitos matemáticos podem ser apresentados pela história ou estar implícitos. Além disso, as situações expostas no livro também podem permitir que sejam criados contextos matemáticos. Assim, o professor tem papel fundamental tanto na maneira como a matemática será inserida nas aulas quanto na forma de trabalhar em conjunto a história e a matemática.

Walter apontou que no início tinha a preocupação de que abordar a matemática a partir da história pudesse deixar em segundo plano a história e acabar com o prazer da criança pela leitura, já que ela, muitas vezes, apresenta um preconceito em relação a essa disciplina. Por outro lado, Marina explicitou que poderia tornar a aprendizagem da matemática algo mais prazeroso, visto que existe realmente essa ideia de que a matemática é mesmo difícil, que ninguém gosta.

Isabela sugeriu uma possibilidade de abordagem para não enfatizar somente a matemática nesse trabalho, pois o professor poderia

> *sentir primeiro, deixar ler o livro, a história e daí depois você retoma e começa a apontar nesse livro coisas outras que a criança ainda não tinha visto, como a diferença, aqui tem mais animais, aqui tem menos. Porque você lê e não para pra pensar, você está focado na história, o que vai acontecer, um bicho que é bonito ou que não é, então eu pensaria em um momento depois, é assim que eu pensaria.*

Em complemento a essa fala, Cristiane explicou que "*a gente só pensa disciplinarmente e não tem que separar. Está ali no livro*", e Paula acrescentou que "é explorar o livro muito além de história, o que mais tem? Acho que isso instiga a criança a gostar ainda mais do livro".

Esses excertos apresentam a preocupação em evitar que a criança deixe de gostar de ler devido à centralidade do conteúdo matemático; e trazem também, por outro lado, uma visão de que essa conexão pode fazer com que a matemática seja percebida de outra maneira pelos alunos. Ainda que muitos livros contenham a matemática, é preciso explorar a obra de forma a incentivar a criança a gostar ainda mais da leitura e da matemática. Para tanto, é preciso mudar a forma de pensar: deixar de lado a divisão das disciplinas e ver a interdisciplinaridade.

Em seguida, realizamos a leitura do livro *As três partes* e, depois de discutirmos sobre a história, entregamos para os participantes uma folha com as três partes e solicitamos que usassem a criatividade para criar outras figuras que não houvessem aparecido no livro. Eles poderiam recortar, colar, pintar as três partes, acrescentar algo ao desenho. Essa atividade fez com que os participantes utilizassem a criatividade e a imaginação para criar livremente. Depois, cada um apresentou sua criação para o grupo.

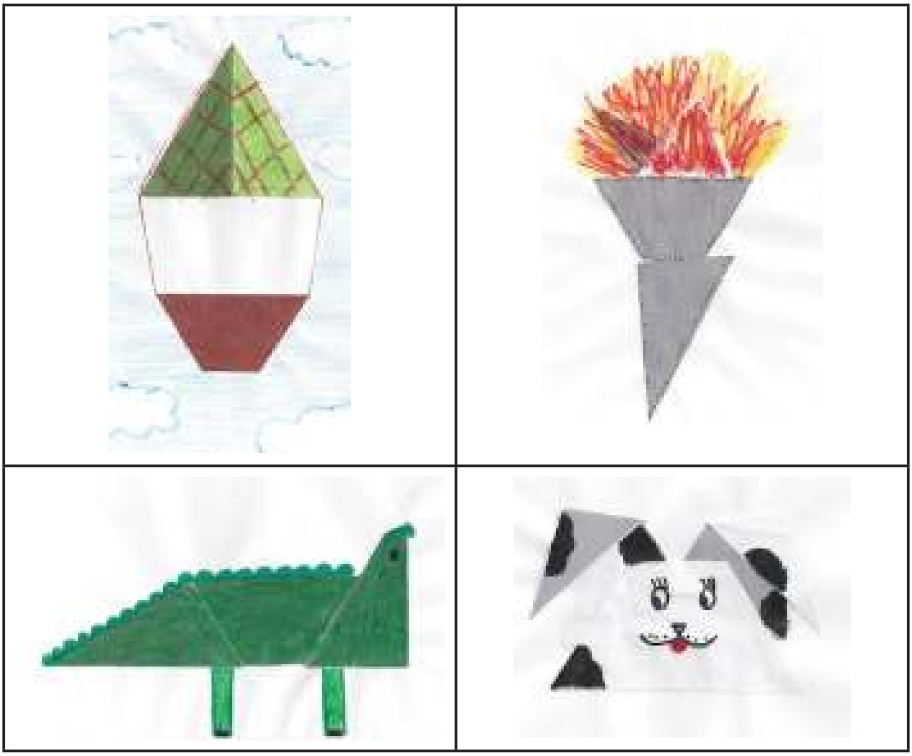


Figura 1: Figuras elaboradas com as três partes. Fonte: arquivo dos pesquisadores.

A última atividade foi uma discussão sobre as propriedades dos quadriláteros. Para isso, os participantes, em grupo, desenharam diferentes quadriláteros em uma malha quadriculada: quadrados, retângulos, losangos, paralelogramos, trapézios, entre outros. Foram tiradas fotos das diversas figuras geométricas e projetadas para que todos pudessem ver. Então realizamos uma reflexão sobre suas propriedades.

Alguns grupos desenharam o quadrado em uma posição que não é habitual, ou seja, sem que ele estivesse com os lados paralelos à margem da folha (Figura 2), o que permitiu discutir se era um quadrado ou um losango.

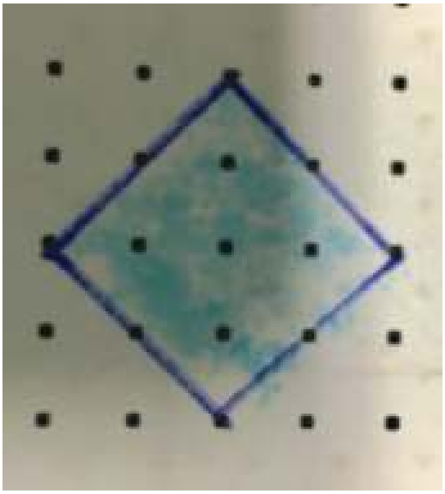


Figura 2: quadrado desenhado na malha quadriculada. Fonte: arquivo dos pesquisadores.

Alguns participantes disseram que se tratava de quadrado, e outros afirmaram que era um losango. Desenhamos um quadrado e um losango nas posições que normalmente aparecem e fomos discutindo sobre as propriedades de cada um deles: consideramos que esses quadriláteros – quadrado e losango – têm lados opostos paralelos e ângulos opostos congruentes e que, além disso, o losango tem os quatro lados congruentes e o quadrado tem os quatro lados congruentes e os quatro ângulos retos. Por essas propriedades, todo quadrado é losango, mas o inverso não ocorre, pois alguns losangos não têm os ângulos retos. Fizemos essa mesma ponderação para o quadrado e para o retângulo.

Com essa atividade, discutimos sobre o aspecto figural e conceitual desses quadriláteros. De acordo com Fischbein (apud NACARATO; PASSOS, 2003, p. 61), o aspecto figural é aquele que corresponde à imagem mental da figura geométrica, ou seja, "a representação sensorial de um objeto ou fenômeno" e está associado ao aspecto conceitual, pois a imagem pode ser manipulada por meio das transformações geométricas.

Essas reflexões evidenciaram, como destacam Nacarato, Mengali e Passos (2009), a importância de os professores vivenciarem, no processo de formação, os fundamentos da matemática e a prática da pesquisa em educação matemática.

Essa atividade foi interessante, pois permitiu que refletíssemos sobre alguns conceitos geométricos cujo desconhecimento ou esquecimento faz com que os alunos, diante do desenho de uma figura geométrica em outra posição, a considerem outra figura.

Por fim, conversamos sobre as possibilidades de trabalho com o livro *As três partes*. Julia, referindo-se à de criação de outras figuras com as três partes, explicou que iniciaria as atividades de outra maneira: "*Primeiro eu apresentaria as três partes soltas, porque, como a gente viu exemplos, pode dar um bloqueio e não conseguir montar outras figuras diferentes. Acho que fluiria melhor e depois eu partiria para o texto*".

Os participantes ponderaram que, a depender do objetivo e da maneira como o professor queira explorar livro, ele poderá ser utilizado desde a Educação Infantil – quando já se trabalham as figuras geométricas – até o 3.° ou o 4.° ano do Ensino Fundamental.

Algumas considerações

Neste artigo, tivemos como objetivo refletir sobre as histórias infantis e a matemática na formação continuada de professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental.

Em razão da discussão proposta, a oficina permitiu aos participantes ter contato com o ensino e a aprendizagem da matemática a partir das histórias infantis e vivenciar essa experiência, possibilidade que não conheciam e nunca tinham imaginado.

Ao utilizar histórias infantis, o professor passa a atentar para as situações que são apresentadas pelos livros, de forma a imaginar ou verificar como a matemática pode ser abordada.

As reflexões sobre as dificuldades com essa abordagem fizeram surgir preocupações em evitar que as crianças percam o gosto pela leitura e, para isso, o grupo considerou importante não focar somente a matemática. Surgiu também a perspectiva de que aliar a matemática e a história infantil seria uma forma de tornar o ensino dessa disciplina mais prazeroso e divertido para as crianças.

Nas atividades desenvolvidas na oficina, os participantes criaram, a partir das três partes, figuras diferentes das apresentadas no livro e colocaram em movimento sua criatividade e imaginação. Por fim, discutir sobre os quadriláteros permitiu abordar questões conceituais que muitos não conheciam ou das quais não se recordavam e trabalhar com as propriedades das figuras geométricas.

Dessa forma, consideramos que a oficina contribuiu para a formação matemática do professor dos anos iniciais, pois levou-os a refletir sobre as histórias infantis e a matemática e também sobre alguns conceitos geométricos.

Referências bibliográficas

KOZMINSKI, E. L. **As três partes**. São Paulo: Ática, 2009.

OLIVEIRA, R. M. M. A.; PASSOS, C. L. B. Promovendo o desenvolvimento profissional na formação de professores: a produção de histórias infantis com conteúdo matemático. **Ciência & Educação**, Bauru, v. 14, n. 2, p. 315-330, 2008.

NACARATO, A. M.; MENGALI, B. L. S.; PASSOS, C. L. B. **A matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental**: tecendo fios do ensinar e do aprender. Belo Horizonte: Autêntica, 2009.

NACARATO, A. M.; PASSOS, C. L. B. **A geometria nas séries iniciais**: uma análise sob a perspectiva da prática pedagógica e da formação de professores. São Carlos, EdUFSCar, 2003.

SMOLE, K. C. S. et al. **Era uma vez na matemática**: uma conexão com a literatura infantil. São Paulo: CAEM, 2004.

SOUZA, A. P. G.; CARNEIRO, R. F. Um ensaio teórico sobre literatura infantil e matemática: práticas de sala de aula. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 17, n. 2, p .392-418, 2015.

A história da temperatura de 2,7 Kelvin antes de Penzias e Wilson

Andre Koch Torres de Assis[1]
Marcos Cesar Danhoni Neves[2]

Resumo

Esta é uma tradução do artigo "History of the 2.7 K Temperature Prior to Penzias and Wilson" publicado em Apeiron, Volume 2, páginas 79-84 (1995). Apresentamos a história das estimativas da temperatura do espaço intergaláctico. Começamos com os trabalhos de Guillaume e Eddington sobre a temperatura do espaço interestelar devida à luz das estrelas pertencentes à nossa galáxia Via Láctea. Discutimos então trabalhos relacionados com a radiação cósmica, concentrando-nos em Regener e Nernst. Também discutimos as pesquisas importantes de Finlay-Freundlich e Max Born sobre este tema. Finalmente, apresentamos o trabalho de Gamow e colaboradores. Mostramos que os modelos baseados em um universo em equilíbrio dinâmico sem expansão previram a radiação de 2,7 K antes e melhor do que os modelos baseados no estrondão (*big bang*).

Introdução

Em 1965 Penzias e Wilson descobriram a radiação cósmica de fundo (RCF) utilizando uma antena refletora no formato de chifre ou de corneta

1 Instituto de Física "Gleb Wataghin", Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP, 13083-859 Campinas, SP, Brasil. Email: assis@ifi.unicamp.br, homepage: http://www.ifi.unicamp.br/~assis.

2 Departamento de Física, Universidade Estadual de Maringá – UEM, 87020-900 Maringá, PR, Brasil. E-mail: macedane@yahoo.com.

(*horn reflector antenna*) construída para estudar a radioastronomia (Penzias e Wilson 1965). Eles encontraram uma temperatura de (3,5 ± 1,0) K observando a radiação de fundo no comprimento de onda de 7,3 cm. Esta observação foi logo interpretada como sendo uma radiação fóssil do estrondão quente (*hot big bang*)[3] com um espectro de corpo negro (Dicke e outros 1965). A descoberta foi considerada uma prova do modelo cosmológico padrão do universo baseado na expansão do universo (o estrondão), que teria previsto esta temperatura com os trabalhos de Gamow e colaboradores.

Neste artigo mostramos que outros modelos de um universo em equilíbrio dinâmico sem expansão haviam previsto esta temperatura antes de Gamow. Além disso, mostramos que as próprias previsões de Gamow foram piores do que estas previsões anteriores.

Antes de começar nossa análise listamos brevemente uma informação histórica importante que ajuda a compreender as descobertas. Stefan obteve experimentalmente em 1879 que o fluxo bolométrico total da radiação F emitido por um corpo negro na temperatura T era dado por $F = \sigma T^4$, onde σ é uma constante atualmente denominada de constante de Stefan-Boltzmann ($5{,}67 \times 10^{-8} Wm^{-2}K^{-4}$). A dedução teórica desta expressão foi obtida por Boltzmann em 1884. Em 1924 Hubble estabeleceu que as nebulosas eram sistemas estelares localizadas fora da Via Láctea. Em 1929 ele obteve a famosa lei relacionando o desvio para o vermelho com a distância.

Guillaume e Eddington

A estimativa mais antiga que conhecemos sobre a temperatura do "espaço" é aquela devida a Guillaume (1896). Ela foi publicada em 1896, antes do nascimento de Gamow (1904). Citamos aqui um fragmento de seu texto (Assis e Neves 2014):

> O capitão Abney determinou recentemente a razão da luz do céu estrelado para a luz da Lua cheia; encontrando esta razão igual a

3 Nesta versão em português deste artigo estamos traduzindo a expressão inglesa *big bang* por *estrondão*, seguindo a sugestão de Soares (2002). O termo *big bang* foi criado por um dos mais ácidos críticos desta teoria, o Prof. Fred Hoyle (1915-2001), ao referir-se jocosamente, durante um programa radiofônico da BBC, à ideia de um universo "explosivo." A tradução usualmente utilizada, *grande explosão*, é insatisfatória por trair o espírito com que o termo foi cunhado.

> 1/44, levando em consideração todas as reduções devidas à obliquidade dos raios com relação à placa [fotográfica]; e devidas à absorção atmosférica. Ao dobrar este valor para os dois hemisférios, e ao adotar a razão da intensidade luminosa da Lua para aquela do Sol como sendo 1/600.000 (uma média grosseira das medidas de Wollaston, de Bouguer e de Zöllner), encontraremos que o Sol nos envia 15.200.000 vezes mais energia vibratória do que o conjunto das estrelas. A elevação da temperatura de um corpo isolado no espaço, e submetido apenas à ação das estrelas, será igual ao quociente da elevação da temperatura devida ao Sol sobre a órbita da Terra pela raiz quadrada de 15.200.000, ou seja, aproximadamente 60. Além disso, este número deve ser considerado um valor mínimo, já que as medidas do capitão Abney, feitas em South Kensington, podem ter sido distorcidas por alguma outra fonte de luz. Concluímos que apenas a radiação das estrelas manteria o corpo de prova que assumimos ter sido colocado em diferentes locais do céu à temperatura de $338/60 = 5,6$ [graus] absolutos $= -207,4^{\circ}$ centígrados.
>
> Não se deve concluir que a radiação das estrelas eleve em 5 ou 6 graus a temperatura dos corpos celestes. Se o astro em questão já possui uma temperatura muito diferente do zero absoluto, sua perda de calor é muito mais forte; encontraremos a elevação da temperatura devida à radiação das estrelas ao calcular a perda usando a lei de Stefan. Encontramos assim que, para a Terra, a elevação da temperatura devida à radiação das estrelas é inferior a um cem-milésimo de um grau. Ainda assim devemos considerar este número como um limite superior da ação que buscamos calcular.

É claro que a estimativa de Guillaume de uma temperatura de corpo negro de 5 a 6 K pode não ter sido a mais antiga, pois a lei de Stefan já era conhecida desde 1879. Além disso, ela é restrita ao efeito devido às estrelas pertencentes à nossa própria galáxia.

Citamos agora do livro de Eddington, *The Internal Constitution of the Stars* (1988), publicado em 1926. O último capítulo deste livro tem como título "A Matéria Difusa no Espaço" e começa discutindo "A Temperatura do Espaço":

Capítulo XIII

A Matéria Difusa no Espaço

A Temperatura do Espaço.

256. O total de luz recebido por nós das estrelas é estimado como sendo equivalente a aproximadamente 1.000 estrelas da primeira magnitude. Considerando uma correção média para reduzir a magnitude bolométrica para a visual para estrelas de tipos diferentes das estrelas das classes F e G, o calor recebido das estrelas pode ser estimado como correspondendo a 2.000 estrelas com magnitude bolométrica aparente 1,0. Inicialmente vamos calcular a densidade de energia desta radiação.

Uma estrela com magnitude bolométrica absoluta 1,0 irradia 36,3 vezes a energia do Sol, ou $1,37\times10^{35}\,erg/s$. Este valor fornece $1,15\times10^{-5}\,erg/(cm^2 s)$ sobre uma esfera com um raio de 10 *parsecs* ($3,08\times10^{19}\,cm$). A densidade de energia correspondente é obtida dividindo [este valor] pela velocidade de propagação, obtendo-se $3,83\times10^{-16}\,erg/cm^3$. A uma distância de 10 *parsecs* a magnitude aparente é igual à magnitude absoluta; portanto, a densidade de energia de $3,83\times10^{-16}$ corresponde a uma magnitude bolométrica aparente de 1,0.

De acordo com estes cálculos, a radiação total das estrelas terá uma densidade de energia dada por:

$2.000\times3,83\times10^{-16}=7,67\times10^{-13}\,erg/cm^3$.

Pela fórmula $E=\sigma T^4$, a temperatura efetiva correspondente a esta densidade é

3,18º absolutos.

Em uma região do espaço que não esteja nas proximidades de qualquer estrela, esta [densidade de energia] constitui o campo de radiação total, e um corpo negro, por exemplo, um termômetro de bulbo negro, vai adquirir neste local uma temperatura de 3,18º, de tal forma que sua emissão possa contrabalançar a radiação incidindo sobre ele e sendo absorvida por ele. Esta [temperatura] é algumas vezes denominada de 'temperatura do espaço interestelar'.

Um aspecto importante a enfatizar aqui é que a estimativa de Eddington de uma temperatura de 3,18 K não foi a primeira, já que Guillaume havia obtido um valor similar 30 anos antes. Embora Eddington não tenha citado Guillaume ou qualquer outro autor, é claro que ele estava seguindo a dedução de alguma outra pessoa. Esta conclusão é indicada pelas sentenças "O total de luz recebido por nós das estrelas é estimado [por quem?] como sendo..." e "Esta [temperatura] é algumas vezes denominada [por quem?] de 'temperatura do espaço interestelar'." Estas sentenças mostram que outros pesquisadores também haviam chegado a este resultado. É muito provável que nos cinquenta anos transcorridos entre a lei de Stefan (1879) e o livro de Eddington (1926) outros cientistas tenham chegado à mesma conclusão independentemente do trabalho de Guillaume (1896).

Um outro ponto que devemos ter em mente é que Eddington e Guillaume estavam discutindo a temperatura do espaço interestelar devida às estrelas pertencentes à nossa própria galáxia, eles não estavam se referindo ao espaço intergaláctico. Devemos nos lembrar que Hubble somente estabeleceu com certeza a existência de galáxias externas à Via Láctea em 1924.

Regener

Os raios cósmicos foram descobertos em 1912 por V. F. Hess (Rossi 1964). Ele realizou um voo de balão e observou que um eletroscópio eletrizado era descarregado mais rapidamente nas altas altitudes do que ao nível do mar, contrariamente às expectativas. Esta descarga é devida à ionização do ar, sendo que esta observação mostrou que esta ionização aumentava com a altitude. Era conhecido que a radiação emitida por substâncias radioativas ionizavam o ar, e as medidas de Hess mostraram que a radiação responsável pela ionização natural do ar entrava na atmosfera a partir de cima, e não a partir do solo.

Em 1928 R. A. Millikan e Cameron (1928a) encontraram que a energia total dos raios cósmicos no topo da atmosfera era um-décimo daquela energia devida à luz e calor das estrelas. Em 1933 E. Regener (1933 e 1995) concluiu que ambos os fluxos de energia tinham essencialmente o mesmo valor. Este é um resultado muito importante com profundas implicações cosmológicas: Ele indica que a densidade de energia da luz das estrelas de nossa própria galáxia está em equilíbrio com a radiação cósmica, que é, em grande parte, de origem extragaláctica. Sempre foi difícil saber exatamente a origem dos raios cósmicos, mas o fato de que a maior parte de suas componentes ter se originado fora de nossa galáxia foi inferido a partir de uma outra medida de Millikan e Cameron (1928b). Neste trabalho eles mostraram que a intensidade da radiação vindo do plano da Via Láctea era a mesma que aquela vindo de um plano normal à Via Láctea. Esta isotropia indicava claramente uma origem extragaláctica para os raios cósmicos.

O trabalho geral de Regener foi descrito da seguinte maneira por Rossi (1964):

> Nas décadas de 1920 e 1930 a técnica dos eletroscópios com autogravação levados por balões até as camadas mais altas da atmosfera ou mergulhados a grandes profundidades sob a água foi levado a um grau sem precedentes de perfeição pelo físico alemão Erich Regener e seu grupo. Devemos a estes cientistas algumas das medidas mais precisas já feitas sobre a ionização dos raios cósmicos em função da altitude e profundidade.

Em seu trabalho de 1933 Regener mencionou o seguinte (Regener 1933 e 1995):[4]

> Contudo, a densidade de energia produzida pelos raios cósmicos, que é aproximadamente igual à densidade da luz e calor emitidos pelas estrelas fixas, é muito interessante de um ponto de vista astrofísico. Um corpo celeste tendo as dimensões necessária para absorver os raios cósmicos – no caso de uma densidade de 1, teríamos um corpo com o diâmetro de vários metros (5 metros de água absorvem 9/10 dos raios cósmicos) – será aquecido pelos raios cósmicos. O aumento na temperatura será proporcional à energia dos raios cósmicos absorvidos (S_U) e à superfície (O). A temperatura do corpo vai aumentar até que o calor que ele emite – no caso da radiação de corpo negro $\sigma T^4 O$ – atinge o mesmo valor. Obtemos então a temperatura final de $T = \sqrt[4]{S_U / \sigma}$. Substituindo os valores numéricos obtemos 2,8 K.

4 Estamos substituindo o termo *Ultrastrahlung* (ultrarradiação) utilizado por Regener e outros autores da época pela expressão “radiação cósmica”, como esta radiação é denominada hoje em dia.

Nernst

O trabalho de Regener foi discutido pelo famoso físico Walther Nernst (1864-1941) que recebeu o prêmio Nobel de química em 1920 pela sua terceira lei da termodinâmica (1906). Ao redor de 1912 Nernst havia desenvolvido a ideia de um universo em um estado estacionário. Ele expressou esta ideia em termos simples em 1928 (Nernst 1928): "O universo está em uma condição de estado estacionário, isto é, as estrelas fixas atuais esfriam continuamente e novas estrelas estão sendo formadas."

Em 1937 ele desenvolveu este modelo e propôs uma explicação de luz cansada para o desvio para o vermelho cosmológico, a saber, a absorção da radiação pelo éter luminífero, diminuindo a energia e a frequência da luz das galáxias (Nernst 1937 e 1995a). Desta forma o desvio para o vermelho cosmológico não seria devido a um efeito Doppler de acordo com Nernst. Neste trabalho ele também mencionou o artigo importante de Regener discutido anteriormente.

No ano seguinte Nernst publicou um outro artigo discutindo a temperatura da radiação no universo (Nernst 1938 e 1995b). Ele chegou aqui em uma temperatura no espaço intergaláctico de 0,75 K. Ele discutiu mais uma vez o trabalho de Regener e afirmou que o desvio para o vermelho cosmológico não era devido a um efeito Doppler.

É importante enfatizar nos trabalhos de Eddington, Regener, Nernst e outros que discutiremos em seguida a utilização da lei de Stefan-Boltzmann, que é característica de uma radiação de corpo negro. Um outro ponto a ser enfatizado é que as densidades de energia destas radiações (devida à luz das estrelas de nossa galáxia e devida aos raios cósmicos, por exemplo) foram medidas e encontrou-se que possuíam o mesmo valor, indicando uma situação de equilíbrio dinâmico. Sciama descreveu esta situação nos seguintes termos (Sciama 1971):

> O fluxo de raios cósmicos quase certamente preenche a Via Láctea, e corresponde a uma densidade de energia no espaço interestelar de aproximadamente $1\, eVcm^{-3}$ $(10^{-12} erg/cm^3)$. Esta densidade é comparável com a densidade de energia da luz das estrelas, com a densidade de energia cinética turbulenta do gás interestelar e, como veremos em seguida, com a densidade de energia do campo

> magnético interestelar. Este fato está na base de nossa afirmação de que os raios cósmicos são importantes dinamicamente. Eles constituem um gás relativístico cuja energia e pressão não podem ser ignorados. A quase igualdade das várias densidades de energia provavelmente não é acidental, mas apesar de muitas tentativas uma compreensão completa desta igualdade ainda não foi alcançada.

E novamente ele afirmou o seguinte na página 185, após mencionar a descoberta de Penzias e Wilson da radiação de corpo negro de 3 K:

> De um ponto de vista do laboratório 3 K é uma temperatura muito baixa. De fato, para medi-la os observadores de micro-ondas tiveram de usar um terminal imerso em hélio líquido. Apesar disto, de um ponto de vista astrofísico 3º K é uma temperatura muito alta. Um campo de radiação universal de corpo negro a esta temperatura contribuiria com uma densidade de energia em todo lugar de $1\,eVcm^{-3}$. Como vimos no Capítulo 2 [página 25], esta é exatamente a densidade de energia em nossa galáxia dos vários modos de excitação interestelar – luz das estrelas, raios cósmicos, campos magnéticos e nuvens turbulentas de gás. Assim, mesmo em nossa galáxia a radiação de fundo cosmológica seria para muitos fins tão importante quanto os modos de energia bem conhecidos de origem local.

Gostaríamos de fazer dois comentários importantes aqui. O primeiro é que a parte principal da radiação cósmica pode ter uma origem extragaláctica (ver o comentário anterior sobre o trabalho de Millikan e Cameron), assim como ocorre com os campos magnéticos que preenchem todo o espaço. Se este é o caso, entre três modos de excitação extragaláctica (o fluxo de raios cósmicos, os campos magnéticos e a RCF) estariam em equilíbrio térmico entre si e também com os campos de energia gerados dentro de nossa própria galáxia, tais como a luz das estrelas e as nuvens turbulentas de gás. A maneira mais fácil de entender este fato é concluindo que o universo como um todo está em um estado de equilíbrio dinâmico.

McKellar e Herzberg

Gostaríamos de mencionar aqui brevemente o trabalho de 1941 de Herzberg (baseado nas observações feitas por A. McKellar) discutindo medidas do cianogênio feitas no espaço interestelar. Herzberg encontrou uma temperatura de 2,3 K caracterizando o grau observado de excitação das moléculas CN caso elas estivessem em equilíbrio em um banho térmico (Herzberg):

> A observação de que no espaço interestelar só estão preenchidos os níveis [energéticos] rotacionais mais baixos de CH, CH^+ e CN, é facilmente explicada pela desocupação dos níveis mais altos pela emissão do espectro de rotação no infravermelho (ver a página 43) e pela falta de excitação para estes níveis por colisões ou radiação. A intensidade do espectro de rotação do CN é muito menor do que a intensidade do CH ou CH^+ devido ao menor momento de dipolo assim como a menor frequência [devido ao fator ν^4 na equação (I.48)]. Este é o motivo pelo qual foram observadas linhas do segundo nível mais baixo (K = 1) para o CN. A partir da razão de intensidades das linhas com K = 0 e K = 1, segue-se uma temperatura de 2,3 K, a qual obviamente tem apenas um significado muito restrito.

Obviamente há um grande significado neste resultado, embora sua importância não tenha sido reconhecida por Herzberg. Este fato foi discutido por Sciama (1971). Apenas devemos enfatizar mais uma vez que este resultado não foi obtido utilizando a cosmologia do estrondão (big bang).

Finlay-Freundlich e Max Born

Em 1953-1954 Finlay-Freundlich (1953, 1954a, 1954b) propôs um modelo de luz cansada para explicar o desvio para o vermelho das linhas solares e alguns desvios para o vermelho anômalos de várias estrelas, assim como para explicar o desvio para o vermelho cosmológico. Ele propôs um desvio para o vermelho proporcional à quarta potência da temperatura, sendo seu trabalho analisado mais profundamente por Max Born (1953, 1954). Sua fórmula foi expressa da seguinte forma: $\Delta\nu/\nu = -AT^4\ell$, na qual $\Delta\nu$ era a mudança na frequência da linha espectral, ν sua frequência original, A era uma constante, T a temperatura do campo de radiação e ℓ era o comprimento do caminho através do campo de radiação. O que nos interessa aqui é a discussão de Finlay-Freundlich sobre o desvio para o vermelho cosmológico (1954b):

> §6. O Desvio para o Vermelho Cosmológico
>
> O caráter fundamental do efeito que está sendo considerado levanta, necessariamente, a questão de saber se ele também não pode ser a causa do desvio para o vermelho cosmológico que tem sido interpretado até o momento como um efeito Doppler. Se este for o caso, a influência do fator ℓ na fórmula (1) é dado explicitamente pelas observações. O desvio para o vermelho observado $\Delta\lambda / \lambda$ aumenta de $0,8\times10^{-3}$ para cada milhão de parsec $\left(=3\times10^{24} cm\right)$, o que corresponde a um aumento na velocidade de 500 *km/s* quando interpretado como um efeito Doppler. Um aumento de 10 *km/s* – correspondendo a um desvio para o vermelho para uma estrela do tipo B2 com temperatura $T_B = 20.000\ K$ – corresponderia a uma trajetória de $\ell_S = 1,2\times10^{23} cm$.
>
> No que diz respeito à temperatura média T_S do espaço intergaláctico, além do fato de que ela tem de ser próxima do zero absoluto, nenhuma informação confiável está disponível. Contudo, se interpretarmos o desvio para o vermelho cosmológico da mesma forma que interpretamos os desvios para o vermelho das estrelas, então a seguinte equação deve valer:
>
> $$T_S^4 \ell_S = T_B^4 \ell_B, \text{ ou } T_S = T_B \left(\ell_B / \ell_S \right)^{1/4}. \qquad (3)$$
>
> A equação (3) mostra que o valor de obtido desta forma não depende fortemente do valor de ℓ_B. Considerando para ℓ_B os dois valores extremos, 10^7 *cm* e 10^9 *cm*, obtemos os dois valores razoáveis a seguir:
>
> $$T_S = 1,9\ K \text{ e } T_S = 6,0\ K.$$
>
> Em um artigo recente, Gamow (1953) [Gamow, G., 1953, Dan. Acad. Math.-Phys. Section, **27**, No. 10] deduziu um valor para T_S de 7 *K* a partir de considerações termodinâmicas assumindo uma densidade média de matéria no espaço no valor de $10^{-30} g / cm^3$.

> Portanto, podemos ter de encarar que o desvio para o vermelho cosmológico não é devido a um universo expandindo, mas sim a uma perda de energia sofrida pela luz nos imensos comprimentos de espaço que ela tem de percorrer vindo dos sistemas estelares mais distantes. A descoberta de Stebbins e Whitford, segundo a qual o desvio para o vermelho cosmológico é acompanhado paralelamente de um excesso de avermelhamento não explicado, indica que o espaço intergaláctico não é completamente vazio (1948) [Stebbins, J., e Whitford, A. E., 1984, Ap. J., 108, 413]. Assim, a luz pode estar exposta a algum tipo de interação com a matéria e com a radiação no espaço intergaláctico.

Dois pontos principais a serem enfatizados aqui: (A) Finlay-Freundlich propôs uma interpretação alternativa para o desvio para o vermelho cosmológico, com esta nova interpretação sendo diferente da explicação por efeito Doppler, e (B) chegou a uma temperatura do espaço intergaláctico entre $1{,}9K < T < 6{,}0K$. Estes feitos são muito importantes, excepcionais.

É importante citar aqui Max Born (1954) quando discutiu a proposta de Finlay-Freundlich de que este novo efeito poderia ser devido a uma interação fóton-fóton, a saber:

> Claramente um efeito como este não está de acordo com a teoria atual. Contudo, ele tem uma consequência atrativa. Uma aplicação simples das leis de conservação de energia e momento linear mostra que uma colisão deste tipo só é possível se for criado um par de partículas com momentos opostos. A energia de uma destas partículas é $h\nu' = -h\delta\nu / 2$, onde δν é dado pela equação (6) $[\delta\nu = -C\nu\bar{\nu} / \nu_o]$. Caso as partículas secundárias sejam fótons, sua frequência é da ordem de grandeza das ondas de radar (para o Sol temos $\nu' \sim 2\times10^9 s^{-1}$, $\lambda' \sim 15\ cm$). Assim, o desvio para o vermelho está ligado com a radioastronomia.

Precisamos apenas nos lembrar aqui do trabalho de Penzias e Wilson realizado 11 anos mais tarde com uma antena em forma de chifre construída para estudar ondas de rádio que encontrou a RCF com um comprimento de onda característico de 7 cm... Esta descoberta de Penzias e Wilson tem de ser considerada como um sucesso retumbante da previsão de Max Born!

Gamow e Colaboradores

Vimos que Finlay-Freundlich (1954b) mencionou que Gamow havia deduzido o valor de 7 *K* para o espaço intergaláctico em 1953. Só conseguimos encontrar dois outros artigos antes deste trabalho de 1953 com uma previsão desta temperatura feita por colaboradores de Gamow, a saber, Alpher e Herman (1948, 1949). No primeiro deste trabalho estes dois autores afirmaram o seguinte:

> A temperatura do gás na época da condensação era de 600 *K* e a temperatura no universo na época atual encontra-se como sendo de aproximadamente 5 *K*. Esperamos publicar os detalhes destes cálculos em um futuro próximo.

No segundo destes trabalhos, no qual foram apresentados os detalhes destes cálculos, eles afirmaram o seguinte (nossa ênfase em itálico):

> De acordo com a equação (4) $\left[\rho_r \rho_m^{-4/3} = \text{constante}\right]$, a especificação de ρ_m'', ρ_m' e ρ_r' fixa a densidade atual da radiação, ρ_r'. De fato, encontramos que o valor de ρ_r' consistente com a equação (4) é dado por
>
> $$\rho_r'' \cong 10^{-22}\, g/cm^3, \qquad (12d)$$
>
> **que corresponde a uma temperatura atual da ordem de 5 *K*.** Esta temperatura média para o universo é para ser interpretada como a temperatura de fundo que resultaria apenas da expansão universal. **Contudo, a energia térmica resultando da produção de energia nuclear nas estrelas aumentaria este valor.**

Destas afirmações fica evidente que a previsão que fizeram em 1948 era de que $T \approx 5$ *K*, enquanto que em 1949 obtiveram uma temperatura maior do que 5 *K*, embora perto deste valor.

A única previsão adicional desta temperatura feita por Gamow que conhecemos antes da descoberta de Penzias e Wilson (além daquela já mencionada de 7 K feita em 1953) foi publicada por Gamow (1961) em seu livro *The Creation of the Universe*. A primeira edição deste livro foi em 1952, apenas quatro anos antes do trabalho de Penzias e Wilson. Neste livro existe apenas um lugar no qual ele discute a temperatura do universo, a saber [21, página 42, nossa ênfase em negrito]:

> A relação apresentada anteriormente entre o valor da constante de Hubble e a densidade média do universo nos permite deduzir uma expressão simples que nos fornece a temperatura durante os estágios iniciais da expansão em função do tempo contado a partir da compressão máxima. Expressando este tempo em segundos e a temperatura em graus (ver Apêndice, páginas 142-143), temos:
>
> $$\text{temperatura} = \frac{1,5\times 10^{10}}{[\text{tempo}]^{1/2}}$$
>
> Assim, quando o universo tinha a idade de 1 segundo, 1 ano e 1 milhão de anos, sua temperatura era de 15 bilhões, 3 milhões, e 3 mil graus absolutos, respectivamente. **Inserindo a idade atual do universo $\left(t = 10^{17}s\right)$ nesta fórmula, encontramos**
>
> $T_{atual} = 50$ graus absolutos
>
> a qual está razoavelmente de acordo com a temperatura atual do espaço interestelar. Sim, nosso universo levou algum tempo para esfriar do calor devastador de seus dias iniciais até o frio glacial de hoje em dia!

Discutimos abaixo estas previsões de Gamow e seus colaboradores.

Discussão e Conclusão

Na maioria dos livros didáticos atuais encontra-se a afirmação de que Gamow e colaboradores previram a temperatura de 2,7 K antes do trabalho de Penzias e Wilson, enquanto que a teoria do estado estacionário de Hoyle, Narlikar e Gold não teriam previsto esta temperatura. Portanto, a previsão correta de 2,7 K é aclamada como um dos argumentos mais fortes a favor do estrondão. Contudo, estes dois modelos (estrondão e teoria do estado estacionário) têm um aspecto muito importante em comum, a saber, ambos aceitam a interpretação do desvio para o vermelho cosmológico como sendo devido a um efeito Doppler, ou seja, estes dois modelos aceitam a expansão do universo.

Mas existe um terceiro modelo do universo que foi desenvolvido no século XX por vários cientistas incluindo Nernst, Finlay-Freundlich, Max Born e Louis de Broglie (1966). Ele é baseado em um universo que está em equilíbrio dinâmico, sem expansão e sem criação contínua de matéria. Revisamos este assunto em artigos anteriores (Assis 1992, 1993). Embora ele não seja considerado por quase nenhum livro didático atual que lida com cosmologia, este terceiro modelo demonstra ser o modelo mais importante de todos.

Para entender como os livros didáticos negligenciam totalmente a cosmologia de equilíbrio, vale à pena citar uma carta enviada por Gamow para Arno Penzias, em 1965, após a descoberta de Penzias e Wilson (curiosamente a carta foi datada de 1963...). Esta carta foi reproduzida no artigo de Penzias (1972) e diz:

> Obrigado por enviar-me seu artigo sobre a radiação de 3 *K*. Está muito bem escrito exceto que a "história inicial" não está "tão completa". A teoria daquilo que é conhecido, hoje em dia, como a "bola de fogo primordial", foi inicialmente desenvolvida por mim em 1946 (Phys. Rev. 70, 572, 1946; 47, 505, 1948; Nature 162, 680, 1948). A previsão do valor numérico da temperatura atual (residual) pode ser encontrada no artigo de Alpher & Hermann (Phys. Rev. 75, 1093, 1949) que a estimaram como sendo 5 *K*, e no meu artigo (Kong. Dansk. Ved. Sels. 27, No. 10, 1953) com a estimativa de 7 *K*. Mesmo no meu livro popular *Creation of the Universe* (Viking 1952) você pode encontrar (na pág. 42) a fórmula $T = 1,5 \times 10^{10} / t^{1/2}\ K$, e o limite superior de 50 *K*. Assim, você pode ver que o mundo não começou com o todo-poderoso Dicke.
>
> Atenciosamente, G. Gamow

Esta carta, como acabamos de ver, não corresponde aos fatos verdadeiros. Gamow, na edição revisada de seu livro de 1952, publicada em 1961, calculou uma temperatura específica. Assim, neste trabalho Gamow não estimou um "*limite superior de 50 K*". A necessidade que Gamow tinha de convencer todo mundo de que ele havia previsto corretamente, e antes de qualquer outra pessoa, a temperatura da radiação cósmica de fundo fica evidente de outra parte do artigo de Penzias (1972):

> Está além dos objetivos deste trabalho avaliar as várias explicações teóricas da [temperatura] de 3 *K*. Apesar disto, a reivindicação exclusiva da teoria do universo quente em evolução é a de que ela previu a radiação de fundo antes da descoberta. No quarto Simpósio sobre Astrofísica Relativística "Texas", George Gamow era o presidente da Sessão sobre Radiação Cósmica de Microondas. Ele terminou sua apresentação com um comentário que, no melhor de minha memória, foi o seguinte, "Se eu perder um níquel, e alguém encontrar um níquel, não posso provar que ele é o meu níquel. Contudo, perdi um níquel exatamente onde eles encontraram um níquel." Os aplausos foram longos e efusivos.

Como mencionamos neste artigo, Gamow e colaboradores obtiveram temperaturas desde $T \approx 5\ K$ até $T = 50\ K$, em ordem crescente ($5\ K$, $\geq 5\ K$, $7\ K$ e $50\ K$)... Estas previsões são muito ruins quando comparadas com aquelas obtidas por Guillaume, Eddington, Regener e Nernst, McKellar e Herzberg, Finlay-Freundlich e Max Born, que previram os seguintes valores, respectivamente: $5\ K < T < 6\ K$, $T = 3{,}1\ K$, $T = 2{,}8\ K$, $T = 2{,}3\ K$ e $1{,}9\ K < T < 6{,}0\ K$! Todos estes autores obtiveram estes valores a partir de medidas e/ou cálculos teóricos, mas nenhum deles utilizou o estrondão. Isto significa que a descoberta de Penzias e Wilson não pode ser considerada uma evidência conclusiva a favor do estrondão. Muito pelo contrário! Afinal de contas, os modelos de um universo em equilíbrio dinâmico previram o valor desta temperatura antes de Gamow e com melhor precisão. E não apenas isto, já que Max Born também previu que o desvio para o vermelho cosmológico e a radiação cósmica de fundo deveriam estar relacionados com a radioastronomia, com esta previsão sendo feita onze anos antes da descoberta de Penzias e Wilson utilizando uma antena refletora no formato de chifre que havia sido construída para estudar emissões de rádio!

Nossa conclusão é que a descoberta da radiação cósmica de fundo (RCF) por Penzias e Wilson é um fator decisivo favorável a um universo em equilíbrio dinâmico, além de ser contrária aos modelos de um universo em expansão, tais como o modelo do estrondão (big bang) e o modelo do estado estacionário (steady-state).

Agradecimentos

Os autores agradecem ao Dr. Anthony L. Peratt por lhes indicar o artigo de Guillaume. A. K. T. A. agrade ao CNPq, FAPESP e FAEP pelo apoio financeiro nos últimos anos. Ele também agradece aos Profs. Eloi T. César, Thales C. Soares e Edson E. Reinehr, assim como ao Centro de Ciências da Universidade Federal de Juiz de Fora, UFJF, pelo convite para participar da 6ª Jornada de Divulgação Científica ocorrida em outubro de 2017, juntamente com o convite para publicar este trabalho.

Referências bibliográficas

Os artigos de A. K. T. Assis encontram-se disponíveis no formato PDF em www.ifi.unicamp.br/~assis.

ALPHER, R. A. e HERMAN, R. **Nature**, n. 162, p. 774-775, 1948.

ALPHER, R. A. e HERMAN, R. **Physical Review**, n. 75, p. 1089-1095, 1949.

ASSIS, A. K. T. **Apeiron**, n. 12, p. 10-16, 1992.

ASSIS, A. K. T. In: **Progress in New Cosmologies: Beyond the Big Bang**, ed. H. C. Arp e outros, Plenum, p. 153-167, 1993.

ASSIS, A. K. T. e NEVES, M. C. D. Tradução comentada do artigo de Guillaume de 1896 sobre a temperatura do espaço. **Caderno Brasileiro de Ensino de Física**, vol. 31, p. 654-570, 2014. Doi: <http://dx.doi.org/10.5007/2175-7941.2014v31n3p564>.

BORN, M. **Göttinger Nachrichten**, n. 7, p. 102-108, 1953.

BORN, M. **Proceedings of the Physical Society A**, n. 67, p. 193-194, 1954.

DE BROGLIE, L. **Comptes Rendues de l'Academie des Sciences de Paris**, n. 263, p. 589-592, 1966.

DICKE, R. H., PEEBLES, P. J. E., ROLL, P. G. e WILKINSON, D. T. **Astrophysical Journal**, n. 142, p. 414-419, 1965.

EDDINGTON, A. S. **The Internal Constitution of Stars**, Cambridge University Press, cap. 13, p. 371, 1926. Reimpressão de 1988.

FINLAY-FREUNDLICH, E. **Göttinger Nachrichten**, n. 7, p. 95-102, 1953.

FINLAY-FREUNDILICH, E. **Proceedings of the Philosophical Society A**, n. 67, p. 192-193, 1954.

FINLAY-FREUNDLICH, E. **Philosophical Magazine**, n. 45, p. 303-319, 1954.

GAMOW, G. **The Creation of the Universe**, Viking, edição revisada, 1961.

GUILLAUME, C.-E. **La Nature**, n. 24, série 2, p. 234, 1896. Tradução para a língua portuguesa em Assis e Neves, 2014.

HERZBERG, G. **Molecular Spectra and Molecular Structure**, Vol. I: Spectra of Diatomic Molecules.

MILLIKAN, R. A. e CAMERON, G. H. **Physical Review**, n. 31, p. 163-173, 1928.

MILLIKAN, R. A. e CAMERON, G. H. **Physical Review**, n. 31, p. 921-930, 1928.

NERNST, W. **Journal of the Franklin Institute**, n. 207, p. 135-142, 1928.

NERNST, W. **Zeitschrift für Physik**, n. 106, p. 633-661, 1937. Tradução para a língua inglesa em Nernst, 1995.

NERNST, W. **Annalen der Physik**, n. 32, p. 44-48, 1938. Tradução para a língua inglesa em Nernst, 1995.

NERNST, W. **Apeiron**, n. 2, p. 58-71. Tradução de P. Huber e outros, 1995.

NERNST, W. **Apeiron**, n. 2, p. 86-87. Tradução de G. Moesle, 1995.

PENZIAS, A. A. In: **Cosmology, Fusion & Other Matters**, F. Reines (ed.), Colorado Associated University Press, p. 29-47, 1972.

PENZIAS, A. A. e WILSON, R. W. **Astrophysical Journal**, n. 142, p. 419-421, 1965.

REGENER, E. **Zeitschrift für Physik**, n. 80, p. 666-669, 1933. Tradução para a língua inglesa em Regener, 1995.

REGENER, E. **Apeiron**, n. 2, p. 85-86. Tradução de G. Moesle, 1995.

ROSSI, B. **Cosmic Rays**, McGraw-Hill, cap. 1, p. 1, 1964.

SCIAMA, D. W. **Modern Cosmology**, Cambridge University Press, 1971.

SOARES, D. S. L. **A tradução de Big Bang**, 2002. Disponível em: <http://www.fisica.ufmg.br/~dsoares/>.

A Matemática e o seu ensino: uma perspectiva histórica

Maria Cristina Araújo de Oliveira[1]

Introdução

O presente texto considera como ponto de partida a Matemática enquanto uma produção do homem ao lidar com suas necessidades cotidianas desde a Pré-História. Orientando-se então na perspectiva da incorporação de saberes e práticas matemáticas que se estabilizam e carecem de serem transmitidas às futuras gerações, a Matemática é abordada como um saber a ensinar que se constitui historicamente.

De forma sintética o texto explora diferentes etapas da História da Matemática e do seu ensino, em locais e momentos que se conectam pelos fios condutores do tempo e da circulação de modelos e propostas. Assim, são abordadas as primeiras manifestações matemáticas que se tem registro; a relação da Matemática com o desenvolvimento da escrita babilônica; a constituição da Matemática como saber a ser ensinado no currículo da Grécia antiga; a escolarização da Matemática no Brasil Colônia; a admissão da Matemática como um saber de cultura geral no Brasil; a constituição da disciplina Matemática para o ensino secundário e o Movimento da Matemática Moderna. São pequenas histórias que representam uma trajetória no espaço-tempo.

---

1 Doutora em Educação: Currículo pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. Professora do Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora. Pesquisadora do Grupo de História da Educação Matemática no Brasil (Ghemat). E-mail: cristina.oliveira@ufjf.edu.br

Origem histórica da Matemática: contagem e escrita

A História da Matemática nos revela que o homem desde tempos ancestrais, já mesmo na Pré-História, por volta 6.000 anos antes da Era Comum[2], produziu, criou procedimentos, técnicas, ideias que numa visão abrangente poderiam ser consideradas como produções matemáticas. Conjectura-se com base em evidências arqueológicas, que as primeiras manifestações dessa produção matemática estiveram relacionadas à necessidade de contagem. Identificar o número de indivíduos de uma tribo, o número de animais ou o total da colheita foram necessidades primordiais que levaram ao desenvolvimento de conceitos que compõem a Matemática atual e que foram se constituindo ao longo da trajetória da humanidade.

Um dos achados arqueológicos que respalda essa conjectura é o Osso de Ishango.

Figura 1: Osso de Ishango. Fonte: Wikipédia.

Encontrado em 1960 na região de Ishango, na fronteira de Uganda com a República Democrática do Congo, teria cerca de 8.000 anos. Acreditou-se inicialmente que as marcas no osso seriam provenientes da contagem de seres ou objetos. Contudo, estudos recentes indicam que tais marcas estariam relacionadas a raciocínios mais sofisticados, envolvendo as operações, particularmente a multiplicação.

2 Acompanhando a tendência contemporânea na História das Ciências, utilizaremos Era Comum (E. C.) em lugar de Era Cristã.

Estudos da pesquisadora Denise Schmandt-Besserat publicados na década de 1990 defendem que a forma mais antiga de escrita teria origem em um dispositivo de contagem. (ROQUE, 2012). Em escavações no Oriente Médio, principalmente onde atualmente se localiza o Iraque, foram encontrados objetos de argila na forma de sólidos geométricos: cone, esfera, cilindro, pirâmide, ovoide. Esses objetos, denominados tokens, foram produzidos na Mesopotâmia por volta de 4.000 anos antes da Era Comum (a.E.C.) e tinham como finalidade indicar quantidade. Por exemplo, um ovoide representava uma jarra de óleo. Os tokens, representando diferentes alimentos e quantidades, eram armazenados em invólucros também de argila. Assim, para saber o que havia dentro dos invólucros, se marcava com o próprio token a figura na superfície do invólucro. A figura 2 apresenta os tokens e o invólucro que os reunia, com as marcas na superfície.

Figura 2: tokens e invólucro. Fonte: http://brewminate.com/the-origins-and-invention-of-writing/.

A percepção de que a representação simbólica do token na superfície era suficiente para se conhecer a quantidade e o alimento que ele representava estaria na origem da criação da escrita. O símbolo representaria o objeto com seu significado constituído.

A necessidade e o desenvolvimento de procedimentos de contagem e a criação da escrita estão entre os grandes feitos da humanidade. Estabeleceu-se desde tempos muito antigos uma forte ligação entre o desenvolvimento da humanidade e produção de ideias matemáticas.

Nos próximos tópicos analisaremos essa relação tomando a Matemática como um patrimônio cultural que foi transmitido desde tempos muito remotos, de geração em geração. Assim, nosso foco será a história do ensino de Matemática.

A Matemática e os primeiros currículos

Os registros históricos mostram que a geometria, como um dos ramos da Matemática, esteve presente no Egito antigo respondendo à necessidade de calcular a medida dos terrenos. Heródoto, historiador grego do século V a.E.C., no seu livro dedicado ao Egito faz menção à palavra geometria.

Pelos escritos de Heródoto, os egípcios relatavam que o rei partilhava a terra igualmente entre todos, contanto que lhe fosse atribuído um imposto na base dessa repartição. Como o Nilo, por vezes, cobria parte de um lote, era preciso medir que pedaço de terra o proprietário tinha perdido, com o fim de recalcular o pagamento devido.

Essa prática de agrimensura teria dado origem à geometria, um conhecimento depois importado pelos gregos. A palavra "geometria" pode ser traduzida, portanto, como "medida da terra".

A escola pitagórica que ocupou o século VI a.E.C., reunindo estudiosos e discípulos, institui um currículo: aritmética, geometria, astronomia e música. Essas quatro disciplinas compunham o que ficou conhecido como *quadrivium.* Na Idade Média (476 a 1453) se acrescentou ao currículo das instituições religiosas voltadas à Educação o *trivium*: gramática, lógica e retórica. Essas sete artes liberais vieram a ser consideradas como a bagagem cultural necessária de uma pessoa educada. Esse era o currículo básico das primeiras universidades europeias, criadas a partir de 1080.

A escolarização da Matemática no Brasil

A escolarização da Matemática no Brasil Colônia tem sua origem nas escolas militares criadas a partir do século XVII, tendo como objetivo a proteção do território e a construção de estradas para o transporte de mercadorias e produtos extraídos. (VALENTE, 1999).

No século XVI as armas de artilharia ganham alcance e mobilidade, o que leva a uma nova organização dos fortes de modo a permitir proteção para as guarnições, a possibilidade de contra-ataque, e para dificultar a aproximação do inimigo. Em 1699, foi criada a Aula de Fortificações no Rio de Janeiro, capital da Colônia. O objetivo era ensinar a desenhar fortificações.

A figura 3 mostra a Planta do Forte de São Pedro, na cidade de Salvador, na Bahia. Feita em 1799, a planta faz parte do documento manuscrito intitulado “Plano da fortificação que se acha na capitania da Bahia feito por ordem do senhor D. Fernando José de Portugal e Castro, Governador e Capitão Geral da mesma capitania.” É interessante observar os detalhes da utilização de noções de geometria na referida planta.

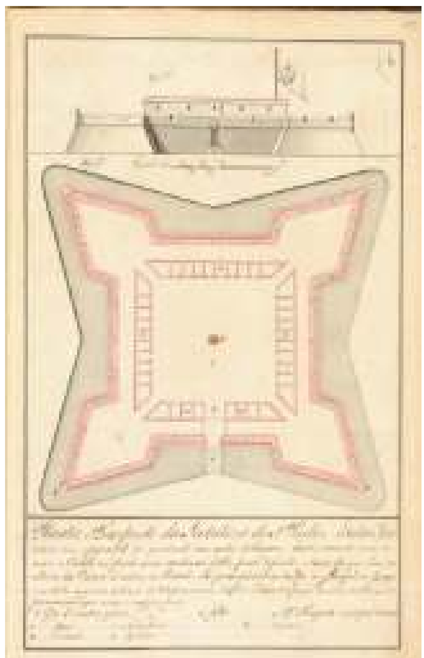


Figura 3: Planta Forte de São Pedro. Fonte: http://www.fortalezas.org.

No século XVIII, mais precisamente a partir de 1738, o curso *Aula de Artilharia e Fortificações,* com duração de cinco anos, tornou-se obrigatório para a nomeação e promoção de oficiais militares. O conteúdo matemático ministrado nas aulas compreendia a aritmética e a geometria prática. O professor José Fernandes Pinto Alpoim foi o responsável pelo curso desde sua criação até 1765, ano de sua morte.

Alpoim, acumulando experiência pedagógica desde Portugal, escreveu dois livros que se tornariam os primeiros livros didáticos escritos no Brasil: em 1744 o *Exame de Artilheiros* e *Exame de Bombeiros* em 1748. Ambos os livros se estruturam por meio de perguntas e respostas. A figura 4 apresenta um extrato do livro exemplificando a exploração da operação de soma na obra.

P.12. *Que é somar?*
R. *Somar é uma operação pela qual tendo junto muitos números conhecidos em uma soma, se conhece o valor da soma que não era conhecida.*
P.13. *Como se faz?*
R. *Facilmente sabendo as regras gerais.*
P.14. *Quais são?*
R. *São: devem-se dispor os números dados de tal sorte que os primeiros caracteres de uns fiquem debaixo dos primeiros caracteres dos outros, a saber: as unidades debaixo das unidades, as dezenas debaixo das dezenas, as centenas debaixo das centenas etc. e começando pela parte direita se vão ajuntando os caracteres do primeiro lugar e passando a soma a número grande, se passam para o lugar seguinte em que valem mais.*
Exemplo.
15. *Sejam as duas somas ou séries quatrocentos trinta e dous 432 e duzentos quarenta e cinco 245, de que se quer saber o valor: dispondo-se, como fica dito, estas 432 duas*

Figura 4: Extrato do livro Exame de Artilheiros. Fonte: Valente, 1999, p. 49.

A geometria e a aritmética se constituiriam as primeiras disciplinas relacionadas à Matemática a integrarem a escola ainda nos tempos coloniais.

Relativamente ao ensino de geometria, uma referência nacional é o livro “Primeiras Noções de Geometria Prática”, de Olavo Freire. A obra, publicada em 1894, foi o primeiro livro didático para o ensino de geometria no primário em tempos republicanos. A ênfase nas construções geométricas com régua e compasso trouxe o caráter inovador ao texto. As poucas obras destinadas ao ensino de geometria em tempos anteriores traziam um vínculo forte entre a geometria e os traçados de figuras geométricas, porém para serem feitos à mão livre e não com instrumentos geométricos (régua e compasso), como propõe Freire.

Pouco se sabe sobre o professor carioca Olavo Freire. Ele é considerado um dos autores de livros didáticos que contribuiu para a eficácia da Editora Francisco Alves, fundamental nas publicações didáticas na cidade do Rio de Janeiro.

Do século XIX até as primeiras décadas do XX a Matemática escolar era ensinada/estudada por meio de disciplinas que abordavam os diferentes ramos dessa ciência. Assim, as disciplinas de aritmética, geometria, desenho, álgebra, trigonometria compunham o currículo, e os livros didáticos apresentavam tais conteúdos também de maneira isolada. Além disso, os livros de aritmética, geometria, álgebra ou trigonometria reuniam o conteúdo que seria estudado ao longo de praticamente toda a trajetória escolar do aluno. Ou seja, tais livros não se destinavam a uma série ou ano específico da escolaridade, poderiam acompanhar toda a formação.

A disciplina Matemática

Um fato historicamente importante é a criação da disciplina Matemática como consequência de um movimento internacional de renovação do ensino ocorrido no início do século XX, pelo qual se propôs, entre outras recomendações, a unidade da Matemática escolar, reunindo os saberes de aritmética, geometria, álgebra, trigonometria. Algumas outras propostas eram a introdução em idade jovem de noções básicas de quantidades variáveis e de dependência funcional; a reorientação dos métodos de ensino no sentido da intuição e das aplicações; o uso da experimentação no ensino de Matemática.

No Brasil, as propostas mencionadas anteriormente foram apropriadas e institucionalizadas a partir da década de 1930, com o início da Segunda República, período em que se legitima a seriação na educação básica e a exigência da conclusão do ensino secundário para o acesso ao superior.

Um livro didático, publicado em 1929, traduz as apropriações de seu autor, o professor Euclides Roxo, catedrático do Colégio Pedro II, em relação às discussões internacionais veiculadas desde a criação do ICMI (Comissão Internacional de Instrução Matemática), em 1908, durante a realização do IV congresso da IMU (União Matemática Internacional). A introdução precoce, no o primeiro ano do ensino secundário, da noção de função é uma das inovações contidas na obra, que traz um capítulo dedicado ao uso de gráficos e a disposição tabular de dados numéricos obtidos pela relação de dependência entre variáveis.

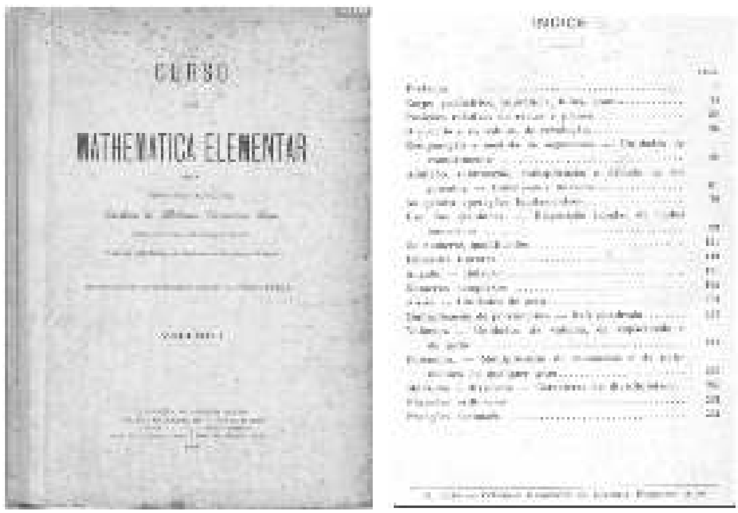


Figura 5: Extratos do livro Curso de Mathematica Elementar. Fonte: CD – Rom A Matemática do Ginásio - livros didáticos e as Reformas Campos e Capanema.

Com a Reforma educacional promovida sob a gestão de Francisco Campos, a Matemática, reunindo os diferentes ramos – aritmética, geometria, álgebra, trigonometria, passou a ser uma disciplina escolar. O professor Euclides Roxo foi o responsável pelas propostas relativas à Matemática no âmbito da Reforma.

A Matemática Moderna no Brasil

O termo Matemática Moderna está associado a um movimento internacional de renovação do ensino da Matemática escolar que se disseminou durante as décadas de 1950 a 1960. O principal objetivo do Movimento da Matemática Moderna (MMM) era modernizar o ensino de Matemática tanto em relação a conteúdos, quanto a métodos. Propunha-se aproximar conteúdos do ensino secundário à Matemática ensinada no superior. Nessa perspectiva elementos da teoria de conjuntos, das estruturas algébricas e topológicas foram introduzidos no ensino primário e secundário (atuais ensino fundamental e médio). As principais propostas para conteúdos e métodos para o ensino de Matemática defendidas no MMM estão sintetizadas abaixo:

Conteúdos:

- Ênfase na unidade da Matemática, por meio das estruturas.
- Valorização da álgebra e das geometrias vetorial e das transformações no lugar da geometria dos triângulos.
- Introdução precoce da linguagem de conjuntos e valorização da simbologia matemática.

Métodos:

- Valorização da compreensão face à mecanização.
- Importância dada à aprendizagem por descoberta.
- Percurso da intuição ao rigor.
- Valorização do trabalho experimental.

No caso brasileiro, os contatos de professores secundários com as iniciativas norte-americanas de modernização do ensino de matemática foram incentivados pelo Instituto Brasileiro de Educação, Ciência e Cultura (IBECC). No âmbito desse acordo, os professores Lafayette de Moraes e Osvaldo Sangiorgi foram enviados aos Estados Unidos para um estágio, no período de junho a agosto de 1960, sendo que Osvaldo Sangiorgi a Kansas e Lafayette de Moraes a Nova York. Em outubro de 1961 foi criado o Grupo de Estudos do Ensino de Matemática (G.E.E.M.), cujo presidente foi Osvaldo Sangiorgi. Esse grupo teve importância fundamental na disseminação de cursos, publicações de Matemática Moderna em todo Brasil. Também serviu de referência para o surgimento de outros grupos similares em diferentes estados brasileiros: GEEMPA no Rio Grande do Sul, NEDEM no Paraná, entre outros.

A partir desse movimento, a noção de função assumiu uma abordagem conjuntista respondendo à defesa da unidade matemática proposta. Com isso a representação por meio de diagramas passou a ocupar grande parte do tempo e das atividades dedicadas ao ensino de função, enquanto o enfoque da relação de dependência entre as variáveis deixou de ser enfatizado. (OLIVEIRA, 2009).

Referências bibliográficas

OLIVEIRA, A. S. A abordagem do conceito de função em livros didáticos ginasiais: uma análise em tempos modernos (décadas de 1960 a 1970). **Dissertação** (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Bandeirante de São Paulo, 2009.

ROQUE, T. **História da matemática: uma visão crítica desfazendo mitos e lendas.** Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

VALENTE, W. R. **Uma história da matemática escolar no Brasil, 1730-1930.** São Paulo: Editora Annablume/Fapesp, 1999.

Tecnologias na sala de aula: e agora?

Marco Antônio Escher[1]

Introdução

Pretendo, neste texto, suscitar algumas discussões sobre a utilização de tecnologias nas aulas de matemática, tendo como referência estudos próprios e de outros autores. Por meio de exemplos e situações concretas, como o uso de aplicativos para *smartphones* e computadores e também de calculadoras, vamos buscar compreender a influência que a tecnologia pode exercer sobre práticas já perpetuadas e outras que possam ser desenvolvidas a partir de seu uso. No centro da discussão, estão os processos de ensino e aprendizagem da matemática. No entanto, é possível estender sua compreensão para outras áreas e campos de conhecimento.

Há tempos já se discute sobre a utilização ou não de tecnologias em sala de aula. Depois da popularização comercial e diminuição de preços de calculadoras e, sobretudo, dos computadores, a discussão ganhou mais força e terreno, abrindo espaço para a manifestação de posicionamentos favoráveis e contrários ao seu emprego.

No time dos opositores, vários são os motivos alegados para que sua utilização não se efetive. Entre eles, o despreparo de professores, a falta de condições técnicas das escolas, as influências negativas no processo de ensino e aprendizagem e até atribuem, ao emprego da tecnologia, a responsabilidade pelo fracasso do desempenho dos alunos, na matemática.

1 Professor Adjunto da Universidade Federal de Juiz de Fora/MG. Atua no Departamento de Matemática – ICE. Possui Mestrado e Doutorado em Educação Matemática pela UNESP/Rio Claro - SP.

Entretanto, ficamos com as perguntas: será que a escola – e quando me refiro a ela compreendo um sistema complexo e gigantesco de um país continental como o Brasil – experimentou, efetivamente, o uso do que identificamos hoje como novas tecnologias? Será que a calculadora esteve presente na sala de aula, nas últimas décadas? E os computadores? Que tipo de tecnologia a escola dispõe em seu cotidiano? Será que devemos incentivar a utilização de meios tecnológicos digitais no processo de ensino e aprendizagem da matemática?

Questões como essas foram apresentadas na palestra ministrada por mim durante a 6ª Jornada de Divulgação Científica, que aconteceu no Centro de Ciências - UFJF, no período de 24 a 29 de outubro de 2017, assim como uma discussão sobre a utilização das tecnologias, de modo geral, e ainda, a proposição de algumas atividades envolvendo matemática e tecnologias digitais.

Esclareço aos leitores que as ideias aqui contidas fazem parte de estudo, observação e prática própria desenvolvida, há alguns anos, em sala de aula, do ensino básico ao superior e também ao ministrar cursos para professores que ensinam matemática na escola básica, assim como também compreendem minha formação acadêmica e pesquisas na área.

Trajetória com as tecnologias digitais

Embora até aqui venha tecendo comentários que parecem favoráveis à utilização de tecnologias digitais em sala de aula, nem sempre fui um defensor do emprego de computadores na escola. Aliás, em finais da década de 1980, era contra a sua utilização, questionando, entre outros motivos, o seu preço abusivo como impeditivo para o uso abrangente da ferramenta, dentro da escola. Argumentava: "Isso não será um instrumento para os filhos dos trabalhadores!". Soma-se ainda o fato de que as máquinas antigas não possuíam muitos atrativos, eram grandes, caras, pesadas, sem recursos como monitores coloridos, som e *mouse* para ajudar nas atividades.

Claro que essa configuração mudou rapidamente, e em meados dos anos 1990, os computadores já estavam muito mais avançados e atrativos. Abstenho-me aqui de comentar como eles são nos dias de hoje, afinal, todos sabem!

Mas retornando a repulsa inicial à utilização dos computadores em sala de aula, em 1989, durante uma disciplina de graduação, ministrada pela professora Mirian Godoy (UNESP/RC), fui apresentado ao programa LOGO, uma linguagem de programação desenvolvida em meados dos anos 1960, no Massachusetts Instituto de Tecnologia, nos EUA, por Seymour Papert e colaboradores, com o objetivo de utilizá-la para fins educacionais.

Eis que depois da utilização desde software, mesmo usando computadores lentos e sem muita atratividade, pude testemunhar a força de seu potencial. Fui solicitado a desenvolver uma programação que resultasse na exibição, na tela do computador, de uma circunferência circunscrita a um polígono, a partir da informação sobre o número de lados e o raio da circunferência. A atividade hoje teria uma solução rápida utilizando o software Geogebra, por exemplo, no entanto, naquela época, noites e noites foram necessárias para que o resultado se apresentasse. O trabalho árduo foi estimulante, alterando completamente minha visão sobre os computadores e a sua presença na sala de aula.

A experiência resultou no início da elaboração de atividades envolvendo computadores e conteúdos de matemática trabalhados em sala de aula e no estudo da sua potencialidade na escola e nas relações com a sociedade.

Já a partir do ano 2000, pude estar presente em três cenários muito propícios ao seu desenvolvimento, dos quais um permanece até hoje: a sala de aula. Atuando como professor, inicialmente em uma universidade privada do interior do estado de São Paulo, e depois em universidade federais do Mato Grosso do Sul e de Minas Gerais, tenho trabalhado, principalmente, com disciplinas voltadas aos cursos de Licenciatura em Matemática, ministrando disciplinas que discutem a prática do professor em sala de aula e a utilização das novas tecnologias.

O segundo cenário é o projeto Teia do Saber, um programa de Formação Continuada implementado no estado de São Paulo, no qual pude atuar nos anos de 2008 e 2009, trabalhando com professores que ministravam matemática em diversas cidades do estado de São Paulo. Cada módulo consistia de encontros presenciais aos sábados, nas dependências da faculdade em que trabalhava, durante um semestre. Nesse tempo, atividades, discussões e estudos eram estimulados junto aos grupos de professores participantes. Em vários momentos, foram trabalhados textos e atividades envolvendo a utilização da tecnologia na sala de aula.

A terceira oportunidade foi minha participação no projeto Centro de Educação Continuada em Educação Matemática, Científica e Ambiental (CECEMCA), criado a partir da aprovação de um dos projetos submetidos pela UNESP ao edital MEC SEIF 01/2003. Nele, atuei nos anos de 2007 a 2009 e pude ter contato com professores de matemática, da rede pública, dos estados de São Paulo, Amazonas, Mato Grosso, Mato Grosso do Sul e Piauí. Os cursos ocorriam no período de 15 dias. Cerca de 20 a 30 professores se encontravam, durante 8 horas, para intensas atividades e discussões.

Em todos esses momentos, que compõem um período de 15 anos, aproximadamente, indagava alunos/professores sobre a utilização das novas tecnologias em sala de aula, principalmente o uso de calculadoras e computadores. Sempre que oportuno lançava mão de uma enquete que consistia em colher respostas para a seguinte pergunta:

Você permitiria o uso da calculadora em sala de aula?
( ) a) desde as séries inicias do Ensino Fundamental
( ) b) a partir do 6º ano do Ensino Fundamental
( ) c) somente no Ensino Médio
( ) d) somente no Ensino Superior
( ) e) em nenhum ambiente escolar

O questionamento era feito em dois momentos: no início e no final dos trabalhos/curso/semestre, sendo que, durante os encontros, eram trabalhadas questões e atividades relacionadas ao uso de tais tecnologias em sala de aula, a fim de dar embasamento teórico e prático ao que estava sendo discutido.

De maneira geral, e sem a necessidade de entrarmos em detalhes numéricos aqui, o que pude constatar em todo esse tempo foi que:

a) durante cada intervenção, as respostas iniciais predominavam nos itens c, d e e da enquete apresentada, alterando um pouco o quadro quando se retornava a mesma pergunta, ao final da disciplina, então, algumas respostas migravam para as respostas a, b e c;

b) essa migração também foi notada ao longo do tempo, principalmente nos últimos anos, embora o aparecimento dos *smartphones* tenha sido um evento qualitativamente diferente, e que será tratado mais adiante.

Logo em seguida à colocação da pergunta inicial, outra questão polêmica era enunciada:

> “Bom, por mim, os bebês já nasceriam com uma calculadora acoplada ao braço”

A questão, claro, surtia muita reprovação, dada a crença que se perpetua nos mecanismos de memorização e execução de exercícios em larga escala, como as cópias das famosas “tabuadas” da multiplicação de 2 a 9.

No entanto, sabemos que a questão presente é mais complexa. Como manter os mecanismos de poder que o professor dispõe em sua aula, se retirarmos essas práticas, como as cópias de tabuadas, chamadas orais e outros componentes que possuem justificativas mais culturais do que pedagógicos e que ainda estão presentes nas aulas de matemática?

Embora a provocação sempre tenha sido feita desde o início dos anos 2000, os avanços tecnológicos se incumbiram por resolver a questão. Os celulares (*smartphones)* hoje, mais do que aparelhos de comunicação, são verdadeiros computadores pessoais portáteis e fazem parte do cotidiano desde os primeiros anos de vida das novas gerações. Em todos os modelos, dos mais simples aos mais avançados, há uma calculadora pré-instalada, ampliando as considerações sobre o seu uso em sala de aula.

A partir da experiência e do estudo, suscito aqui algumas discussões e proponho atividades que permitem ao leitor outra perspectiva e forma de pensar sobre a utilização de computadores e calculadoras nas aulas de matemática.

Tecnologia e sociedade

Um bom início para essa abordagem poderia ser a seguinte questão: o que é tecnologia? E, mais precisamente no foco da discussão, o que é usar uma tecnologia na sala de aula?

Creio que alguns dos leitores desse artigo podem já ter manuseado, visto, ou mesmo saber da existência de objetos como estes apresentados a seguir:

Você conhece?

Imagem A.

Imagem B.

As imagens A e B retratam uma caneta tinteiro. A primeira (A), usando uma pena, que ao ser bem escolhida, funcionava como o que hoje conhecemos como caneta esferográfica. A segunda (B) é uma caneta tinteiro, na qual sua "pena" ou ponta era feita de metal. Para o uso, ambas necessitavam ser mergulhadas em um pote de tinta, e então poder-se-ia escrever no papel. Imaginem a sujeira! Não é difícil ainda encontrarmos algumas carteiras de escola com um buraco feito na parte superior do tampo, para que o pote de tinta pudesse ser encaixado.

A utilização das primeiras penas data de anos próximos a 1800. Antes disso, há registros de uso de pontas de bambus. As primeiras canetas tinteiro com ponta de metal surgiram em 1884 e chegaram a custar US$ 100, em 1938. Hoje elas são utilizadas em documentos específicos ou cartões personalizados sendo substituídas pelas esferográficas.

Veja que o objeto que era usado para escrever, e que esteve presente dentro da escola, é um exemplo de tecnologia. Hoje em dia, podemos comprar uma caneta esferográfica por menos de R$ 2 e uma tinteiro de boa qualidade pode custar mais de R$ 1.500. Essas variações comerciais são próprias do movimento do mercado e estão relacionadas a valores intrínsecos de produção e consumo, em maior ou menor escala, com potencial de atratividade e interesse por parte do consumidor.

Vejamos outro exemplo:

Imagem C.

Imagem D.

A imagem C retrata um projetor de slides, aparelhos ótico e mecânico e a imagem D os slides ou diapositivos, que emoldurados nos envelopes eram colocados dentro do projetor. Os slides são feitos com uma técnica utilizando o negativo das fotos tiradas com máquinas fotográficas mecânicas tipo Reflex. A luz passa pelo slide (que tem cerca de 2 cm x 2 cm) e projeta uma imagem, na parede de salas escurecidas, com tamanhos bem maiores.

Muitos professores utilizavam este aparelho em suas aulas, projetando imagens em tamanho suficiente para que os alunos pudessem ver de suas carteiras, como recurso visual para as atividades sobre o assunto estudado. Hoje temos projetores acoplados a computadores que fazem muito mais do que isso.

Chamo atenção aqui para o fato de que, seja a partir do papel, giz ou caneta, ou mesmo aparelhos eletrônicos, a tecnologia sempre esteve presente dentro da sala de aula.

Relaciono abaixo alguns exemplos de recursos mais utilizados nas aulas de matemática, sem me importar com a ordem (cronológica), utilização ou tipos.

Vejamos:

Ábaco	Giz	Projetor multimídia
Apontador de lápis	Internet	Redes (sites, blogs, Facebook, WhatsApp)
Borracha	Lápis	Réguas
Caderno	Livro didático	Retroprojetor
Calculadora	Lousa	Softwares
Caneta esferográfica	Lousa digital	Tabelas
Caneta tinteiro	Mimeógrafo	TV
Celular	Pena	Vídeos
Computador	Projetor de slide	

Apenas num “brainstorming”, 26 objetos foram relacionados. Com certeza, poderíamos acrescentar outros, mas considero o bastante para estabelecermos algumas comparações e continuarmos a nossa exposição. Vários autores nos ajudam a entender esse processo de acesso e utilização da tecnologia na sociedade. Segundo Castells “a sociedade não pode ser entendida sem as suas ferramentas tecnológicas...tecnologia é a sociedade” (Castells, 1999).

Somos, sem dúvida, seres oriundos de uma época na qual a presença da tecnologia na organização das práticas sociais, desde as ações mais elementares, como ligar e desligar aparelhos eletrônicos até as mais complexas, como a utilização de softwares específicos e computadores de última geração, é evidente. As mudanças têm agido como uma espécie de epidemia (Escher, 2011, p. 20), permeando todas as esferas da atividade humana. Ações consideradas complexas passam a ser acessíveis em relativamente pouco tempo. Castells denomina por Tecnologia o “uso de conhecimentos científicos para especificar as vias de se fazerem as coisas de uma maneira reproduzível” (CASTELLS, 1999, p.67).

Por conta dessa rapidez, outra característica interessante a se observar é a forma como as pessoas se “acostumam” com ela. Não é difícil encontrar alguém que, por volta do ano de 2000, solicitava a terceiros para realizar alguma tarefa em seu computador e que hoje, operando algum *software* computacional ou mesmo uma máquina, executa-a por si só. O que parecia ter relativo nível de complexidade, com o conjunto de atividades já exercidas pelo humano, homogeneíza-se, tornando-se menos complexa.

Andando por aí...

Mudando um pouco o foco de nossa conversa, compartilho uma situação que aconteceu comigo. No dia 28/10/2014, estava dirigindo um carro, em Belo Horizonte (MG), quando fui abordado, em um semáforo, por um trabalhador que entregava propagandas. Ele me ofereceu o exemplar de um jornal de circulação gratuita. Nele, uma notícia despertou a minha atenção. Ela dizia:


Dê adeus aos problemas de matemática

App. Com ajuda da câmera do celular, Photo Math resolve equações simples

Num primeiro momento pensei: “Nossa, vários professores estarão desempregados!”. Afinal, um aplicativo para celulares prometia resolver os problemas com a matemática. Continuando a leitura do artigo, vi que de acordo com a desenvolvedora, “a ideia é que os pais percebam que o *smartphone* não precisa ser um problema para a educação, e que eles, assim como alunos e professores, aprendam a fazer bom uso das ferramentas”. Isso me pareceu mais interessante, e fui então baixar e aprender a usar o novo aplicativo. Seu nome é *Photomath*, e longe de querer fazer propaganda dele, essa citação serve apenas como exemplo para nossa discussão.

Claro que, tão logo cheguei em minha casa, instalei o aplicativo. Naquela época, ele resolvia operações fundamentais e algumas equações do 1º grau e reconhecia o exercício se ele estivesse impresso e com fontes simples, usadas nos editores de texto e livros didáticos. Mas eu sempre dizia às pessoas, quando comentava sobre o assunto, que era uma questão de tempo, e logo teríamos um aplicativo resolvendo quase todo tipo de operação matemática e reconhecendo a letra manuscrita.

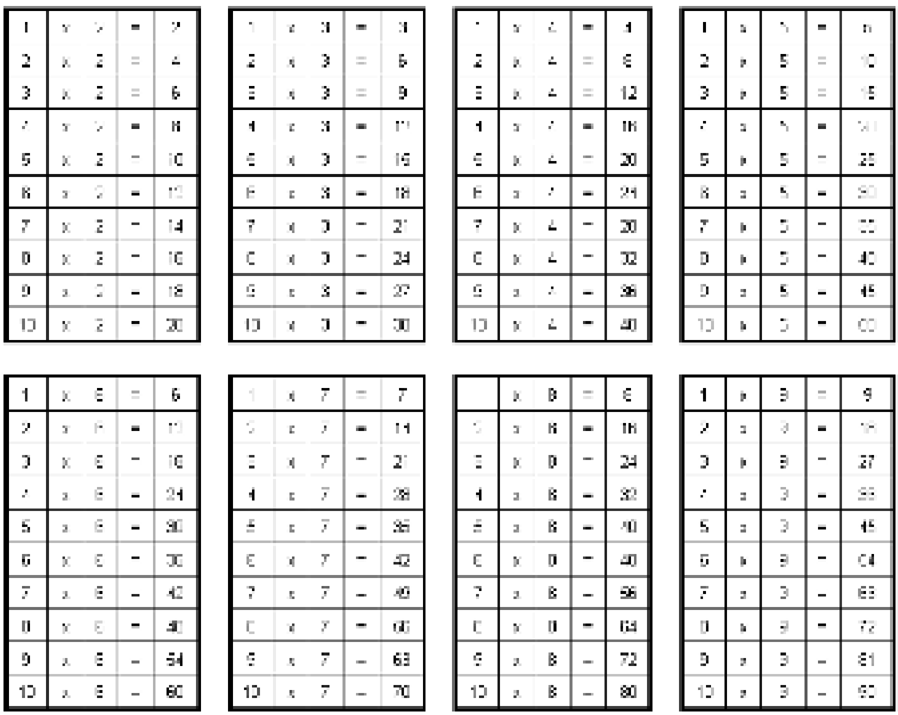
Quando perguntava sobre quem conhecia tal aplicativo, tanto em sala de aula quanto nos cursos que ministrava a reposta quase sempre era “negativa”.

Bem, as questões de potencialidade do referido aplicativo, assim como a sua popularidade, deixarei para um segundo momento. Aproveitem e instalem-no!

As velhas práticas em sala de aula...

Ocorrem-me aqui mais algumas questões para a nossa reflexão: qual a minha predisposição para o novo? Para aceitar ou não aceitar o que me é apresentado diariamente em minha formação/profissão? O quanto as tecnologias digitais, mais precisamente a calculadora, são responsáveis, efetivamente, para o fracasso do ensino e aprendizagem da matemática em sala de aula? Tudo isso contextualizado, como foi enunciado no início deste artigo, no contexto próprio do sistema escolar brasileiro.

Algumas práticas em sala de aula vão se perpetuando. Vejamos uma delas, a famosa "tabuada". A seguir, mostro um exemplo de sua apresentação em alguns livros, e como, normalmente, os professores solicitam para que seus alunos apresentem cópias dessa configuração.



1	x	2	=	2
2	x	2	=	4
3	x	2	=	6
4	x	2	=	8
5	x	2	=	10
6	x	2	=	12
7	x	2	=	14
8	x	2	=	16
9	x	2	=	18
10	x	2	=	20

1	x	3	=	3
2	x	3	=	6
3	x	3	=	9
4	x	3	=	12
5	x	3	=	15
6	x	3	=	18
7	x	3	=	21
8	x	3	=	24
9	x	3	=	27
10	x	3	=	30

1	x	4	=	4
2	x	4	=	8
3	x	4	=	12
4	x	4	=	16
5	x	4	=	20
6	x	4	=	24
7	x	4	=	28
8	x	4	=	32
9	x	4	=	36
10	x	4	=	40

1	x	5	=	5
2	x	5	=	10
3	x	5	=	15
4	x	5	=	20
5	x	5	=	25
6	x	5	=	30
7	x	5	=	35
8	x	5	=	40
9	x	5	=	45
10	x	5	=	50

1	x	6	=	6
2	x	6	=	12
3	x	6	=	18
4	x	6	=	24
5	x	6	=	30
6	x	6	=	36
7	x	6	=	42
8	x	6	=	48
9	x	6	=	54
10	x	6	=	60

1	x	7	=	7
2	x	7	=	14
3	x	7	=	21
4	x	7	=	28
5	x	7	=	35
6	x	7	=	42
7	x	7	=	49
8	x	7	=	56
9	x	7	=	63
10	x	7	=	70

	x	8	=	8
2	x	8	=	16
3	x	8	=	24
4	x	8	=	32
5	x	8	=	40
6	x	8	=	48
7	x	8	=	56
8	x	8	=	64
9	x	8	=	72
10	x	8	=	80

1	x	9	=	9
2	x	9	=	18
3	x	9	=	27
4	x	9	=	36
5	x	9	=	45
6	x	9	=	54
7	x	9	=	63
8	x	9	=	72
9	x	9	=	81
10	x	9	=	90

Tabuada do 2 ao 9.

Lembro-me de minha professora do 1º ano do Ensino Fundamental (chamado na época de 1º Grau) solicitando cópias e cópias deste modelo, em caderno brochura. Assim como não me saem da memória as técnicas utilizadas para que a quantidade de cópias fosse alcançada com um mínimo de esforço. Será que fui só eu?

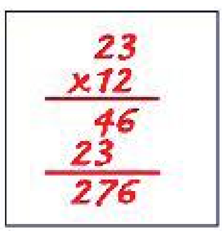
Usávamos artifícios para preencher as colunas partindo da vertical, e somando as quantidades nos resultados, ou seja, numerávamos de 1 a 10, colocávamos os sinais de multiplicação, depois o número correspondente da tabuada a ser respondida, todos os sinais de igual e só depois, cada resultado sendo somado. Será que deu pra entender? Mais alguém fazia isso?

Ou seja, não praticávamos as multiplicações, e sim, uma técnica de preenchimento das colunas. Ah...algumas tabuadas sempre eram mais fáceis, como a do 2, do 5 e a do 9, que tinha uma técnica especial. Alguém sabe? Vocês faziam algo parecido?

Sempre me perguntei: O que é aprender a multiplicação? Será que assim se aprende a multiplicar quantidades? Sei da profundidade dessa discussão e que não a farei aqui neste texto, mas deixo para que pensemos.

E os algoritmos

Colaborando com a polêmica, aparecem os algoritmos. Segundo o site Wikipédia[2], um algoritmo é "uma sequência finita de instruções bem definidas e não ambíguas, cada uma das quais devendo ser executadas mecânica ou eletronicamente em um intervalo de tempo finito e com uma quantidade de esforço finita". Ou seja, algumas práticas usadas para se resolver uma operação, como 23 x 12, não passam da execução de um algoritmo. Um exemplo na multiplicação com dois algarismos.



Outro exemplo: vejamos uma prática de sala de aula que tem desaparecido do cotidiano escolar. Trata-se do algoritmo para extração da raiz quadrada. Vejam a seguir a aplicação do algoritmo para o cálculo da raiz quadrada do número 127599:

2 https://pt.wikipedia.org/wiki/Algoritmo, acesso em 10/01/2018.

```
12.75.99,00|357,2
   -9      | 65   707   7142
   375     | x5   x7    x2
  -325     |325  4949  14284
   5099    |
  -4949    |
   15000   |
   14284
     716
```

O algoritmo da raiz quadrada possui tantas instruções que a possibilidade de errar o resultado procurado é grande. Cada uma das instruções é baseada em conhecimentos de outros conteúdos, e não do próprio cálculo da raiz quadrada. Por sorte, alguns procedimentos como o cálculo aproximado ou o próprio uso da calculadora fizeram com que essa prática deixasse de estar presente no cotidiano da sala de aula.

Situações cotidianas

O outro lado da discussão. Muito se fala que o uso intensivo das calculadoras pode trazer ao usuário uma dependência, algo como se fosse uma droga, que se torna imprescindível. Indiscutivelmente, a dependência de qualquer coisa não parece ser uma conduta sadia, mas com relação a esta prática, temos algumas ressalvas.

Novamente lembro que existem poucas escolas e professores que fazem do uso da calculadora uma prática diária, ou seja, nos deparamos com raras situações nas quais o aluno é estimulado ao emprego contínuo dessa tecnologia.

Acompanhe o relato de uma situação corriqueira, que embora não tenha ocorrido na sala de aula, evidencia que o simples fato de ter o acesso à calculadora, não é garantia de resultado positivo.

A história é verídica e aconteceu por volta de 2002. Vamos lá:

> Eu e mais duas professoras estávamos pagando uma conta em uma lanchonete de uma cidade do interior paulista. A "compra" deu R$ 24,50 e como éramos três combinamos de dividir a despesa.
> Uma delas precisou pagar sua parte, R$ 8, em cheque, e eu dei uma nota de R$ 10 para pagar a minha. Como a pessoa do cheque queria ter dinheiro nas mãos, fez um cheque de R$ 18 e ficou com a nota de R$ 10 que eu havia dado (neste momento vi que saí perdendo). A terceira pessoa, mais "abonada", só tinha uma nota de R$ 50,00.
> Entregamos então o cheque de R$ 18 e a nota de R$ 50 para a atendente para que ela desse o troco para a senhora "abonada".
> Embora a atendente tivesse uma calculadora, ela não conseguia entender o que precisava fazer. Ainda chegou a realizar a conta R$ 24,50 – R$ 18 = R$ 6,50. Porém, não conseguia acreditar que ela tinha de subtrair R$ 6,50 de R$ 50, para dar o troco de R$ 43,50 para a Sra. "abonada".
> Depois de alguns segundos com expressão de não compreensão, a atendente deu o troco correto. No entanto, ficamos sem saber se ela conseguiu compreender a situação ou se teria sido apenas induzida por nós.

Com certeza você pode ter se deparado com alguma situação semelhante. O que presenciamos é que o simples fato de ter acesso à calculadora não foi suficiente para que a operadora de caixa tivesse a certeza do procedimento a ser desenvolvido, naquela situação. Ou seja, como temos afirmado até aqui, não basta o acesso, e sim propor atividades que levem os alunos a identificar como resolver as situações-problema diárias.

Novas tecnologias = uma nova prática do professor em sala de aula

Acredito e defendo, após todo o exposto, que o surgimento de novas tecnologias, e principalmente pela inserção dos *smartphones* no cotidiano das pessoas, que as práticas escolares precisam acompanhar esse cenário de mudanças. Não se trata de alterações conceituais, pelo menos não por enquanto, mas sim em algumas práticas e solicitações de tarefas e exercícios aos alunos.

Algumas delas, às vezes, são apenas paliativas, como por exemplo, quando o professor solicita que os alunos entreguem uma lista de exercícios feitos em casa, mas, dizem alguns, não aceitam apenas os resultados, para que não utilizem calculadoras ou computadores.

Enquanto isso, aquele mesmo aplicativo apresentado anteriormente neste texto, o *Photomath*, foi aperfeiçoado e proporcionou aos usuários uma lista ainda maior de operações matemáticas. Segundo informações de seu site, na internet, ele tem a potencialidade de resolver:

Adição / subtração Multiplicação / Divisão Equações irracionais Inequações Inequações racionais Inequações exponenciais e logarítmicas Equações e Inequações modulares Equações quadráticas	Equações 1º grau Equações Trigonométricas Fatoração de Frações algébricas Funções Logarítmicas e exponenciais Trigonometria Derivadas Integrais

E mais, para o desespero de alguns professores, além do resultado final, ele apresenta a execução do exercício, passo a passo, explicando qual a operação a ser aplicada em cada um deles. Lembra o que sugeri que iria acontecer? Pois é, aconteceu: escrevendo o enunciado do exercício com uma boa caligrafia, o aplicativo reconhece e resolve com os recursos relatados acima (resultados e procedimentos adotados).

O que pretendo afirmar com isso é que as famosas "listas de exercícios" têm de mudar. A exigência da realização da lista não deve se basear no fato de que o aluno não possa utilizar as novas tecnologias para executar a tarefa. É preciso assegurar que os tipos de exercícios propostos se alterem dando chance para novas discussões sobre a matemática envolvida nele. Há de se procurar uma situação problema que envolva várias fases. Então, o aluno poderá fazer conjecturas e interpretar resultados, e não apenas responder a operações mecânicas e diretas.

A respeito de novas formas de pensar sobre as práticas em sala de aula, Skovsmose, observa que

> Há diferentes aspectos envolvidos no processo de mudança de paradigma de exercícios para os cenários para investigação. Os padrões de comunicação podem mudar e abrir-se para novos tipos de cooperação e para novas formas de aprendizagem. [...] Em particular, estamos interessados na possibilidade de os alunos participarem ativamente do seu processo de aprendizado. Tanto o professor quanto os alunos podem ser acometidos por dúvidas quando chegam a trabalhar num cenário de investigação, sem a proteção de "regras" de funcionamento bem conhecidas do paradigma do exercício. Assim, deixar o paradigma do exercício significa também deixar uma zona de conforto e entrar numa zona de risco. Quais são os possíveis ganhos do trabalho numa zona de

> risco associada a um cenário para investigação? Vemos que isso está intimamente relacionado com o surgimento de novas possibilidades de envolvimento dos alunos, de padrões de comunicação diferentes e, consequentemente, novas qualidades de aprendizagem. (SKOVSMOSE, 2008, p. 58)

Outro *software* disponível na internet e que apresenta resoluções chamadas de “passo-a-passo” é o site www.wolframalpha.com. Por enquanto, basta que se digite o exercício a ser resolvido para que ele retorne uma série de saídas consideradas plausíveis sobre o assunto. Numa pequena janela, em sua página inicial, usando tecnologia baseada em inteligência artificial, basta escrever o que se deseja. Ele aceita uma sintaxe amigável semelhante a escrita usual.

Estes são alguns exemplos, outros surgirão e novas maneiras de apresentação também. No trabalho de Pires, 2016, outras potencialidades tanto do *Photomath* e do *WolframAlpha* e discussões sobre o uso de tecnologias podem ser conferidas e aprofundadas.

Abaixo, estão listados alguns *softwares* que podem ser usados em sala de aula de matemática. Todos são de fácil acesso na internet. Infelizmente alguns são comerciais, custando, ainda hoje, valores não acessíveis a todos:

Derive	Mathematica	Scientific Workplace
Geogebra	MatLab	Scilab
Maple	Octave	Winplot
MathCad	Reduce	wxMaxima

Ao leitor, espero que possa conhecê-los e assim identificar o que melhor atenda às suas demandas em sala de aula.

Propondo atividades

Baseado nas discussões anteriores, e partindo do pressuposto que algumas práticas necessitam ser alteradas, seguem sugestões de atividades que podem ser desenvolvidas na sala de aula. Não constituem um modelo ou padrão a ser seguido, mas servem como exemplo de atividades que, na maioria das vezes, não teriam sentido nenhum sem o uso de uma calculadora ou de um computador. Vamos a elas:

Atividade 1 – Maior e menor produto

Dispor os numerais 1, 2, 3, 4 e 5 de forma a obter o maior e o menor produto (sem repetir algarismos e utilizando todos eles).

□ □ □
x □ □

a) O maior produto é _____ x _____ = _______

b) O menor produto é _____ x _____ = _______

Essa atividade é uma de minhas prediletas. Simples, sem a necessidade de gastos ou preparos, mas com um potencial muito grande de exploração. A vasta quantidade de possibilidades de resultados faz com que as respostas procuradas não sejam encontradas de maneira fácil. E mais, há a necessidade de que as conjecturas sejam anotadas, pois não há a certeza de que a resposta procurada será encontrada nas primeiras tentativas. Além disso, percebemos que, inicialmente, elas são feitas de maneira aleatória, para depois concentrar-se em estratégias, como colocar algarismos menores ou maiores à esquerda.

Para completar a atividade, algumas perguntas podem ser inseridas, explorando outros conteúdos: Quantas opções eu tenho? Qual a estratégia a ser usada? Vejamos algumas respostas:

Menor produto					Maior produto				
1 2 3	x	4 5	=	5535	5 4 3	x	2 1	=	11403
1 2 4	x	3 5	=	4340	5 4 2	x	3 1	=	16802
1 2 5	x	3 4	=	4250	5 4 1	x	3 2	=	17312
1 3 4	x	2 5	=	3350	5 3 2	x	4 1	=	21812
1 3 5	x	2 4	=	3240	5 3 1	x	4 2	=	22302
1 4 5	x	2 3	=	3335	5 2 1	x	4 3	=	22403
2 3 4	x	1 5	=	3510	4 3 2	x	5 1	=	22032
2 4 5	x	1 3	=	3185	4 3 1	x	5 2	=	22412
3 4 5	x	2 1	=	7245	4 2 1	x	5 3	=	22313
3 1 5	x	2 5	=	7875	3 2 1	x	5 4	=	17334

As respostas procuradas na atividade, **3185** e **22412,** normalmente são encontradas depois de 8 a 10 tentativas, isso se, desde o início, os registros forem feitos em um papel ou caderno.

Atividade 2 – Teclas quebradas da calculadora

Presente em alguns livros didáticos, a atividade abaixo considera que alguma(s) tecla(s) da calculadora deixou(aram) de funcionar. Então, são sugeridas operações que deverão ser realizadas com esta condição limitante. Compete ao aluno constituir uma estratégia para resolver o problema e responder à questão. Exemplo:

Sabendo que as teclas 6, 7 e 9 de uma calculadora não funcionam, descubra outras formas para calcular:		
a) 9 x 54 =	b) 75 x 8 =	c) 67 x 98 =

O interessante é deixar as respostas aparecerem. Existem muitas formas de resolver o mesmo problema. Nas operações apresentadas acima, poderíamos ter a seguinte solução:

a) 10 x 54 – 54 b) (30 + 45) x 8 c) (43 + 24) x (50 + 48)

Observe que há uma situação que pode ocorrer na aplicação de atividade deste tipo: o aluno poderá usar papel e lápis para fazer partes da operação (como na resposta dada em c) ou deverá ser respeitada a regra de operação da calculadora, sem acumular resultados?

Atividade 3 – Regularidades

Esta é uma atividade que acredito ser interessante do ponto de vista de trabalhar algumas práticas que, por força exatamente do aparecimento das novas tecnologias digitais e alguns *softwares* e aplicativos, como jogos e o acesso mais fácil à internet e a dados, foram sendo esquecidas. Veja um pequeno exemplo de como incluir a atenção aos detalhes, numa atividade:

Trabalhe as três primeiras linhas usando uma calculadora e escreva os resultados. Observe os resultados obtidos e escreva o resultado da 4ª linha sem usar a calculadora. Verifique depois sua resposta com a calculadora

1001	x	82	=	82082
1001	x	65	=	65065
1001	x	14	=	14014
1001	x	57	=	57057

4	÷	99	=	0,040404
5	÷	99	=	0,050505
6	÷	99	=	0,060606
12	÷	99	=	0,121212

Coloquei aqui o exercício pronto, e o resultado em vermelho como aquele que deve ser "adivinhado". Muitos outros exemplos podem ser obtidos em alguns livros didáticos ou no livro de PONTE, BROCADO e OLIVEIRA (2003). Esse tipo de configuração numérica envolvendo números e operações que possuem resultados "semelhantes" recebe o nome de Regularidades. Ou seja, há uma regularidade entre os resultados das operações propostas.

O fato de fazer a operação com a calculadora, e depois observar os números do próximo desafio e os resultados dos anteriores pode levar o aluno a prestar mais atenção em suas práticas. Às vezes, ele faz operações sem observar se o resultado é ou não possível. Não se trata de saber se está correto, mas se haveria a possibilidade de alguma quantidade semelhante àquela, como por exemplo, em operações de divisão de números naturais nas quais o resultado é maior do que o dividendo.

O computador e a calculadora em sala de aula: um pouco de teoria

Apresento aqui alguns pontos de vista sobre o uso das novas tecnologias, principalmente computadores e calculadoras, em sala de aula, amadurecidos no decorrer da pesquisa de doutorado com assuntos correlacionados.

Muitos alunos, professores e pesquisadores consideram a apresentação de um conceito utilizando um *software* como sendo de "mais fácil" aprendizagem aos novos alunos, mas se esquecem de que partem de um patamar diferente do ponto de vista epistemológico. Como já conhecem o conceito, estão em situação diferente, dificultando a comparação da eficácia do método em relação às práticas mais tradicionais sem o uso da tecnologia. Esse fato, de maneira alguma, descarta a importância da utilização dos computadores nos processos de ensino e aprendizagem das mais diversas disciplinas acadêmicas, mas salienta a responsabilidade de se colocar, como melhor ou pior que o ensino tradicional, o ensino via tecnologia.

O processo de entrada de tecnologias no ambiente da escola rompe o discurso apresentado pela comunidade escolar para, de certa forma, negar a utilização dos meios computacionais. Um exemplo foi a implementação de computadores nas escolas estaduais de São Paulo, na década de 1990. Mesmo antes da preparação dos professores e da adequação física das escolas, todos os estabelecimentos de ensino público receberam laboratórios completos os quais, em muitos casos, ficaram sem utilização.

Conforme pude constatar a partir do depoimento dos professores pesquisados, o computador tem tido presença nas referências acerca de sua utilização nos livros e da própria prática do professor. A cada momento, uma crítica a sua não utilização é derrubada. Se a tempos atrás o problema era o preço, a produção em maior escala tornou os custos mais competitivos. Se o número de máquinas nas instituições educacionais preocupava, isso tem sido resolvido. Da mesma forma, as instalações inadequadas, a falta de técnicos presentes nas escolas, a inexistência de *softwares* especializados e outras críticas vão se esvaindo com o passar do tempo.

Papert (1994), quando se refere aos efeitos da entrada da tecnologia na escola, afirma que

> a mudança de um instrumento radicalmente subversivo na sala de aula para um obtuso instrumento no laboratório de computação não adveio de uma falta de conhecimento nem de uma falta de software. Eu o explico por uma inteligência inata da Escola, que agiu como qualquer organismo vivo defendendo-se de um corpo

> estranho. Ela ativou uma reação imunológica cujo resultado final seria digerir e assimilar o intruso (PAPERT, 1994, p. 42).

Sobre a velocidade da implementação das novas tecnologias no processo educacional, o estudo permitiu observar que ela é bem maior que o ritmo das adequações físicas dos espaços escolares e da capacitação dos profissionais da educação para o seu uso. Nos depoimentos de professores entrevistados, numa pesquisa realizada (ESCHER, 2011), chega-se a afirmar que, tão logo as novas gerações venham a ocupar os lugares dos atuais mestres, esse fato se dissipará.

A pesquisa revela ainda que, independentemente ao aceite ou à recomendação pela comunidade acadêmica e escolar, a implementação das novas tecnologias, como componente da revolução tecnológica, se dá, epidemicamente. Ela adentra todos os âmbitos da escola, assim como ocorre na sociedade. Esse fato complementa a ideia da pseudo-resistência imunológica citada por Papert (1994), retirando a discussão apenas do âmbito escolar e acadêmico.

Sendo assim, as cinco características elencadas por Castells (1999), que colocam as tecnologias como parte de uma revolução tecnológica, foram evidenciadas na pesquisa. A prática da utilização das "*tecnologias para agir sobre a informação*, não apenas informação para agir sobre a tecnologia" (CASTELLS, 1999, p. 108); a p*enetrabilidade dos efeitos das novas tecnologias*, o que coaduna com nossa hipótese do caráter epidêmico da tecnologia, pois, como "a informação é uma parte integral de toda atividade humana, todos os processos de nossa existência individual e coletiva são diretamente moldados pelo meio tecnológico (CASTELLS, 1999, p. 108); a *lógica das redes*, como uma configuração topológica da complexidade do aparecimento das inovações na atividade humana; a *flexibilidade*, em que organizações e instituições "podem ser modificadas, e até mesmo fundamentalmente alteradas, pela reorganização de seus componentes" (Castells, 1999, p. 109); e a crescente *convergência de tecnologias específicas para um sistema altamente integrado*, "no qual trajetórias tecnológicas antigas ficam literalmente impossíveis de se distinguir em separado" (Castells, 1999, p. 109).

Logo, como enunciado no início deste artigo, "a dimensão social da revolução da tecnologia da informação parece destinada a cumprir a lei sobre a relação entre tecnologia e a sociedade" (CASTELLS, 1999, p. 113), afirmação esta já proposta por Melvin Kranzberg (KRANZBERG apud CASTELLS, 1999, p. 113). KRANZBERG enuncia que "a tecnologia não é nem boa, nem ruim e também não é neutra" (KRANZBERG, apud CASTELLS, 1999, p. 113).

Castells completa que ela "é uma força que provavelmente está, mais do que nunca, sob o atual paradigma tecnológico que penetra no âmago da vida e da mente" (CASTELLS, 1999, p.113).

A tecnologia fez da sociedade uma sociedade tecnológica. Sua entrada pôde ser percebida nas mais diversas esferas das atividades humanas. Ainda que na aprendizagem ou no ensino de matemática, nas instituições, a utilização das Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC) esteja ocorrendo em ritmo lento, quando comparado a outros setores do mercado comum (consumo), notamos que mesmo assim está ocorrendo o que chamamos de revolução tecnológica informacional, citada por Castells (1999). Por isso, reforço o convite aos educadores de matemática: computadores, calculadoras, aplicativos de celulares...usem!

Para continuar a reflexão sobre o tema, há uma variedade de estudos liderados por pesquisadores da área de Educação Matemática, alguns dos quais listados na bibliografia. Recomendo a leitura da dissertação de mestrado de Pires, defendida em 2016, que também integra as referências deste artigo.

Referências bibliográficas

BORBA, M. C., PENTEADO, M. G., **Informática e Educação Matemática**, Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2001.

CASTELLS, M**. A Sociedade em Rede - A Era da Informação: economia, sociedade e cultura, volume 1.** São Paulo: Paz e Terra, 1999.

ESCHER, M.A., **Dimensões Teórico-Metodológicas do Cálculo Diferencial e Integral: perspectivas histórica e de ensino e aprendizagem**. Rio Claro. Tese de Doutorado, UNESP, 2011.

MISKULIN, R.G.S., ESCHER, M.A., SILVA, C.R.M., **A Prática Docente do Professor de Matemática no Contexto das TICs: uma experiência com a utilização do MAPLE em Cálculo Diferencial**. Revista de Educação Matemática, vol. 10 Número 11, Gráfica Compacta, 2007.

PAPERT, S., **A Máquina das Crianças: repensando a escola na era da informática**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1994.

PIRES, L. F. R., **As Influências das Tecnologias da Informação e Comunicação nas Estratégias de Ensino e Aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral,** Juiz de Fora, Dissertação de Mestrado – UFJF, 2016.

PONTE, J. P.; BROCADO, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações Matemáticas na Sala de Aula**. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2003.

SELVA, A.C.V., BORBA, R.E.S.R**., O Uso da Calculadora nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental**. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2010.

SKOVSMOSE, O. **Desafios da Educação Matemática Crítica**. São Paulo: Papirus. 2008.

Contribuição da matemática das calorias como estratégia de educação reflexiva do consumidor

Carlos Henrique Fonseca[1]
Éveli Xavier de Souza[1]

O que está no meio ambiente acaba virando comida

A alimentação humana mudou bastante no final do século XX. A comida que os consumidores ingerem cotidianamente e os produtos rotulados como alimentos mais saudáveis e orgânicos estão sob um olhar reflexivo das pessoas quanto ao impacto disso para a sociedade e para o planeta. Há uma preocupação com o impacto da cadeia produtiva daquilo que será consumido como alimento. Existe uma tendência a deplorar a padronização dos alimentos industrializados e homogeneidade do gosto da alimentação atual, colocando-a em oposição à alimentação diversificada e natural consumida no passado. À mesa de um restaurante, por exemplo, olha-se a procedência da comida; se a forma como foi obtida respeitou o meio ambiente; se o abate dos animais foi cruel ou revestido com certa dose de humanização, bem como qual a destinação das sobras daquela refeição.

O prazer de comer apregoado pelo movimento Slow Food[2] em 1986, aliado à consciência e à responsabilidade de produzir e consumir alimentos que sejam saborosos, não prejudiciais à saúde humana e ao meio ambiente e

1 Núcleo de Inovação em Tecnologias: Alimentos, Saúde e Cultura – NIHTA-Doce. Universidade Federal de Juiz de Fora campus Governador Valadares, 35.010-110, Governador Valadares, MG, Brasil. E-mail: nihtadoce@gmail.com.

2 O princípio básico do movimento é o direito ao prazer da alimentação, utilizando produtos artesanais de qualidade especial, produzidos de forma que respeite tanto o meio ambiente quanto as pessoas responsáveis pela produção, os produtores. Fonte: <http://www.slowfoodbrasil.com/slowfood/o-movimento>. Acesso em: 20 nov. 2017.

que oferecem retorno justo aos produtores por seu trabalho são conceitos bem disseminados e continuam causando discussões e polêmicas.

As relações de alimentação, sobretudo nutrientes e energia, existentes entre os seres vivos de um ecossistema são chamadas cadeias alimentares. Possuem um fluxo de energia unidirecional, por exemplo: uma planta serve de alimento para uma borboleta, que alimenta um sapo, que alimenta uma serpente. As várias cadeias alimentares de um ecossistema formam a teia alimentar, na qual um mesmo organismo pode apresentar diferentes hábitos alimentares e, consequentemente, ocupar diferentes níveis tróficos[3] que não possuem fluxo de energia direcionado.

A evolução da alimentação atual decorre de hábitos e tecnologias alimentares das sociedades de caçadores e coletores, o que caracterizava uma alimentação diversificada. O desenvolvimento da agricultura reduziu as bases da alimentação humana para apenas 30 plantas, entre as quais oito culturas de base que representam três quartos de sua alimentação, sendo que três delas - o arroz, o trigo e o milho - constituem 75% de sua ração de cereais[4].

A atual mudança na alimentação humana indica uma restrição e um novo olhar quanto àquilo que está no ambiente ser consumido junto com a comida. A cadeia alimentar possui inúmeros contaminantes que são inerentes aos alimentos industrializados ou em estado natural. Contaminantes em alimentos são definidos pela *Codex Alimentarius* como:

> qualquer substância indesejável, não adicionada intencionalmente ao alimento, que está presente como resultado da produção, manufatura, processamento, preparação, embalagem e transporte ou como resultado de contaminação ambiental ou de equipamentos utilizados na elaboração e/ou conservação do alimento.

---

3 Nível alimentar, representa o conjunto biótico (animais e vegetais) que integra o mesmo ecossistema, e nesse possui semelhantes hábitos alimentares. Fonte: < http://brasilescola.uol.com.br/biologia/niveis-troficos.htm http://brasilescola.uol.com.br/biologia/niveis-troficos.htm >. Acesso em: 25 nov. 2017.

4 SORJ, B.; WILKINSON, J. A tecnologia moderna de alimentos: rumo a uma industrialização da natureza. Ensaios FEE, Porto Alegre, 9(2).64-79, 1988.

Engloba ainda as toxinas microbianas, resíduos de pesticidas, resíduos de drogas veterinárias e os coadjuvantes de tecnologia e aditivos químicos[5]. A Figura 1 apresenta eixos que agrupam os principais contaminantes na cadeia alimentar.

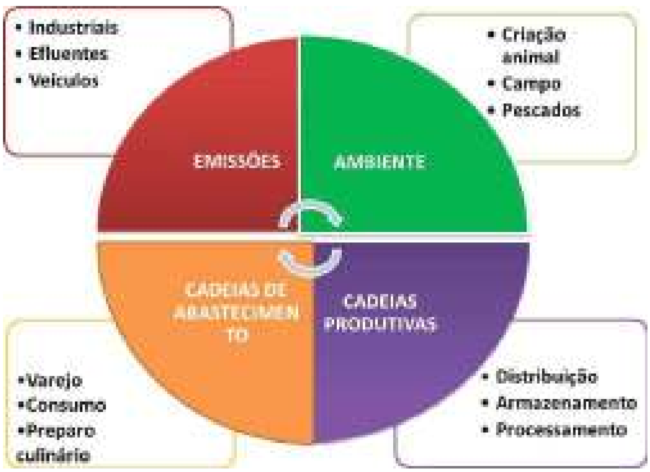


Figura 1: Contaminantes na cadeia alimentar. Fonte: do autor (2017).

A exploração do animal como alimento – carne/couro, leite, ovos/ penas e mel; de pescados – carne/couro, e dos vegetais – frutas/hortaliças/ grãos/ sementes gera um efeito ambiental intenso. A industrialização dessas matérias primas precisa considerar uma abordagem proativa para o controle dos contaminantes acidentais e intencionais. É um objetivo a ser perseguido[5 6]. E isso se dá ao longo de toda a cadeia produtiva e de abastecimento. O cultivo de alimentos no campo geralmente utiliza agrotóxicos, definidos como: "*produtos e agentes de processos físicos, químicos ou biológicos, utilizados nos setores de produção, armazenamento e beneficiamento de produtos agrícolas, pastagens, proteção de florestas, nativas ou plantas, e de outros ecossistemas e de ambientes urbanos, hídricos e industriais*"[7].

5 FONSECA, C.H. Os riscos no consumo alimentar: desafios e perspectivas da ciência de alimentos. In: CÉSAR, E.T. et al (org.). Ciência em dia: jornadas de divulgação científica: ciência alimentando o Brasil. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2017. p.55-79.

6 KRAFT FOODS BRASIL. Contaminantes em alimentos: riscos reais e percebidos. Research, Development & Quality. Kraft Foods Brasil. Mai., 2008 (apresentação). Disponível em: <http://slideplayer.com.br/slide/2693390/>. Acesso em: 20 jul. 2016.

7 BRASIL. Lei no 7.802, de 11 e julho de 1989. Dispõe sobre a pesquisa, a experimentação, a produção, a embalagem e rotulagem, o transporte, o armazenamento, a comercialização, a propaganda comercial,

A intoxicação aguda por agrotóxicos causa 200 mil mortes/ano no mundo. A Organização das Nações Unidas (ONU) enfatiza que os efeitos crônicos da exposição aos agrotóxicos causados pelo contato com os pesticidas pode causar câncer, Alzheimer, Parkinson, transtornos hormonais, problemas de desenvolvimento, esterilidade, danos neurológicos como perda de memória e redução da capacidade visual ou motora. Outros possíveis efeitos são asma, alergias e hipersensibilidade[8].

As emissões de resíduos pela indústria durante o processamento das matérias primas geram efluentes líquidos e resíduos sólidos que precisam ser tratados na indústria antes de voltarem ao meio ambiente. A Figura 2 apresenta um resumo dos registros de intoxicação química e óbitos causados por agrotóxicos.

Figura 2: A matemática dos agrotóxicos. Fonte: Sistema Nacional de Informações Tóxico-Farmacológicas, Fiocruz, Ministério da Saúde, Brasil.

a utilização, a importação, a exportação, o destino final dos resíduos e embalagens, o registro, a classificação, o controle, a inspeção e a fiscalização de agrotóxicos, seus componentes e afins, e dá outras providências. Brasília, DOU. 1989.

8 FIOCRUZ. Riscos dos agrotóxicos segundo a ONU. Rio de Janeiro, SINITOX – Sistema Nacional de Informações Tóxico-Farmacológicas [online], 05 abr. 2017. Disponível em: <https://sinitox.icict.fiocruz.br/riscos-dos-agrot%C3%B3xicos-segundo-onu>. Acesso em: 06 jan. 2018.

A Fundação Oswaldo Cruz (Fiocruz) através do Sinitox[9] alerta que o menor número de casos de intoxicações e envenenamentos registrados nas estatísticas, nos últimos anos, ocorreu em virtude da diminuição da participação dos Centros de Informação e Assistência Toxicológica (CIAT) nestes levantamentos[8].

Os corantes artificiais constituem outra classe de perigos químicos presentes nos alimentos. Os corantes são utilizados para manter a aparência aceitável e constituem um fator fundamental para o *marketing* do produto, no momento da decisão de compra pelo consumidor. A dificuldade de medir a exposição aos efeitos dos corantes artificiais impede o consumidor de controlar a própria exposição, assim como a avaliação se o benefício recebido justifica o risco de reações adversas como alergias, por exemplo. Evitar o consumo excessivo de alimentos contendo corantes artificiais é a melhor estratégia de saúde diante dos relatos científicos confusos e contraditórios, muitas vezes patrocinados pelas indústrias[10].

Diversos corantes artificiais são proibidos na Europa e/ou possuem uma advertência na rotulagem dos alimentos e bebidas que contenham amarelo crepúsculo (E110), amarelo de quinoleína (E104), azorrubina (E122), vermelho 40 (E129), tartrazina (E102) e ponceau 4R (E124). No Brasil, são permitidas cinco das seis cores (amarelo crepúsculo, azorrubina, vermelho 40, tartrazina e ponceau 4R). O Quadro 1 apresenta características de alguns dos corantes e suas aplicações.

---

9 O Sistema Nacional de Informações Tóxico-Farmacológicas (Sinitox) tem como principal atribuição coordenar a coleta, a compilação, a análise e a divulgação dos casos de intoxicação e envenenamento notificados no país. (Disponível em: <https://sinitox.icict.fiocruz.br/>. Acesso em 07 jan. 2018)

10 PRADO, M.A.; GODOY, H.T. Teores de corantes artificiais em alimentos determinados por cromatografia líquida de alta eficiência. Quim. Nova, Vol. 30, n. 2, p.268-273, 2007.

Quadro 1: Principais corantes artificiais em alimentos industrializados:

Corante	Origem	Aplicação	Efeitos adversos
Vermelho ponceau 4R	Tinta do alcatrão de carvão	Frutas em caldas, laticínios, xaropes de bebidas, balas, cereais, refrescos, refrigerantes e sobremesas.	Deve ser evitado por sensíveis à aspirina e asmáticos. Podem causar anemia e aumento da incidência de doença renal.
Amarelo crepúsculo	Tinta do alcatrão de carvão e tintas azoicas	Cereais, balas, bebidas, caramelos, coberturas, xaropes, laticínios, gomas de mascar.	Causa alergia produzindo urticária, angioedema e problemas gástricos.
Azul brilhante	Tinta do alcatrão de carvão	Laticínios, balas, cereais, queijos, recheios, gelatinas, licores, refrescos.	Pode causar hiperatividade em crianças, eczema e asma. Deve ser evitado por pessoas sensíveis à purinas.

Fonte: *Food Safety Brazil* (Disponível em: <http://foodsafetybrazil.org/alimentos-com-corantes-demanda-do-consumidor/>. Acesso em: 15 set. 2017).

O que se comia no passado e que se come hoje?

No passado, as matérias primas alimentares recebiam tratamento por processos artesanais para aumentar a sua conservação e facilitar o transporte e a comercialização. No século XX esses processos evoluíram para a industrialização, a partir do uso das diversas tecnologias aplicadas às atividades da colheita até o abate de animais. A necessidade de se ganhar tempo na preparação da alimentação, à medida que as mulheres ingressavam no mercado de trabalho, gerou profundas mudanças socioeconômicas[11].

As indústrias alimentícias receberam um incremento crescente bem como as técnicas de produção e com isso, a comida disponibilizada à população passou a demandar processos mais sofisticados e avaliação da qualidade, de forma a garantir alimentos mais seguros. Surge assim, a ciência e tecnologia de alimentos, que é a área de conhecimento direcionada para o processamento dos

11 Alimentos obtidos diretamente de plantas ou de animais (como folhas e frutos ou ovos e leite) e adquiridos para consumo sem que tenham sofrido qualquer alteração após deixarem a natureza[17].

alimentos, envolvendo conhecimentos da matemática, física, química e biologia em suas múltiplas interfaces.

Seguir uma alimentação saudável no passado parecia uma tarefa mais simples, apesar da dieta ser menos saudável de acordo com os padrões atuais. As pessoas se alimentavam em casa. As crianças comiam os alimentos *in natura*[4] escolhidos pelos pais e seguiam os cardápios tradicionais da família.

Atualmente, as orientações sobre alimentos saudáveis viraram modismos e os consumidores ficam confusos na medida em que essas recomendações se contradizem. Isso faz com que a escolha de alimentos inadequados para compor a dieta seja responsável pela obesidade, sobretudo nos consumidores urbanos[9].

A epidemia mundial de obesidade se deve ao modo de viver atual, com tudo automatizado. Os indivíduos pós-modernos saíram de suas casas para trabalhar e alimentar-se, principalmente com comida *fast food*[12] e pararam de se movimentar, acumulando as calorias ingeridas na dieta, ganhando peso. A falta de cuidados com a alimentação em função da pressa, imediatismo em resolver o quotidiano e busca por mais comodidade aumentaram o estresse e a composição corporal da população. Recente relatório da ONU indica que muitas famílias brasileiras estão substituindo os pratos tradicionais, preparados em casa com os alimentos frescos, por alimentos ultraprocessados[13] e de baixa qualidade nutricional, com alto conteúdo de açúcares, sódio e gorduras[14].

A Pesquisa de Vigilância de Fatores de Risco e Proteção para Doenças Crônicas por Inquérito Telefônico (Vigitel) divulgados pelo MS em 2017 revelam que a obesidade cresceu 60% nos últimos 10 anos. Segundo o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), a obesidade no Brasil cresce mais rapidamente na faixa mais pobre da população, devido ao elevado custo dos alimentos menos calóricos, como laticínios desnatados, carnes mais magras, saladas

---

12 Comida rápida. Trata-se de um setor diferenciado no serviço de alimentação, onde a padronização, a mecanização e a rapidez, além da garantia da procedência dos ingredientes, atraem os clientes. Disponível em: <https://www.infoescola.com/curiosidades/fast-food/>. Acesso em: 06 jan. 2018.

13 Produtos cuja fabricação envolve diversas etapas e técnicas de processamento e vários ingredientes, muitos deles de uso exclusivamente industrial. Exemplos: refrigerantes, biscoitos recheados, salgadinhos de pacote e macarrão instantâneo, enlatados, embutidos e frituras[17].

14 FOLHA DE SÃO PAULO. Níveis de obesidade e sobrepeso no Brasil são preocupantes, diz ONU. Equilíbrio e Saúde. Folha online, 25 jan. 2017. Disponível em: <http://www1.folha.uol.com.br/equilibrioesaude/2017/01/1852954-niveis-de-obesidade-e-sobrepeso-no-brasil-sao-preocupantes--diz-onu.shtml>. Acesso em: 06 jan. 2018.

e frutas. Alimentos ricos em calorias, sal, gorduras e açúcar apresentam menor preço e daí, um alto consumo, contribuindo negativamente para aumento da obesidade e doenças relacionadas, como hipertensão e diabetes[15,16].

Em 2011, o MS e a Agência Nacional de Vigilância Sanitária (Anvisa) em conjunto com a Associação Brasileira das Indústrias de Alimentação (ABIA), a Associação Brasileira das Indústrias de Massas Alimentícias (ABIMA), a Associação Brasileira da Indústria de Trigo (ABITRIGO) e a Associação Brasileira da Indústria de Panificação e Confeitaria (ABIP) assinaram o Termo de Compromisso para pactuação de estratégias para o monitoramento da redução do teor de sódio (Na^+) em alimentos processados[11]. Como estratégia para frear o avanço da obesidade e sobrepeso no Brasil assim como o diabetes e a hipertensão, o MS atualizou, em 2014, o Guia Alimentar para a População Brasileira[17]. Essas ações trouxeram resultados positivos para a saúde do consumidor.

É importante e necessário que o consumidor crie o hábito de ler as informações contidas na rotulagem nutricional que consta na embalagem dos alimentos industrializados. A partir dessa leitura, o consumidor consegue identificar os alimentos com menor teor de calorias, bem como os tipos de gorduras, de carboidratos e os teores de sódio, vitaminas e minerais. Assim, poderá usar a opção de adquirir produtos que são mais adequados às suas necessidades nutricionais e de saúde.

Ao encontrar rótulos dos alimentos industrializados com as ênfases: "zero gordura", "isento de açúcar" e "sem sódio" muitas vezes o consumidor se pergunta: "O que isso significa?" Os termos "light", "diet" e "low" são conceitos associados à quantidade de determinados nutrientes e/ou valor energético contidos nos alimentos processados[18]. Normalmente geram confusão nos

---

15 BRASIL. Termo de Compromisso que firmam entre si a União, por intermédio do Ministério da Saúde e a Associação Brasileira das Indústrias de Alimentação - ABIA, com a finalidade de estabelecer metas nacionais para a redução do teor de sódio em alimentos processados no Brasil. DOU, seção 3, 28 ago. 2012.

16 BRASIL. Obesidade cresce 60% em dez anos no Brasil. In: Saúde. Portal Brasil [online], 17 nov. 2017. Disponível em: <http://www.brasil.gov.br/saude/2017/04/obesidade-cresce-60-em-dez-anos-no-brasil>. Acesso em: 06 jan. 2018.

17 BRASIL. Ministério da Saúde. Secretaria de atenção à saúde. Departamento de atenção Básica. Guia alimentar para a população brasileira. 2. ed. Brasília: Ministério da Saúde, 2014. 156 p. : il.

18 Alimentos processados são fabricados pela indústria com a adição de sal, de açúcar ou de outra substância de uso culinário a alimentos in natura para torná-los duráveis e mais agradáveis ao paladar. São

consumidores na hora de escolher o produto no supermercado. Essa confusão conceitual pode ocasionar problemas de saúde pelo consumo equivocado dos alimentos formulados para necessidades específicas da dieta.

Entende-se como alimento tradicional aquele que contém a quantidade total de nutrientes. Os alimentos "light" são aqueles cujo valor energético (calorias) ou teor de algum nutriente (açúcares, gorduras, sódio, etc.) é baixo ou reduzido em pelo menos 25% quando comparado ao produto tradicional. E os alimentos "diet" são produtos nos quais houve a supressão de algum(s) nutriente(s) que não se pode ingerir sem a indicação médica. A Figura 3 mostra as possibilidades de formulação da composição dos alimentos processados nas categorias "tradicional", "light", "diet" e "zero".

Cálculo da quantidade de nutrientes declarada nos rótulos dos alimentos

A tabela de informação nutricional que consta no rótulo dos alimentos industrializados está localizada no verso da embalagem. A quantidade de nutrientes presentes vem expressa em miligramas (mg) e o volume da porção[19] é expresso em unidades, gramas (g), mililitros (ml) ou medida caseira[20].

A Organização Mundial de Saúde (OMS) recomenda o consumo diário de 2 g de sódio (2.000 mg). Para conhecer o teor de sódio (Na^+) presente em determinado alimento é utilizada uma relação matemática: divide-se o teor de sódio (mg) pela quantidade da porção (ml ou g) indicada no rótulo. Por exemplo, em uma porção de 350 ml de refrigerante de cola há 18 mg de sódio. Dividindo 18 por 350 o resultado é 0,052 mg de sódio por ml de refrigerante. Em 1.000 ml (1 litro) desse refrigerante há 52 gramas de sódio, o que equivale em medida caseira, a 2,5 colheres de sopa de sódio.

---

produtos derivados diretamente de alimentos e são reconhecidos como versões dos alimentos originais. Exemplos: cenoura, pepino, ervilhas, palmito, cebola e couve-flor preservados em salmoura ou em solução de sal e vinagre; extratos ou concentrados de tomate (com sal e ou açúcar); frutas em calda e frutas cristalizadas; carne seca e toucinho; sardinha e atum enlatados; queijos; e pães feitos de farinha de trigo, leveduras, água e sal[17].

19 É a quantidade média do alimento que deveria ser consumida por pessoas sadias, maiores de 36 meses de idade em cada ocasião de consumo, com a finalidade de promover uma alimentação saudável (RDC no 359. Anvisa, 2003).

20 É um utensílio comumente utilizado pelo consumidor para medir alimentos. Exemplos: colher, copo, xícara, prato (RDC no 359. Anvisa, 2003).

Em 2015, a OMS reduziu a recomendação de consumo diário de açúcar para uma dieta saudável a 5% do total de calorias ingeridas por uma pessoal adulta, em uma dieta de 2.000 calorias diárias. O limite máximo é de 10%, isto é, 50 g de açúcar por dia ou 12 colheres de chá, em medida caseira[21]. Essa redução é para todos os tipos de açúcar contidos nos alimentos, tanto os naturais – presentes no mel, leite e sucos de fruta, por exemplo – como o açúcar cristal e refinado, pois na prática, todos os tipos de açúcar são transformados em glicose e frutose e acabam processados pelo fígado.

Outra relação matemática semelhante a anterior é utilizada para o cálculo da quantidade de açúcar. Usando o mesmo produto, um refrigerante de cola tradicional de 350 ml, de porção única (dois copos), o teor de açúcares equivale a nove colheres de chá, isto é, 37 gramas, o mesmo que 148% dos valores indicados pela OMS – valor superior ao recomendado. Na versão zero açúcar (*diet*), o sabor doce é dado pela combinação dos adoçantes artificiais: ciclamato de sódio (94,5 mg), acesulfame de potássio (52,5 mg) e aspartame (42 mg) na porção de 350 ml. Recentemente foi lançado no mercado uma cola *light* à base do edulcorante glicosídeo de esteviol (45,5 mg/350 ml), apresentando 47% de redução calórica em relação ao produto tradicional. A composição nutricional e os ingredientes das colas tradicional, com stévia (*light*) e zero açúcar (*diet*) da bebida Coca Cola® podem ser comparadas no Quadro 2.

---

21 OMS. Diretriz: Ingestão de açúcares por adultos e crianças. Genebra, WHO/NMH/NHD/15.2. Organização Mundial da Saúde, 2015.

Quadro 2: Composição e ingredientes do refrigerante de cola:[22][23][24]

Produto (porção 350 ml, 2 copos)	**Tradicional**[22]	**Light (com stévia)**[23]	**Diet**[24]
Valor energético (kcal)	149	70	0
Carboidratos (g)	37	Não declarado	0
Sódio (mg)	18	0	49
Ingredientes	Água gaseificada, açúcar, extrato de noz de cola, cafeína, corante caramelo IV, acidulante ácido fosfórico e aroma natural.	Água gaseificada, açúcar, extrato de noz de cola, cafeína, corante caramelo IV, aroma natural, acidulante ácido fosfórico e ácido cítrico, conservador benzoato de sódio, regulador de acidez fosfato de sódio monobásico e edulcorante glicosídeos de esteviol (13 mg) por 100 ml.	Água gaseificada, extrato de noz de cola, cafeína, aroma natural, corante caramelo IV, acidulante ácido fosfórico, edulcorantes ciclamato de sódio (27 mg), acesulfame de potássio (15 mg) e aspartame (12 mg) por 100 ml, conservador benzoato de sódio, regulador de acidez citrato de sódio. Contém Fenilalanina.

Fonte: Adaptado de informações do Instituto Coca-Cola Brasil.

Importante ressaltar que a versão *light* com stévia possui açúcar na lista de ingredientes – possivelmente contido no extrato de noz de cola, porém essa informação é omitida da lista de ingredientes. O fabricante não declara o teor de açúcar na tabela de informação nutricional[25]. Grande parte dos consumidores acredita erroneamente que a bebida de cola dietética é mais saudável que a versão tradicional ou *light*. O refrigerante de cola *diet* possui mais sódio (49 mg) que a versão tradicional (18 mg), representando um acréscimo de 272% de sódio (Na^+) na composição.

Diante do crescimento exponencial dos números de casos de obesidade, sobrepeso, diabetes e hipertensão arterial no Brasil é necessário observar

22 Disponível em: <https://www.cocacolabrasil.com.br/bebidas/coca-cola/coca-cola>. Acesso: 06 jan. 2018.

23 Disponível em: <https://www.cocacolabrasil.com.br/bebidas/coca-cola/coca-cola-com-stevia-e-50--porcento-menos-acucares>. Acesso em: 06 jan. 2018.

24 Disponível em: <https://www.cocacolabrasil.com.br/bebidas/coca-cola/coca-cola-zero-acucar>. Acesso em: 06 jan. 2018.

25 INSTITUTO COCA-COLA BRASIL. Coca-Cola. Disponível em: <https://www.cocacolabrasil.com.br/bebidas/coca-cola/coca-cola>. Acesso em: 06 jan. 2018.

a quantidade de açúcar ingerido na dieta. Em seis anos, o número de diabéticos no Brasil cresceu 40% movido pela má alimentação, sobretudo da população jovem e infantil. A leitura do rótulo de alimentos industrializados é uma atitude excelente para combater a obesidade e reduzir o risco das doenças associadas ao consumo de açúcar e sódio.

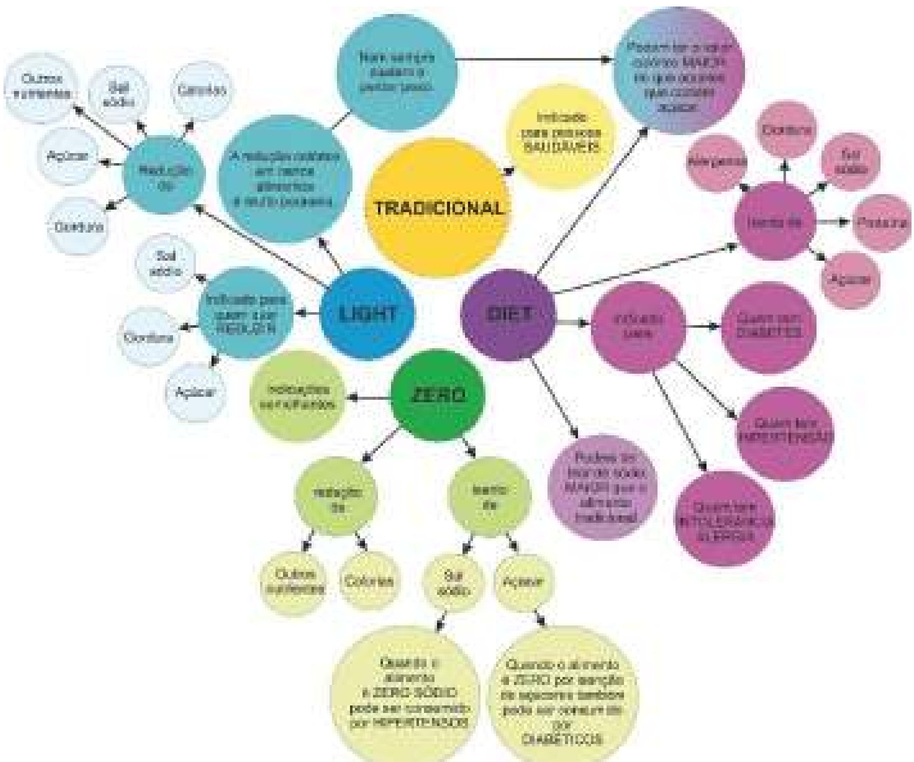


Figura 3: Composição das formulações dos alimentos tradicional, light, diet e zero e indicações de uso. Fonte: do autor (2017).

A matemática das calorias como estratégia de Educação em Saúde, uma proposta

A matemática e sua interação com todo o universo que nos cerca, está em cada parte da vida cotidiana, inclusive no balanceamento da formulação dos alimentos consumidos. O processo de despertar o olhar de um indivíduo comum para observar e reconhecer formas geométricas usando a criatividade, a importância da observação, a história, e o conteúdo didático foi abordado de forma brilhante no filme *Donald in Mathmagic Land* (disponível em: <https://youtu.be/wbftu093Yqk>.), traduzido para o português como Donald no País da Matemágica.

O filme curta metragem de 27 minutos foi estrelado pelo personagem Pato Donald®, dirigido por Hamilton Luske e lançado nos EUA em 1959. Nesses quase 60 anos, o mundo mudou, a dieta mudou e a atualidade do vídeo continua marcante. A abordagem pela imagem é um bom exemplo de contextualização para aprendizagem da matemática. Envolve conteúdos de média complexidade, como a geometria analítica e outros mais complexos, a exemplo, cálculo numérico utilizado na sequencia Fibonacci, aludindo às proporções áureas da arquitetura clássica e artes plásticas.

O curta faz uma viagem ao conteúdo temático sobre a matemática, tornando a compreensão divertida, curiosa e surpreendente para o entendimento de quem assiste, seja adulto ou criança. O pensamento lógico se desenvolve levemente, inserindo o observador na reflexão da multidisciplinaridade para a composição do conhecimento, agrupando recursos criativos, técnicos, rítmicos e que tornam a matemática um tema aglutinador.

A estratégia de utilizar um filme curta metragem no processo de despertar o olhar do consumidor comum para observação e reconhecimento das formas geométricas presentes nas matérias-primas alimentares, como as frutas, vegetais folhosos e legumes é uma nova proposta do *Núcleo de Inovação em Tecnologias: Alimentos, Saúde e Cultura* – NIHTA para a produção de material educativo em saúde. Este recurso de contextualização é um instrumento de grande valor para divulgar os conceitos alimentares mais complexos, como por exemplo, o cálculo das calorias, escalas de intensidade de gostos, formas reológicas e muitos outros. Constitui um mergulho lúdico e didático, que permite reconhecer o valor dos nutrientes nos alimentos, na sua forma física própria e sua relação com a saúde.

A ferramenta audiovisual é um interessante pulso motivador para despertar o olhar do observador na percepção das ideias contidas nos cálculos matemáticos da dieta, no processamento dos alimentos, embalagens, vida útil e uma gama de possibilidades. O conjunto dessas ferramentas conceituais reunidas em curta metragem traz mobilidade de acesso a baixo custo, ampliando a perspectiva de popularização da informação em saúde.

Referências bibliográficas

SORJ, B.; WILKINSON, J. **A tecnologia moderna de alimentos:** rumo a uma industrialização da natureza. Ensaios FEE, Porto Alegre, 9(2).64-79, 1988.

FONSECA, C. H. **Os riscos no consumo alimentar:** desafios e perspectivas da ciência de alimentos. In: CÉSAR, E.T. et al (org.). *Ciência em dia: jornadas de divulgação científica:* ciência alimentando o Brasil. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2017. p.55-79.

KRAFT FOODS BRASIL. **Contaminantes em alimentos: riscos reais e percebidos**. *Research, Development & Quality*. Kraft Foods Brasil. Mai., 2008 (apresentação). Disponível em: <http://slideplayer.com.br/slide/2693390/>. Acesso em: 20 jul. 2016.

BRASIL. **Lei nº 7.802, de 11 e julho de 1989**. Dispõe sobre a pesquisa, a experimentação, a produção, a embalagem e rotulagem, o transporte, o armazenamento, a comercialização, a propaganda comercial, a utilização, a importação, a exportação, o destino final dos resíduos e embalagens, o registro, a classificação, o controle, a inspeção e a fiscalização de agrotóxicos, seus componentes e afins, e dá outras providências. Brasília, DOU. 1989.

FIOCRUZ. **Riscos dos agrotóxicos segundo a ONU.** Rio de Janeiro, SINITOX – Sistema Nacional de Informações Tóxico-Farmacológicas [online], 05 abr. 2017. Disponível em: <https://sinitox.icict.fiocruz.br/riscos-dos-agrot%C3%B3xicos-segundo-onu>. Acesso em: 06 jan. 2018.

PRADO, M. A.; GODOY, H. T. **Teores de corantes artificiais em alimentos determinados por cromatografia líquida de alta eficiência**. *Quim. Nova*, Vol. 30, n. 2, p.268-273, 2007.

TUCUNDUVA, S. **Alimentação saudável**. Entrevista. Dráuzio Varella [online], nov. 2011. Disponível em: <https://drauziovarella.com.br/obesidade/alimentacao-saudavel-2/ https://drauziovarella.com.br/obesidade/alimentacao-saudavel-2/ >. Acesso em: 20 dez. 2017.

FOLHA DE SÃO PAULO. **Níveis de obesidade e sobrepeso no Brasil são preocupantes, diz ONU.** Equilíbrio e Saúde. Folha online, 25 jan. 2017. Disponível em: <http://www1.folha.uol.com.br/equilibrioesaude/2017/01/1852954-niveis-de-obesidade-e-sobrepeso-no-brasil-sao-preocupantes-diz-onu.shtml>. Acesso em: 06 jan. 2018.

BRASIL. **Termo de Compromisso que firmam entre si a União, por intermédio do Ministério da Saúde e a Associação Brasileira das Indústrias de Alimentação**

- **ABIA**, com a finalidade de estabelecer metas nacionais para a redução do teor de sódio em alimentos processados no Brasil. DOU, seção 3, 28 ago. 2012.

BRASIL. **Obesidade cresce 60% em dez anos no Brasil.** In: Saúde. Portal Brasil [online], 17 nov. 2017. Disponível em: <http://www.brasil.gov.br/saude/2017/04/obesidade-cresce-60-em-dez-anos-no-brasil>. Acesso em: 06 jan. 2018.

BRASIL. Ministério da Saúde. Secretaria de atenção à saúde. Departamento de atenção Básica. **Guia alimentar para a população brasileira**. 2. ed. Brasília: Ministério da Saúde, 2014. 156 p. : il.

MARTINS, A. P. B.; ANDRADE, G. C.; BANDONI, D. H. **Avaliação do monitoramento do teor de sódio em alimentos:** uma análise comparativa com as metas de redução voluntárias no Brasil. *Vigilância Sanitária em Debate: Sociedade, Ciência & Tecnologia*, [S.l.], v. 3, n. 2, p. 56-64, maio 2015.

OMS. **Diretriz: Ingestão de açúcares por adultos e crianças**. Genebra, WHO/NMH/NHD/15.2. Organização Mundial da Saúde, 2015.

INSTITUTO COCA-COLA BRASIL. **Coca-Cola.** Disponível em: <https://www.cocacolabrasil.com.br/bebidas/coca-cola/coca-cola>. Acesso em: 06 jan. 2018.

Matemática é coisa da sua cabeça!

Rodrigo Hohl[1]
Alessandra Ghinato Mainieri[2]
Cláudia Helena Cerqueira Mármora[3]

A matemática é uma abstração mental que pode ser utilizada como uma ferramenta que possibilita a compreensão e previsão de fenômenos naturais. A matemática, como um padrão de linguagem lógica e racional, é dependente da atividade cerebral. Sem cérebro humano, não haveria matemática. Nesse sentido, como a matemática se relaciona com a atividade do nosso cérebro?

O cérebro é constituído por células especializadas às quais damos o nome de neurônios. Os neurônios se interconectam em redes intrincadas de comunicação, as chamadas redes ou mapas neurais. Quando os neurônios são estimulados, um impulso elétrico – também chamado de potencial de ação – se propaga ao longo do neurônio numa estrutura chamada axônio. Na ponta final dos axônios, há uma estrutura específica denominada "axônio terminal". Quando o potencial de ação atinge o axônio terminal, vesículas internas que armazenam substâncias químicas chamadas de neurotransmissores migram para a membrana do axônio, fundindo-se a ela e liberando os neurotransmissores nos arredores de um, ou de vários outros neurônios. O neurotransmissor químico pode tanto estimular a atividade elétrica em outro neurônio como inibir a atividade elétrica. Os neurônios estimulados pelos neurotransmissores produzem atividade elétrica para se comunicarem com outros neurônios em sequência e, quanto mais atividade elétrica houver numa determinada região do cérebro, maior a quantidade de energia utilizada pelas células presentes no

---

1 Professor Adjunto do Departamento de Fisiologia- ICB - UFJF.
2 Professora Colaboradora do PPG Saúde - UFJF.
3 Professora Associada do Departamento IAM - FacFisio - UFJF.

local. Portanto, o cérebro é matéria concreta que, para funcionar adequadamente, precisa de energia. Matéria e energia podem ser quantificadas, ou seja, traduzidas em números por instrumentos criados pelo homem. Número é um objeto da matemática usado para descrever quantidade, ordem ou medida.

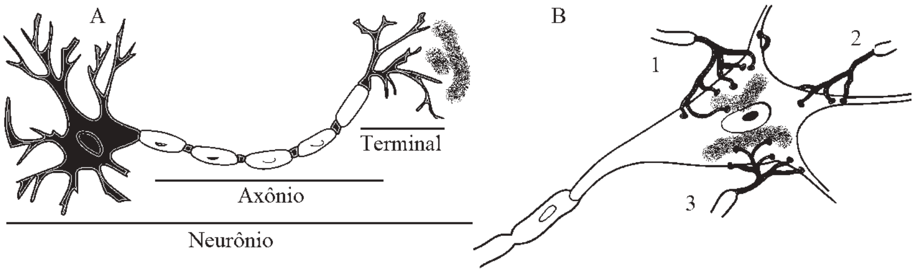


Figura 1: (A) Representação de um tipo de neurônio liberando neurotransmissores a partir da porção terminal do axônio. (B) Representação onde dois neurônios (1 e 3) liberam neurotransmissores no corpo celular de outro neurônio. A liberação de neurotransmissores é deflagrada pela chegada de um potencial elétrico na porção terminal do axônio. Fonte: figura de uso gratuito adquiridas no pixabay.com

Quando uma pessoa está pensando em algo se identifica que há maior atividade elétrica e consumo de energia em algumas áreas do cérebro enquanto em outras diminuem. Ou seja, ao mesmo tempo que pensamos o nosso cérebro produz certa atividade elétrica passível de ser mensurada. Temos meios de registrar e medir a atividade elétrica do cérebro ou a energia consumida enquanto uma pessoa pensa, mas não temos como saber exatamente o que ela está a pensar a menos que a pessoa nos relate o que lhe passa na cabeça. Portanto, precisamos de ferramentas que nos ajudem a entender como o pensamento interage com a matéria cerebral.

Estamos iniciando a nossa jornada de autoconhecimento sobre a capacidade cerebral humana e, para construir o nosso caminho, dispomos de algumas técnicas de investigação científica que a matemática nos ajuda a criar.

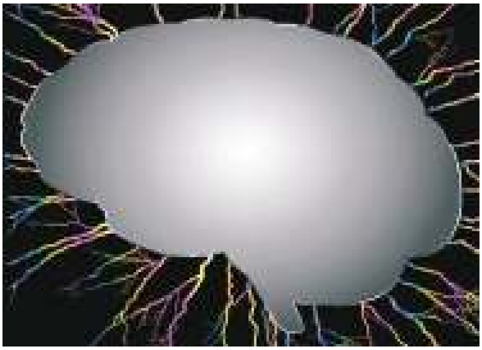


Figura 2: Podemos medir de diversas maneiras a atividade das células que constituem o nosso cérebro. Entretanto, as imagens e pensamentos relacionados com a atividade cerebral são inacessíveis aos instrumentos de medida. Fonte: figura de uso gratuito adquiridas no pixabay.com.

Instrumentos e técnicas de investigação em neurociência

Em neurociência existem diferente técnicas para investigar o funcionamento e a estrutura do cérebro. Mais precisamente, cada técnica nos possibilita coletarmos e analisarmos diferentes tipos e/ou características da matéria que compõem nosso cérebro. Por exemplo, através do eletroencefalograma (EEG) podemos medir os diferentes potencias elétricos que ocorrem no córtex cerebral, ou seja, a atividade elétrica de populações de neurônios localizados na parte externa do cérebro (figura 3).

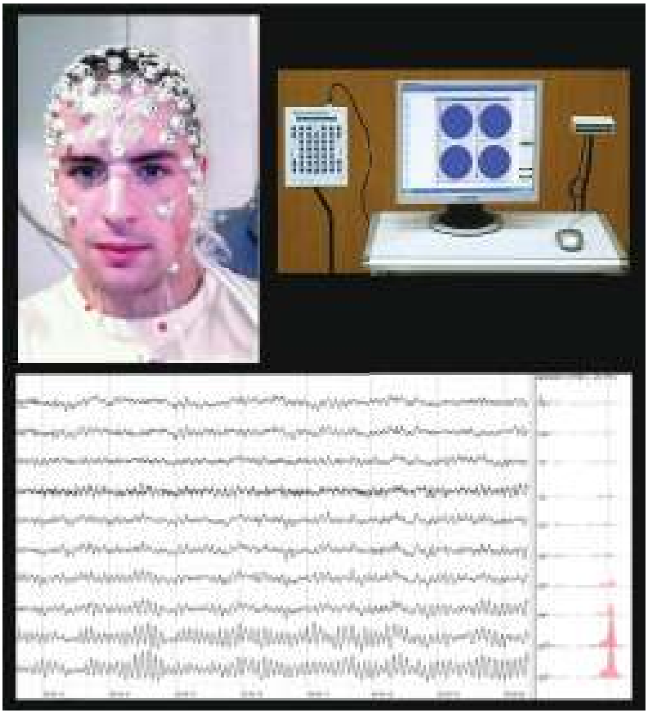


Figura 3: EEG. Fonte: https://en.wikipedia.org/wiki/Electroencephalography.

Já as técnicas de imagem cerebral, por exemplos as funcionais – imagem por ressonância magnética funcional (fMRI) e tomografia por emissão de pósitrons (PET) - nos possibilitam medir o consumo de energia e a concentração de neurotransmissores, através da aplicação de campos magnéticos (figura 4A e B).

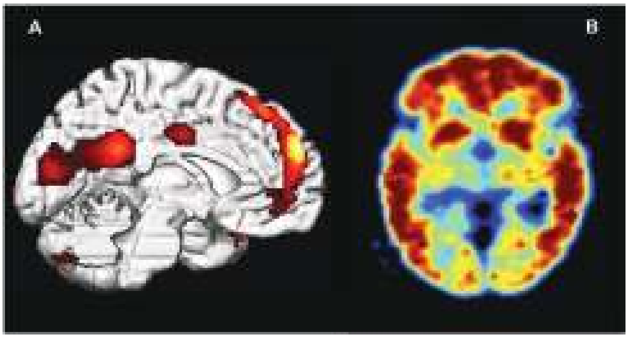


Figura 4: A) fMRI; B) PET. Fonte: https://www.health.harvard.edu/blog/pet-scans-peer-into-the-heart-of-dementia-201310166761.

Por fim, ainda através da aplicação de campos magnéticos podemos interromper o fluxo de corrente elétrica de determina área do córtex cerebral – estimulação magnética transcraniana (TMS).

Até o início do século XX o cérebro e todo o sistema nervoso era estudado apenas do ponto de vista anatômico: suas partes eram analisadas coletivamente no interior de cadáveres de diferentes tipos de animais na escala da evolução e, posteriormente, cada uma das partes era analisada individualmente para determinar a composição da matéria e sua estrutura. Somente no início do século XX, mais precisamente com o desenvolvimento do EEG na primeira década, pudemos começar a estudar o cérebro vivo. Muitos anos depois, durante as décadas de 60 e 70, outro salto ocorreu com o desenvolvimento das técnicas de imagem através da tomografia computadorizada e da ressonância magnética.

Mas afinal qual a relação entre a matemática e todas estas técnicas de coleta de informações sobre o cérebro? Através da matemática os dados coletados sobre o cérebro são transformados em modelos matemático-computacionais. Mais precisamente os dados coletados são transformados em modelos computacionais baseados em cálculos matemáticos de probabilidade e matrizes. Ou seja, através da matemática temos a possibilidade de gerar modelos e imagens de como o cérebro vivo funciona, bem como determinar possíveis alterações em sua estrutura.

A Matemática transposta para o corpo

As infinitas possibilidades no corpo humano nos mostram que o cérebro não faz cálculos diretos, mas sim previsões, medidas e proporções incluindo o próprio corpo em seu curso de vida. Neste sentido existem muitas formas de se pensar a matemática transposta em funções do corpo.

Um dado interessante que durante muito tempo foi objeto de investigação de inúmeros cientistas é denominado de **razão áurea** (*the golden ratio*). Sua representação é o número “Phi” indicando a mais agradável proporção entre dois segmentos ou duas medidas equivalente a 1,618:1.

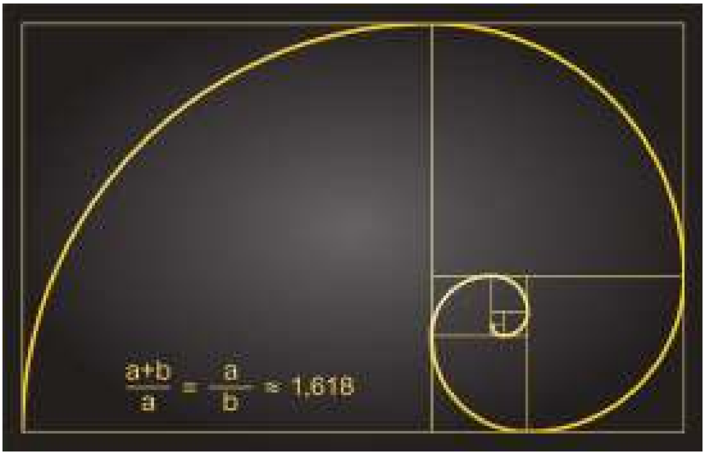


Figura 5: Representação da razão áurea (*golden ratio*).

A história nos mostra algumas de suas aplicações como a construção das Pirâmides de Gizé pelos egípcios antigos. Os gregos antigos também fizeram uso dela para projetar alguns de seus mais monumentos mais clássicos. Além desses exemplos, a relação entre a proporção áurea e as artes teria sua origem no livro "De Divina Proportione" escrito pelo monge italiano Luca Pacioli no século 16. Um de seus mais famosos amigos era o artista Leonardo Da Vinci, o qual foi convidado para ilustrar o manuscrito do monge. Desta ocasião em diante a proporção áurea foi utilizada por diversos artistas do Renascimento com o objetivo de alcançar maior beleza e equilíbrio em suas criações.

O Homem Vitruviano e a Monalisa são exemplos famosos da utilização da razão áurea feitos por Leonardo da Vinci em 1490 durante o período do Renascimento. Também conhecido como "O Homem de Vitrúvio" representa o ideal clássico de equilíbrio, harmonia, beleza e perfeição observadas no corpo humano. Sua inspiração tem como fonte o conceito desenvolvido pelo arquiteto romano Marcos Vitrúvio Polião autor da obra De Architectura Libri Decem (Dez Livros sobre a Arquitetura), no qual apresenta o que ele denominou de "proporção divina" baseada em figuras geométricas perfeitas e equações matemáticas.

O desenho representa uma figura masculina nua, com os braços e as pernas abertas em duas diferentes posições simétricas e sobrepostas inscritas em um círculo e em um quadrado. A posição da cabeça foi meticulosamente calculada em um oitavo da altura total. O mais interessante é notar que na mudança entre as duas posições o centro da figura dá a ideia de movimento e parece se mover. No entanto, o verdadeiro centro de gravidade da figura representado anatomicamente pelo umbigo permanece imóvel.

Um texto que acompanha o desenho originado nos diários de Da Vinci são conhecidos como **Cânone das Proporções.** Nos dias de hoje o desenho faz parte da coleção exposta na Gallerie dell'Accademia (Galeria da Academia) na cidade de Veneza na Itália.

Traduzindo em proporções matemáticas pode-se dizer que no Homem VitruvianoomemHO: um palmo corresponde ao comprimento de quatro dedos, um pé corresponde ao comprimento de quatro palmos, o comprimento dos braços de um homem ou a envergadura dos braços é igual à sua altura, a distância entre o fundo do queixo e o nariz corresponde a um terço do comprimento do rosto, o comprimento da orelha corresponde a um terço da face e que o comprimento do pé corresponde a um sexto da altura da pessoa.

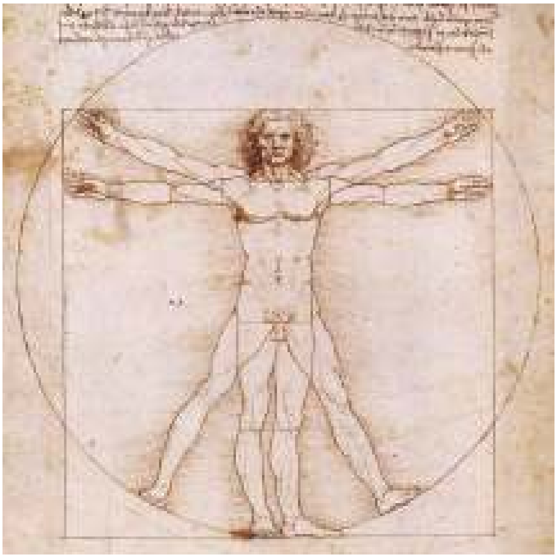


Figura 6: Representação do Homem Vitruviano de Leonardo da Vinci (*Vitruvian Man*).

O cérebro humano tem funções que evidenciam o controle dos movimentos com precisão e planejamento espacial em uma sequência ordenada e temporal de acontecimentos. Essa preciosa "auto percepção" faz com que ela se prepare para suas ações medindo, controlando e reprogramando os movimentos do corpo de acordo com suas necessidades. Essa também é uma "matemática" levada do cérebro para o corpo.

Algumas situações de deficiências nos ajudam a pensar e entender essa auto percepção. Por exemplo, você já se perguntou como os cegos conseguem andar pelas ruas de uma cidade? Alguns preferem o auxílio de outra pessoa que enxerga, já outros mapeiam suas rotas e caminhos partindo de um ponto de referência previamente conhecido por eles e alguns fazem uso da bengala ou de um cão guia treinado.

Alguns cegos utilizam a sinaleira sonora numérica para "contar" o tempo que levam para atravessar a rua. O sinal sonoro indica que o tempo vai acabando e o bipe da sinaleira vai ficando mais rápido, ou em outros, ele apenas cessa.

A bengala eletrônica também é um tipo de marcador na detecção de objetos localizados na altura dos pés, pernas, tronco e cabeça, fazendo com que o cego "perceba" os obstáculos que estão à sua volta.

Figura 7: Mulher cega se locomovendo com assistência de um cão guia e da bengala. Fonte: foto por Brailleliga [CC BY-SA 3.0 nl (https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/nl/deed.en)], via Wikimedia Commons.

Outro exemplo são as estratégias cognitivas e pistas sensoriais no campo da realidade virtual utilizados na reabilitação de pacientes parkinsonianos.

Trata-se de trajetos com pistas quadriculadas em preto e branco no chão ou visualizados em óculos com campo visual, bengalas com raio laser entre outras dispositivos que possibilitam “cálculos” mentais transpostos para as ações e movimentos utilizados no tratamento dessas pessoas.

Leitura adicional sugerida

Mourão, C. A.; Abramov, D. M. **Fisiologia Essencial**. Rio de Janeiro: Guanabara Koogan, 2013. p. 189-224.

GAZZANIGA, M.; HEATHERTON, T. **Ciência Psicológica: Mente, Cérebro e Comportamento**. Porto Alegre: Artmed, 2005.

KANDEL, E. R.; SCHWARTZ, J. H.; JESSELL, T. M. **Princípios de Neurociência, 4ª ed**. NY: Mac Graw Hill Education e Porto Alegre: Artmed, 2014.

O papel dos métodos perturbativos na Física e uma introdução aos diagramas de Feynman

Gustavo Pazzini de Brito[1]

Introdução: A relação entre a Matemática e a Física

De forma geral, a física tem como objetivo a descrição da natureza e de seus fenômenos. Isso envolve uma compreensão das leis (princípios) que regem o comportamento da natureza, a modelagem de fenômenos com base nesse conjunto de leis e a possibilidade de realizar previsões acerca da evolução de sistemas físicos.

Nesse contexto, a matemática aparece como sendo a linguagem natural da física. Ou seja, é por meio de equações matemáticas que nós descrevemos os fenômenos observados. Além disso, muitas vezes a matemática pode ser utilizada como ferramenta de exploração de novos domínios da física.

Contudo, muitas vez, a descrição matemática de sistemas física de interesse se dá em termos de sistemas equações que apresentam um elevado grau de sofisticação. Como consequência, em grande parte dos sistemas físicos as equações que os descrevem sequer podem ser solucionadas de forma exata. Nesse sentido, a descrição da natureza e dos seus fenômenos nos coloca diante da necessidade do desenvolvimento de métodos de aproximação que nos permitam extrair informações das diversas equações que permeiam a física.

No restante desse capítulo falaremos de um esquema de aproximação conhecido como *método perturbativo*. Nesse contexto, apresentaremos as ideias básicas desse método por meio de dois exemplos simples. Na sequência, discutiremos sobre a sua relevância no estudo da física de partículas elementares

1 Doutorando no Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas.

e das interações fundamentais, procurando estabelecer uma conexão com os famigerados diagramas de Feynman.

Ressaltamos que ao longo desse texto aparecem algumas equações que (provavelmente) não são familiares ao leitor, no entanto, isso não deve ser encarado como um impedimento para seguir com essa leitura. Essas equações estão sendo utilizadas apenas para ilustrar alguns pontos que estão sendo argumentados. Desse modo, o conhecimento técnico necessário para o entendimento completo dessas equações torna-se completamente dispensável para o presente texto.

Métodos perturbativos: Ideias gerais

Os chamados métodos perturbativos estão entre os esquemas de aproximação mais utilizados na física. A ideia básica por trás desse método consiste na busca de soluções aproximadas de um problema matematicamente complicado por meio de correções realizadas sobre uma solução obtida de forma exata a partir de alguma simplificação das equações que descrevem o problema original.

Consideremos, por exemplo, o sistema Sol-Terra-Lua. Embora esse seja um sistema físico familiar a todos, a descrição matemática do mesmo apresenta grande complicações e, como consequência, não sabemos resolver de forma exata o conjunto de equações que o descreve. Esse tipo de sistema se enquadra no que nós chamamos de problema de três corpos e possui grande relevância no contexto da astronomia e mecânica celeste. Nesse contexto, a grande dificuldade técnica aparece como uma consequência da atração gravitacional mútua entre os três corpos presentes no sistema.

Entretanto, existem detalhes que nos permitem acessar informações aproximadas sobre a evolução desse tipo sistemas. Digamos que o nosso interesse se resuma ao estudo do movimento orbital da Terra. De forma geral, as equações de movimento que descrevem a órbita da Terra devem levar em conta a ação do campo gravitacional do Sol e da Lua. Contudo, como nós sabemos, massa da Lua é muito menor que a massa da Terra e do Sol. Como consequência disso, a força gravitacional exercida pelo Sol (sobre a Terra) será muito maior do que a força exercida pela Lua (sobre a Terra). Isso significa que o movimento orbital da Terra deve ser majoritariamente determinado pela interação Sol-Terra. Essa simples observação nos permite realizar simplificações consideráveis nas equações de movimento que descrevem a órbita terrestre. Como consequência dessas simplificações, as equações de movimento correspondentes ao sistema Sol-Terra podem ser resolvidas de forma exata. Desse modo, o movimento orbital da Terra no contexto do sistema completo (Sol-Terra-Lua) pode ser descrito em termos do movimento da Terra na ausência da Lua, mais correções (perturbações) causadas pela presença do campo gravitacional gerado pela Lua. Isto é

Órbita da Terra (Sol-Terra-Lua)	=	**Órbita da Terra (Sol-Terra)**	+	**Perturbações**

O primeiro termo do lado direito dessa "equação" corresponde a uma órbita elíptica da Terra (com o Sol em um dos seus focos), enquanto o termo adicional corresponde a uma série de correções causadas pela interação Lua-Terra. Essas perturbações são responsáveis, por exemplo, pelos efeito de maré.

Devemos ressaltar que mesmo o sistema Sol-Terra-Lua já corresponde a uma simplificação de um problema ainda mais complicado. Na realidade, as equações de movimento que descrevem esses objetos ainda devem levar em conta a interação gravitacional com os outros planetas do Sistema Solar. Isso introduz novas complicações nas equações de movimento e, portanto, novas perturbações no movimento orbital da Terra.

Embora o exemplo discutido acima tenha sido atacado somente de forma q ualitativa, ele contém as ideias básicas por trás do método perturbativo. De forma geral, o emprego de métodos perturbativos na solução de um problema físico pode ser representado em termos do seguinte diagrama

Solução de um Problema Complicado	=	**Solução de um Problema Simples**	+	**Perturbações**

Métodos perturbativos: Um exemplo simples

A fim de complementar a discussão apresentada na seção anterior, consideremos agora um exemplo simples de aplicação dos métodos perturbativos. Diferentemente da situação apresentada anteriormente, trabalharemos agora com um exemplo desprovido de conexão com a física. No entanto, a natureza simples desse exemplo nos permite uma abordagem quantitativa e, ainda assim, acessível mesmo para um leitor que não possua treinamento matemático avançado.

Consideremos, por exemplo, a seguinte equação algébrica de segundo grau

$$\varepsilon x^2 + x - \frac{1}{4} = 0,$$

onde ε representa um parâmetro real muito menor do que um. O nosso objetivo aqui consiste em resolver a equação acima para a variável *x*. É claro que essa equação pode ser resolvida de forma exata. De fato, utilizando a famosa fórmula de Bhaskara chegamos às seguintes soluções

$$x_1 = -\frac{1}{2\varepsilon} + \frac{1}{2\varepsilon}\sqrt{1+\varepsilon} \text{ e } x_2 = -\frac{1}{2\varepsilon} - \frac{1}{2\varepsilon}\sqrt{1+\varepsilon}$$

Contudo, considerando que o nosso objetivo ao longo desse texto está relacionado com o estudo de métodos perturbativos, vamos esquecer (por um instante) da possibilidade de se resolver essa equação de forma exata. Desse modo, trabalharemos na obtenção de uma solução perturbativa para essa questão. Comecemos pela observação de que no caso em que ε = 0 a nossa equação torna-se

$$x - \frac{1}{4} = 0\,.$$

Essa é uma simples equação de primeiro grau e, como consequência, a sua solução pode ser obtida de forma imediata, a saber

$$x = \frac{1}{4}.$$

Consideremos, agora, o caso em que ε ≠ 0, mas ainda muito menor que um. Nesse caso, esperamos que a solução da nossa equação original tenha a seguinte forma

$$x = \frac{1}{4} + Perturbações\,.$$

Vamos tentar entender como nós podemos calcular essas perturbações. A ideia básica é que esses termos perturbativos devem possuir as seguintes propriedades:

- Devem depender do parâmetro ε
- Devem se anular no caso em que $\varepsilon = 0$

Trabalharemos, então, com a seguinte proposta de solução perturbativa

$$x = \frac{1}{4} + a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2 + a_3\varepsilon^3 + \ldots$$

onde $\{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$ representa um conjunto de coeficientes a serem determinados. Devemos observar que essas contribuições perturbativas aparecem na forma de uma série com infinitos termos. Isso significa que, se nós estivéssemos interessados em calcular uma solução exata a partir dessa série perturbativa, precisaríamos calcular uma quantidade infinita de coeficientes[2]. Entretanto, estamos interessados em soluções aproximadas. Nesse caso, levando em conta que $\varepsilon << 1$, podemos esperar que o termo $a_2\varepsilon^2$ seja menos relevante que $a_1\varepsilon$, que $a_3\varepsilon^3$ seja menos relevan te que $a_2\varepsilon^2$ e assim por diante. Desse modo, uma expressão levando em conta somente os primeiros termos da série perturbativa representada acima deve fornecer uma boa solução aproximada. Consideremos, por exemplo, uma aproximação envolvendo somente os dois primeiros termos da expansão, isto é

$$x = \frac{1}{4} + a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2.$$

Vejamos como nós podemos calcular os coeficientes a_1 e a_2. De fato, substituindo a expressão acima na equação (4), obtemos o seguinte resultado

$$\varepsilon\left(\frac{1}{4} + a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2\right)^2 + \left(\frac{1}{4} + a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2\right) - \frac{1}{4} = 0\,.$$

Como a nossa aproximação leva em conta somente termos até ordem ε^2, podemos descartar (na equação acima) todos os termos que envolvem contribuições do tipo ε^n, com $n \geq 3$. Assim, podemos reorganizar a equação (11) da seguinte forma

$$\left(a_1 + \frac{1}{16}\right)\varepsilon + \left(a_2 + \frac{1}{32}a_1\right)\varepsilon^2 = 0\,.$$

2 Além disso, precisaríamos nos preocupar com questões ligadas à convergência de séries.

Para que a equação acima seja satisfeita independentemente do valor específico do parâmetro ε, devemos ter

$$a_1 + \frac{1}{16} = 0 \text{ e } a_2 + \frac{1}{32} a_1 = 0 \, .$$

Isso nos permite concluir que $a_1 = -1/16$ e $a_2 = 1/32$. Desse modo, chegamos ao seguinte resultado

$$x = \frac{1}{4} - \frac{\varepsilon}{16} + \frac{\varepsilon^2}{32} \, .$$

De posse desse resultado convidamos ao leitor para realizar um teste com essa suposta solução aproximada: substituindo valores específicos para o parâmetro ε (por exemplo, ε = 0,001), verifique que o resultado obtido a partir da equação (14) é, de fato, uma solução aproximada da equação (4).

Finalmente, devemos ressaltar dois pontos importantes sobre o resultado acima:

- Primeiramente devemos mencionar que o quanto mais próximo de zero for o parâmetro ε, mais preciso se torna o nosso resultado. Além disso, quanto mais termos forem incluídos nessa série perturbativa, melhor será o nosso resultado.
- Em segundo lugar devemos destacar que o resultado obtido acima corresponde a uma aproximação de somente uma das soluções apresentadas em (5), a saber

$$x = -\frac{1}{2\varepsilon} + \frac{1}{2\varepsilon}\sqrt{1+\varepsilon} \approx \frac{1}{4} - \frac{\varepsilon}{16} + \frac{\varepsilon^2}{32} + \cdots .$$

A outra solução, por sua vez, não pode ser obtida a partir de correções perturbativas realizadas sobre o caso ε = 0.

Métodos perturbativos e a Física de Partículas

Os métodos perturbativos estão presentes em praticamente todas as áreas da física. Em especial, destacamos a sua importância no estudo da física de partículas e interações fundamentais. Essa área da física tem como objetivo o estudo e compreensão do comportamento dos constituintes básicos da matéria que compõe o nosso Universo.

Como nós sabemos, o estudo da física de partículas e interações fundamentais envolve conceitos de dois pilares da física moderna: a teoria da relatividade restrita e a mecânica quântica. Até onde nós sabemos, a melhor descrição dessa área da física ocorre por meio da chamada teoria quântica de campos. Nesse contexto, a descrição dinâmica das partículas e a forma como elas interagem entre si, se dá em termos de objetos denominados campos quânticos. De forma geral, a física desses tais campos quânticos obedecem certas leis que, por sua vez, podem ser codificadas em algo que nós denominamos de função lagrangiana. No caso da eletrodinâmica quântica, por exemplo, nós precisamos lidar com a seguinte lagrangiana[3]

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi - e\,A_\mu\bar{\psi}\,\gamma^\mu\psi\,.$$

Essa teoria descreve o comportamento de elétrons (e^-), pósitrons (e^+) e fótons (γ). Devemos ressaltar que a eletrodinâmica quântica representa um dos exemplos mais bem sucedidos dentre as teorias da física moderna, apresentando resultados teóricos extremamente precisos em comparação com dados experimentais.

Como nós poderíamos desconfiar, as equações que aparecem nas teorias quânticas de campos apresentam alto grau de complicação e, como consequência, não sabemos como resolvê-las de forma exata. Desse modo, mais uma vez os métodos perturbativos aparecem como "salvadores da pátria", nos permitindo calcular (de forma aproximada) quantidades físicas a partir de uma teoria quântica de campos. Para entender como isso funciona (pelo menos no contexto da eletrodinâmica quântica), vamos tentar o significado de cada um dos termos presentes na lagrangiana escrita acima

- O termo $-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2$ representa a dinâmica do fóton. Isto é, descreve como essa partícula se propaga no espaço-tempo;
- A contribuição $\bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi$ está associada com a descrição da dinâmica de elétrons e pósitrons;
- Finalmente, o termo $-e\,A_\mu\bar{\psi}\,\gamma^\mu\psi$ representa a interação entre elétrons, pósitrons e fótons.

3 Conforme mencionado anteriormente, o leitor não precisa se preocupar em tentar compreender os detalhes desse tipo de equação.

Suponhamos que nós pudéssemos “desligar” o termo de interação. Nesse caso, a eletrodinâmica quântica descreveria o comportamento de elétrons, pósitrons e fótons, mas como partículas livres, isto é, sem interação entre elas. Essa versão simplificada da eletrodinâmica quântica pode ser representada em termos da seguinte lagrangiana

$$\mathcal{L}_0 = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi .$$

Diferentemente da teoria descrita pela expressão (16), as equações que aparecem no contexto dessa versão simplificada da eletrodinâmica quântica podem ser solucionadas de forma exata[4]. Assim, utilizando métodos perturbativos nós podemos calcular quantidades físicas na eletrodinâmica quântica (com o termo de interação) a partir de correções realizadas sobre as soluções (exatas) obtidas por meio da lagrangiana $\mathcal{L}_0$ (com as interações “desligadas”), isto é

Soluções da Eletrodinâmica Quântica (com interações)	=	**Soluções da Eletrodinâmica Quântica (sem interações)**	+	**Perturbações**

As contribuições representados como “perturbações” carregam informações relacionadas ao termo de interação entre os elétrons, pósitrons e fótons.

Ressaltamos que a utilização de métodos perturbativos no contexto da eletrodinâmica quântica só é possível graças ao fato de que o termo de interação possui “intensidade” muito menor do que as contribuições associadas com a propagação dos elétrons, pósitrons e fótons. Assim, podemos encarar a contribuição $-e A_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$ de forma análoga ao termo ε x^2 presente na equação de segundo grau investigada anteriormente.

Diagramas de Feynman

Mesmo lançando mão de métodos perturbativos, a maior parte dos cálculos que aparecem no estudo da física de partículas e interações fundamentais ainda são bastante trabalhosos e envolvem uma série de ferramentas

4 É claro que isso ainda envolve uma série de ferramentas matemáticas avançadas.

matemáticas avançadas. Felizmente, o físico Richard P. Feynman desenvolveu um método (revolucionário) que nos permite obter uma série de resultados em física de partículas e interações fundamentais a partir do desenho de alguns diagramas (gráficos) razoavelmente simples.

Vamos tentar explorar, mesmo que de forma simplificada, as ideias básica por trás do diagramas de Feynman. Conforme mencionado anteriormente, a descrição da física de partículas e interações fundamentais se dá em termos da teoria quântica de campos. Nesse contexto, as informações físicas de interesse podem ser obtidas por meio do cálculo das chamadas amplitudes de probabilidade, que são quantidades associadas com a probabilidade de ocorrência de um dado processo físico. De forma genérica representaremos essa quantidade por $\mathcal{A}(X)$, onde *X* representa o processo físico em questão. Alguns exemplos são:

- $\mathcal{A}(\gamma \to \gamma)$ – representa a amplitude de probabilidade de um fóton se propagar entre dois pontos do espaço-tempo;
- $\mathcal{A}(e^- \to e^-)$ e $\mathcal{A}(e^+ \to e^+)$ – representam, respectivamente, as amplitudes de probabilidade associada com a propagação de elétrons e pósitrons;
- $\mathcal{A}(e^- + e^+ \to e^- + e^+)$ – denota a amplitude de probabilidade de um elétron interagir com um pósitron, resultando em um par elétron-pósitron;
- $\mathcal{A}(e^- + e^+ \to \gamma + \gamma)$ – amplitude de probabilidade de um elétron interagir com um pósitron, resultando em um par de fótons (aniquilação de pares);
- $\mathcal{A}(\gamma + \gamma \to e^- + e^+)$ – representa a amplitude de probabilidade de um processo de criação de um par elétron-pósitron a partir da interação de dois fótons.

De forma geral, não sabemos como calcular (exatamente) as quantidades físicas mencionadas acima e, portanto, precisamos recorrer aos métodos perturbativos para obter informações aproximadas. Desse modo, esperamos obter resultados obter resultados com a seguinte estrutura

$$\mathcal{A}(X) = \mathcal{A}_0(X) + Perturbações,$$

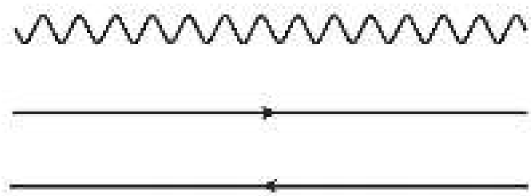
onde $\mathcal{A}_0(X)$ representa uma amplitude de probabilidade calculada a partir de uma teoria livre, isto é, com interações "desligadas". Diferentemente do que ocorre com $\mathcal{A}(X)$, a amplitude $\mathcal{A}_0(X)$ pode ser calculada para qualquer processo de interesse.

Mas como nós podemos obter informações sobre as "perturbações" que aparecem na equação acima? No contexto da eletrodinâmica quântica[5], é possível verificar que esses termos perturbativos podem ser completamente calculados em função das amplitudes $\mathcal{A}_0(\gamma \to \gamma)$, $\mathcal{A}_0(e^- \to e^-)$ e $\mathcal{A}_0(e^+ \to e^+)$, além de mais um objeto relacionado ao termo de interação $(-e\,A_\mu \bar{\psi}\,\gamma^\mu \psi)$. Diante desse cenário, Feynman propôs que essas três amplitudes fossem representadas por diagramas:

$\mathcal{A}_0(\gamma \to \gamma) \sim$

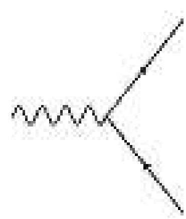
$\mathcal{A}_0(e^- \to e^-) \sim$

$\mathcal{A}_0(e^+ \to e^+) \sim$



Essas linhas recebem o nome de *propagadores*. Além disso, o tal objeto relacionado com o termo de interação será representado como um diagrama de *vértice*, a saber

$$-e\,A_\mu \bar{\psi}\,\gamma^\mu \psi \sim$$

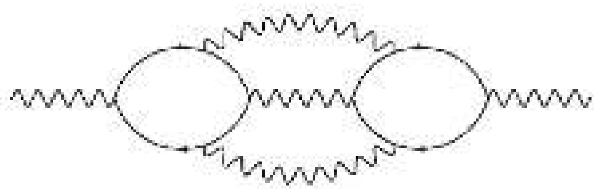


Considerando que os termos perturbativos podem ser completamente calculados em função dos elementos mencionados acima, Feynman chegou à conclusão de que qualquer amplitude $\mathcal{A}(X)$ pode ser calculada pela soma de todos os diagramas construídos a partir da junção dos gráficos introduzidos acima. Em geral, esses diagramas devem levar em conta as seguintes regras:

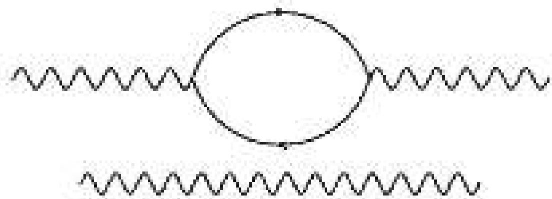
- Somente os diagramas *conexos*[6] devem ser considerados. Isso significa que nós podemos incluir gráficos do tipo:

5 Embora estejamos nos restringindo ao caso da eletrodinâmica quântica, esse tipo de argumentação pode ser adaptada para outras teorias quânticas.

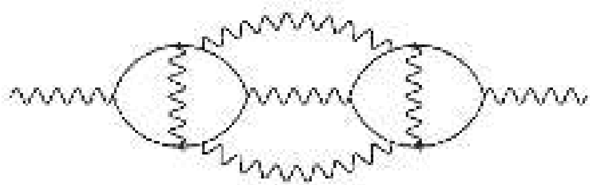
6 Um diagrama conexo pode ser pensando como aquele que nós podemos desenhar sem retirar a ponta do lápis da superfície do papel.



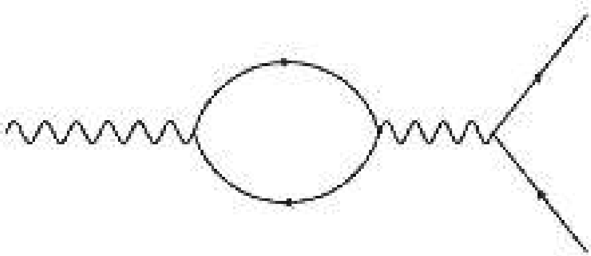
Porém, não podemos utilizar diagramas como:



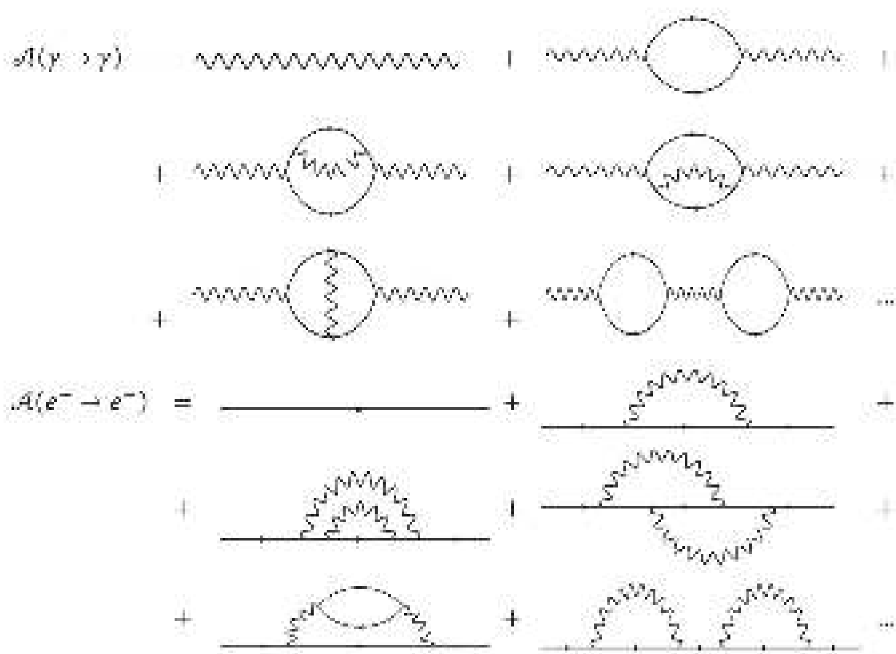
- Para um dado processo *X*, as linhas que aparecem nas extremidades dos diagramas de Feynman devem ser compatíveis com o conteúdo de partículas presentes nesse processo. Por exemplo, no cálculo de uma amplitude associada com o processo $\gamma \rightarrow \gamma$ nós podemos incluir gráficos do tipo:



No entanto, não podemos utilizar diagramas da forma



De posse dessas regras elementares, nós podemos representar de forma diagramática a série perturbativa associada com a amplitude de probabilidade de qualquer processo físico da eletrodinâmica quântica. Vejamos alguns exemplos:



Observe que nós consideramos somente as primeiras contribuições de uma série perturbativa com infinito termos. Além disso, como nós podemos observar, esses termos estão sendo organizados com relação ao número de vértices utilizados na construção dos diagramas. A ideia básica por trás dessa organização está relacionada com o fato de que quanto maior o número de vértices em um dado gráfico, menor será a sua relevância para o processo.

Infelizmente o nosso trabalho não termina por aqui. De fato, mesmo após a construção de uma série perturbativa por meio dos diagramas de Feynman, cada termo dessa séria ainda deve ser convertido em uma expressão matemática[7] e, como consequência, a obtenção de quantidades físicas ainda exige uma grande quantidade de cálculos que extrapolam os propósitos desse texto.

Considerações finais

Ao longo desse texto procuramos apresentar uma introdução aos chamados métodos perturbativos. Com base em um problema de mecânica celeste

7 Diga-se de passagem, em geral essas expressão não são muito simples.

(sistema Sol-Terra-Lua), apresentamos argumentos qualitativos que nos permitiram ter uma visão geral dos métodos perturbativos e da sua importância para a física.

Na sequência, estudamos uma aplicação dos métodos perturbativos ao problema de encontrar as soluções de uma equação algébrica de segundo grau. Embora esse problema tenha sido apresentado sem uma conexão direta com a física, acreditamos que a sua simplicidade permite que mesmo pessoas que não possuem um treinamento matemático avançado tenham acesso aos elementos básicos dos métodos perturbativos.

Finalmente, discutimos a relevância dos métodos perturbativos no contexto da física de partículas e interações fundamentais. Como nós vimos, além de ser uma ferramenta necessária para se calcular quantidades físicas a partir da teoria quântica de campos, o métodos perturbativos possuem uma bela representação em termos dos chamados diagramas de Feynman.

Agradecimentos

Eu gostaria de manifestar o meu agradecimento aos membros do comitê organizador da *6ª Jornada de Divulgação Científica* do Centro de Ciências da UFJF pela oportunidade de apresentar a minha singela contribuição a esse evento. Em especial, eu gostaria de agradecer aos professores Eloi e Thales pelo convite realizado. Adicionalmente, deixo registrado o meu agradecimento à Fernanda Alvarim Silveira pela leitura atenciosa e correções realizadas sobre esse texto.

Formação intercultural de professores indígenas para ensinar Matemática: os jogos como proposta pedagógica

Keli Cristina Conti[1]
Danielle Alves Martins[2]
Nayara Katherine Duarte Pinto[3]

Introdução

O trabalho aqui relatado é fruto de uma experiência vivenciada no curso de Formação Intercultural de Educadores Indígenas (FIEI) da Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG) no segundo semestre de 2016. Ele integra um projeto de pesquisa em desenvolvimento intitulado "Contribuições do Laboratório de Ensino de Matemática para a formação inicial do professor que ensina Matemática" que visou ampliar o Laboratório de Ensino de

1 Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG). E-mail: keli.conti@gmail.com. Graduada em Matemática pelas Faculdades Integradas de Amparo (1999) e em Pedagogia pelo Centro Universitário de Araras (2011). Possui Mestrado em Educação pela linha de pesquisa Educação Matemática da Faculdade de Educação da Unicamp (2009) e Doutorado em Educação pela linha de pesquisa Ensino e Práticas Culturais da Faculdade de Educação da Unicamp (2015). Atualmente é Professora Adjunta da Faculdade de Educação (FAE) da Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG), no Departamento de Métodos e Técnicas de Ensino, integrando o grupo de Educação Matemática.

2 Secretaria de Educação de Minas Gerais (SEE). E-mail: daniellemartins125@hotmail.com. Graduada em Matemática (Licenciatura) pela Universidade Federal de Minas Gerais (2012), Especialista em Mídias na Educação pela Universidade Federal de Ouro Preto (2015) e Mestre em Educação pelo Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade Federal de Minas Gerais, linha de pesquisa Educação Matemática. Atualmente é professora da Secretaria de Educação de Minas Gerais.

3 Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG). E-mail: nayarakatherine@hotmail.com. Graduada em Matemática (Licenciatura) pela Universidade Federal de Minas Gerais (2016) e Mestranda pela linha de pesquisa Educação Matemática do Mestrado Profissional em Educação e Docência (Promestre) da Faculdade de Educação da mesma universidade. Atualmente é professora da Secretaria de Educação de Minas Gerais.

Matemática (LEM) na Faculdade de Educação (FaE/UFMG). Além disso, esse projeto busca analisar e interpretar práticas de formação e de atuação de futuros professores de forma a compreender e ressaltar a importância de um LEM para a formação inicial do professor que ensinará Matemática e seu reflexo no processo de ensino e aprendizagem dos estudantes.

Podemos dizer, que o trabalho que aqui relataremos, perpassou por essas questões, mas sem deixar para trás a interculturalidade e as produções dos próprios povos indígenas. Podemos dizer que nossa prática foi uma busca por apresentar possíveis novas estratégias reconhecendo outras várias trazidas pelos estudantes indígenas.

Nessa direção, vale ressaltar que a utilização dos nomes reais dos estudantes, em algumas passagens do texto, foi um pedido deles durante uma conversa, em sala, posterior ao desenvolvimento das atividades. Nessa conversa, apresentamos o texto e os participantes destacaram que a presença de seus nomes no artigo seria uma oportunidade de divulgar e valorizar suas etnias.

A formação de professores indígenas na UFMG

A atividade foi desenvolvida na disciplina "Prática de ensino", do curso de Formação Intercultural de Educadores Indígenas (FIEI), na turma de habilitação em Matemática. O FIEI é um curso da Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG) que visa à formação de professores indígenas, com enfoque intercultural, para atuar nos Ensinos Fundamental e Médio. O curso possui quatro áreas de concentração (habilitações): Língua, Arte e Literatura (LAL); Ciências Sociais e Humanidades (CSH); Ciências da Vida e da Natureza (CVN) e Matemática (UFMG, 2011).

Mais especificamente, atuamos nesta última área de concentração, sendo que a primeira autora era, no período de desenvolvimento da atividade, a professora responsável pela habilitação e pela disciplina em que foram desenvolvidas as atividades; e as outras duas autoras eram bolsistas do curso.

O curso está organizado em tempos/espaços diferenciados: são oito etapas chamadas de intensivas, desenvolvidas na universidade, e oito etapas chamadas de intermediárias, período de formação que ocorre em território indígena (meio sociocultural). Entre as etapas também são desenvolvidas atividades propostas pelos professores aos estudantes, como por exemplo, atividades de pesquisa, de campo, estudo do meio, relatórios, estágio, entre outras. No desenvolvimento das atividades descritas neste trabalho, participaram trinta e quatro estudantes indígenas, das etnias Guarani, Maxakali, Pataxó, Pataxó Hã Hã Hãe e Xakriabá. Eles estavam no quinto período do curso e a maioria deles já eram professores em seus territórios indígenas.

As atividades, que aqui descreveremos, foram desenvolvidas com os estudantes organizados em grupos ou individualmente. Vale ressaltar que a primeira atividade foi realizada na etapa intensiva e a segunda na etapa intermediária.

Feita uma breve descrição do contexto e dos estudantes, a seguir, apontaremos reflexões importantes, a nosso ver, sobre a educação escolar indígena, para posteriormente apresentar breves notas a respeito da importância do uso de jogos.

A educação escolar indígena

Neste trabalho, concordamos com Brito (2012) sobre o fato de que a educação escolar indígena é distinta da educação indígena. Isso porque compreendemos a

> Educação Escolar Indígena como aquela que é totalmente vinculada à escola, regida, muitas das vezes, pelo modelo da escola tradicional (não indígena), podendo configurar-se como municipal, estadual ou de responsabilidade de ONGs e outras instituições. Já a Educação Indígena configura-se como a educação já existente em uma comunidade indígena e diz respeito a todos os ensinamentos referentes à tradição de um povo e/ou cultura (BRITO, 2012, p.29).

Conforme aponta Silva (2001), a Constituição Brasileira deve garantir aos índios uma educação escolar indígena "respeitosa de suas línguas e culturas, de seus modos próprios de viver e pensar, de valorização de seus conhecimentos e dos processos próprios de sua produção e transmissão" (SILVA, 2001, p.31). Para isso, é necessária uma educação que considere as especificidades dos povos indígenas, que busque contribuir para a valorização da identidade indígena e que tenha os saberes desses povos na centralidade de qualquer ação educacional. Pois, segundo Ferreira (2005)

> é vital estar claro: os desejos indígenas são fundamentais, as línguas indígenas são fundamentais, os mitos de origem indígenas são fontes que dinamizam as suas culturas, seus universos constituem bases para a construção de uma educação escolar em um só tempo diferenciada e significativa (FERREIRA, 2005, p.169).

Nos últimos anos, o encontro entre indígenas e não indígenas tem se tornado cada vez mais intenso. Com isso, muitas vezes, laços de dependência são fortificados pela sociedade dominante. Em vista disso, evidencia-se a importância do fortalecimento da educação escolar indígena:

> a construção de um espaço de aprendizagem e ensino que em um só tempo valorize os conhecimentos tradicionais da cultura indígena (na qual se efetiva a construção) e os conhecimentos provenientes do meio cultural dominante (FERREIRA, 2005).

Nesse sentido, esses espaços educacionais requerem uma perspectiva intercultural de educação, que leve em conta as necessidades indígenas e que lhes assegure o que é garantido por lei.

As sequências didáticas desenvolvidas com os indígenas e relatadas neste trabalho foram desenvolvidas levando em conta todas essas questões. Para além dessas questões, consideramos também o potencial dos jogos e do uso de computadores para uma formação intercultural. Por isso, a seguir, apontaremos breves características importantes do uso dos jogos e dos computadores em relação ao ambiente educacional.

Jogos e computadores

Concordamos com Grando (2004), que afirma que ter os jogos como ferramenta de aprendizagem é essencial na instituição escolar para que os estudantes possam ter a oportunidade de deixar aflorar sua capacidade de elaborar estratégias, fazer previsões, perceber exceções e realizar a análise de possibilidades acerca da situação de jogo. Daí a importância dos jogos na formação de professores e, em especial, dos que ensinam Matemática.

Além disso, os jogos são ressaltados nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's), desde os Anos Iniciais, como um meio para se "fazer Matemática na sala de aula" (BRASIL, 1998), destacando que

> um aspecto relevante nos jogos é o desafio genuíno que eles provocam no aluno, que gera interesse e prazer. Por isso, é importante que os jogos façam parte da cultura escolar, cabendo ao professor analisar e avaliar a potencialidade educativa dos diferentes jogos e o aspecto curricular que se deseja desenvolver. (BRASIL, 1998. p. 42).

Da mesma forma percebemos o uso dos computadores, que, nos últimos anos, passou ser uma das possibilidades de se desenvolverem atividades investigativas que contribuam para aprendizagem dos estudantes.

Segundo Fernandes (2004), o computador, como tecnologia educacional, favorece novas maneiras de acessar informações, possibilitando novas fontes de pesquisa em sala. Dessa forma, a exploração de *softwares* educativos no computador, por professores e estudantes, pode contribuir de forma positiva em diferentes conteúdos disciplinares.

Ademais, na compreensão de Bettega (2010, p. 18), a utilização de tecnologias "deve servir para enriquecer o ambiente educacional, propiciando a construção de conhecimento por meio de uma atuação ativa, crítica e criativa por parte de alunos e professores". A presença dos computadores em práticas educacionais permite a utilização, separadamente ou em combinações, de sons, imagens e animações, permitindo, assim, novas maneiras de nos comunicar. Essas possibilidades contribuem para a produção e disseminação de informações.

A partir dessas considerações, referentes ao potencial dos jogos aliado ao uso do computador, na próxima seção, apresentaremos a primeira atividade desenvolvida.

O uso do jogo Trinca-Espinhas[4]

O jogo Trinca-Espinhas faz parte de um CD-ROM disponibilizado gratuitamente pelo Ministério de Educação de Portugal. Nesse CD-ROM, chamado de Clic Mat (PORTUGAL, 2005), são disponibilizadas trinta e duas atividades interativas destinadas a estudantes do 1º ao 9º ano do Ensino Fundamental. Em nossa prática, utilizamos atividades pertinentes para a formação de professores que atuarão com estudantes a partir do 6º ano.

Passaremos a relacionar o desenvolvimento do jogo e sua utilização na sala de aula com os "momentos do jogo", definidos por Grando (2004, p. 45), ou seja, as situações que consideramos produtivas para o ambiente escolar. De acordo com a autora, são sete momentos: 1) familiarização com o material do jogo; 2) reconhecimento das regras; 3) jogar para garantir as regras; 4) intervenção pedagógica verbal; 5) registro do jogo; 6) intervenção escrita e 7) jogar com competência (GRANDO, 2004).

A princípio, garantimos que os estudantes instalassem previamente em seus computadores o *software*[5]. Nesse sentido, o primeiro momento foi o de "Familiarização com o material do Jogo" (GRANDO 2004, p. 45), que consistiu na localização do jogo entre os demais contidos no *software* e o primeiro contato com sua interface (Figura 1). Gostaríamos de ressaltar que os estudantes não conheciam o jogo.

---

4 Uma versão preliminar de análise desse jogo foi apresentado e publicado. Consulte: CONTI, K. C.; PINTO, N. K. D.; MARTINS, D. A. Uso de jogos e do computador nas aulas de Matemática: jogando com o trinca-espinhas. In: XIII Encontro Paulista de Educação Matemática, 13., 2017, São Paulo. Anais... São Paulo: SBEM, 2017. p. 639.

5 Disponível em: http://www.dge.mec.pt/clicmat-atividades-interativas-de-matematica.

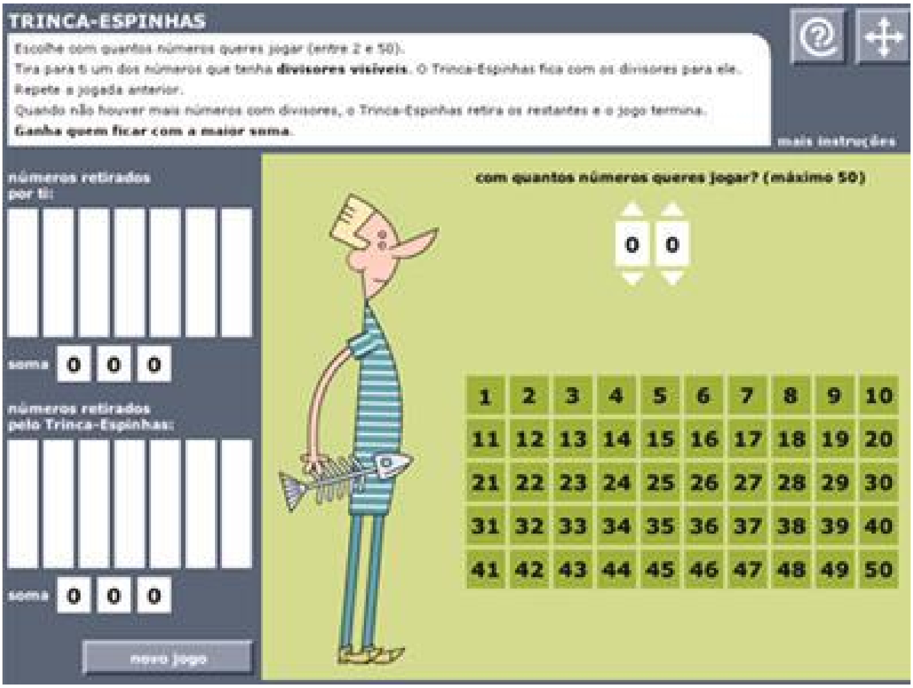


Figura 1: Interface do jogo Trinca-Espinhas[6]. Fonte: Portugal (2005).

Em seguida, passamos para o momento de "reconhecimento das regras" (GRANDO, 2004, p. 51). Elas são visualizadas no topo da página e permanecem visíveis durante todo o tempo (Quadro 1). Nessa fase, foram lidas todas as regras, durante um diálogo com os estudantes.

Quadro 1: Regras do jogo Trinca-Espinhas:

Regras do jogo: 1. Escolhe o intervalo de números com que queres jogar. 2. Podes escolher qualquer número que tenha divisor na lista. 3. O Trinca-Espinhas fica com os divisores dos teus Números. 4. Tu pontuas o total dos números que escolheste. 5. O Trinca-Espinhas pontua a soma dos divisores dos teus números e os que no fim restarem na lista.

Fonte: Portugal (2005).

6 Fonte: Portugal, 2005.

Após a leitura das regras, foi simulada a primeira partida, buscando garantir a apropriação das regras pelos estudantes, ou seja, realizar o que Grando (2004, p. 54) chama de "jogar para garantir as regras".

Realizamos a primeira partida de maneira participativa e coletiva, sempre indagando aos estudantes qual número gostariam de retirar e observando os números que ficavam com o Trinca-Espinhas. Ao fim, constatamos que o Trinca-Espinhas foi o vencedor. Como Grando (2004) enfatiza, trata-se de um momento para "o jogar espontâneo", para garantir o entendimento das regras. Logo após a partida de demonstração, os estudantes começaram uma nova partida, alguns em dupla e outros individualmente.

As primeiras partidas foram ganhas pelo Trinca-Espinhas. Isso foi algo que incomodou e, ao mesmo tempo, motivou os estudantes, pois queriam ganhar o jogo. Um dos estudantes conseguiu rapidamente uma estratégia para vencer o Trinca-Espinhas: selecionou dois números para jogar. Como isso, ele retirou o número 2 e o Trinca-Espinhas retirou o número 1. Totalizando 2 pontos para estudante e 1 ponto para o Trinca-Espinhas.

Os demais estudantes foram instigados por essa estratégia de selecionar uma quantidade reduzida de números para visualizar melhor as possibilidades, o que permitiu que alguns estudantes ampliassem um pouco o que foi proposto pelo colega, jogando com 5 números, por exemplo, mas de forma a vencer.

Durante nossa intervenção verbal, ficaram mais nítidos os objetivos do jogo quanto ao estudo dos múltiplos, divisores e os números primos. Este momento corresponde ao definido por Grando (2004, p. 55) como "intervenção pedagógica verbal", em que buscamos, por meio dos desafios e das intervenções ao longo do jogo, estimular os estudantes a repensarem suas jogadas e estratégias para atingir os desafios, como, por exemplo, nas situações transcritas anteriormente. No intuito de a turma desenvolver estratégias para vencer o Trinca-Espinhas em situações cada vez mais complexas, após a familiarização com o jogo e suas regras, optamos por lançar desafios verbalmente e de forma coletiva.

Nesse sentido, no primeiro desafio coletivo, os estudantes deveriam escolher jogar com 30 números e tinham que ganhar do Trinca-Espinhas.

Durante um tempo, observamos que nenhum estudante tinha superado o desafio inicial. Diante disso, ficamos circulando entre as mesas questionando os estudantes sobre quais seriam as estratégias mais adequadas para se conquistarem mais pontos.

A partir dos debates entre os estudantes, surgiu uma boa estratégia para se começar o jogo: iniciar escolhendo o maior número primo como a jogada que possibilita a maior pontuação inicial.

O primeiro estudante a ganhar foi o Manoel Aymoapte. Ele fez 296 pontos e o Trinca-Espinhas, 169. A partir desse momento, apareceram outros ganhadores, mas com menos pontos que o Manoel Aymoapte. Na continuidade dos desafios, sucedeu-se o momento denominado por Grando (2004, p. 59) de "registro do jogo", em que incentivamos os estudantes a anotarem no caderno as jogadas que eles realizaram para ganhar o jogo. Além disso, pedimos a eles que observassem quais jogadas poderiam ser alteradas para vencer o desafio com somatória maior que as obtidas anteriormente.

Em um segundo momento, o primeiro desafio foi modificado: com os mesmos 30 números escolhidos, os estudantes deveriam obter 300 pontos (pontuação máxima possível com essa quantidade de números). Os estudantes, então, começaram a desenvolver a estratégia de fotografar com o celular todas as jogadas, discutindo depois os ajustes que poderiam contribuir para aumentar a pontuação.

Após muitos registros escritos, fotográficos e discussões, alguns estudantes conseguiram alcançar a pontuação máxima. Depois disso, optamos por realizar uma discussão coletiva a respeito das estratégias utilizadas e das variações encontradas entre a ordem dos números retirados para obtenção da pontuação máxima.

Quanto ao momento da "Intervenção escrita" (GRANDO, 2004, p. 60), em que o trabalho é com problematizações de situações do jogo, optamos por pedir aos estudantes que, em grupos, elaborassem problemas a partir do Trinca-Espinhas, bem como os resolvessem. Durante a elaboração, percebemos que foi necessário voltar ao jogo muitas vezes e conferir as possibilidades.

Optamos por selecionar pelo menos uma proposta de cada grupo de estudantes e propor como uma tarefa a ser realizada na etapa intermediária e, posteriormente, corrigida.

Durante a resolução dos problemas, muitos estudantes relataram que precisaram voltar ao jogo e que, nessa situação, já se lembravam das estratégias e jogavam com "mais competência" (último momento do jogo). Durante a correção das situações, de forma coletiva, não foram sentidas dificuldades na turma.

Infelizmente também foi relatada uma limitação do jogo, por alguns estudantes: a falta de computadores nas escolas indígenas da etnia Xakriabá. Como no exposto pelo estudante Manoel Aymoapte: "Esse jogo é bom, mas para ser jogado é preciso de computador. Isso dificultaria muito nas nossas escolas, nas aldeias, porque nem todas são equipadas com computadores."

Nesse sentido, também discutimos coletivamente possibilidades para a realização do jogo usando cartões de papel ou fichas. Nessa proposta, jogando com dois participantes, um deles retira um número e o seu oponente, seus divisores, somando as fichas ou cartões ao final. E, por isso, consideramos que os estudantes precisam ter um conhecimento mais consolidado de divisores, pois exige maior atenção justamente na retirada dos divisores.

Depois de conhecermos um jogo escolar que faz uso do computador, fez parte do trabalho, já que são estudantes de curso intercultural, durante a etapa intermediária, o resgate e a apresentação ou criação de jogos desenvolvidos nos territórios indígenas de cada etnia. Foram apresentados alguns jogos resgatados de conversa com anciões das aldeias, alguns jogos que os estudantes se lembravam de praticar quando eram crianças, alguns jogos escolares e aqui escolhemos dar destaque para um dos jogos criado por um dos alunos, que passaremos a descrever a seguir.

O cabo de guerra

Daremos destaque para um dos jogos criado por um dos alunos, Kamarú[7]. A ideia inicial de Kamarú foi criar um jogo que levasse em conta aspectos relacionados a cultura indígena para trabalhar conteúdos e conceitos matemáticos, no âmbito escolar. Nessa direção, era de interesse mostrar que é possível usar elementos relativos ao saber tradicional indígena, juntamente com o saber escolar, numa prática pedagógica, nesse caso, um jogo matemático.

7 Nome indígena e preferência do estudante Kevin Robert Dias Santos.

Para ele, este tipo de atividade poderia contribuir para que os alunos melhorassem seu desempenho na disciplina de maneira mais descontraída.

Dentre as diversas práticas culturais do povo Pataxó, este estudante escolheu uma das modalidades tradicionais dos Jogos dos Povos Indígenas: o cabo de guerra. Este jogo, que também pode ser chamado por cabo de força, é então um dos principais jogos praticados pelos indígenas, em especial pelos Pataxós. Segundo Vinha (2004), nos Jogos dos Povos Indígenas, em 2001, "o jogo cabo-de-guerra ocupou uma posição privilegiada: a condição de uma das provas mais esperadas, tanto para os indígenas quanto para o público" (p.4).

A autora relatou também, que o desenvolvimento do jogo deve ser feito a partir de

> duas equipes posicionadas em colunas, frente a frente, segurando uma única corda grossa que se apoia na mão de todos os participantes das equipes. A prova consiste em cada equipe puxar a corda para seu lado, tentando deslocar um objeto que marca o ponto central da corda, até que a equipe contrária se renda pela força (VINHA, 2004, p.4).

Com base na descrição do jogo cabo de guerra, que faz parte da cultura indígena, na próxima seção, apresentaremos o jogo matemático criado por Kamarú.

O jogo Cabo de Guerra Numérico

Esta seção foi escrita a partir do relatório feito e entregue por Kamarú sobre o jogo Cabo de Guerra Numérico, como forma de avaliação da disciplina Prática de Ensino. Em relação a construção do jogo, segundo Kamarú, a maior dificuldade foi estabelecer as regras do mesmo. Nesse sentido, foram necessários diversos testes, onde o jogo foi sendo aprimorado.

Para a implementação do jogo, na etapa intermediária do curso, realizada na aldeia de Boca da Mata[8], foi preciso confeccionar uma quantidade

8 Em cada etapa intermediária há a organização de um grupo de estudantes para receber os colegas, professores e bolsistas da universidade. No caso desta atividade, a etapa intermediária ocorreu na aldeia de Boca da Mata.

expressiva de materiais: tabuleiros, fichas e dados. Segundo Kamarú, foi necessária ajuda para produzir o material.

Além disso, segundo o estudante, o contato anterior com outros jogos foi importante para que ele elaborasse seu próprio jogo:

> Se eu não tivesse conhecido os jogos como o Kalah e principalmente o Contig 60, apresentado no módulo [período intensivo] de estudo do FIEI – matemática - pela professora Keli Cristina, praticamente não teria ideia de como relacionar um jogo matemático com alguma prática cultural. Por isso o jogo criado, que recebeu o nome de Cabo de Guerra Numérico, faz relembrar alguns elementos presentes no jogo Contig 60, como fichas, dados, tabuleiro e sentenças numéricas (Kamarú).

Nesse trecho do relato de Kamarú foram citados dois jogos, o Kalah e o Contig 60, que foram utilizados durante o período que os alunos estavam em uma das etapas intensivas na UFMG. Para obtenção de maiores informações sobre esses jogos sugerimos consultar em Brasil (2008) e Grando (2004).

Segundo Kamarú, o Cabo de Guerra Numérico é um jogo de estratégia que visa trabalhar os cálculos mentais, a partir da sorte com os dados. Para confeccioná-lo são necessários os seguintes materiais: tabuleiro (Figura 3), 42 fichas (21 fichas de cada cor) e 2 dados.

Figura 2: Tabuleiro do jogo Cabo de Guerra Numérico. Fonte: Elaborado por Kamarú.

O jogo deve ser realizado respeitando as seguintes regras:

Regra 1: O lado (1 ou 2) de jogada, e a cor da ficha (a ficha pode ser confeccionada com a cor de preferência de cada um) deve ser decidido antes de começar o jogo. Isso pode ser realizado a partir de vários critérios, como, por exemplo, no "ímpar ou par". A partir daí cada jogador (ou dupla de jogadores) jogam alternadamente. O primeiro jogador lança os dois dados e, através dos números indicados em suas faces superiores, deverá construir uma sentença numérica, usando uma das quatro operações básicas, para obter um resultado com número inteiro positivo. Se, por exemplo, no primeiro dado lançado saísse o número 6 e no segundo dado lançado, o número 2, poderíamos ter as seguintes expressões numéricas e seus respectivos resultados: 6 + 2 = 8, 6 – 2 = 4, 6 x 2 = 12, 6 : 2 = 3.

Observação: Utilizando as quatro operações básicas, e os dois dados, há 21 possibilidades de resultados, sendo 13 números pares: (0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 16, 18, 20, 24, 30, 36) e 8 ímpares: (1, 3, 5, 7, 9,11, 15, 25).

Regra 2: O jogador, após construir a sentença numérica e resolvê-la, colocará a ficha que tenha o número do resultado da sentença no seu lado do jogo. Cada lado do jogo terá oito resultados sendo que os quatro resultados colocados na parte superior ficarão negativos e os quatro resultados colocados na parte inferior continuarão positivos.

Regra 3: Se os resultados das sentenças forem números ímpares terão valores dobrados se forem colocados na parte superior.

Regra 4: Se todas as fichas das possibilidades de combinação dos dois dados lançados numa jogada já tiverem sido utilizadas, deve-se jogar os dados novamente.

Regra 5: O jogo termina quando ambos os lados estiverem completos, tanto parte inferior quanto superior. Vence quem obter o número igual ou mais próximo a "0" na soma de todos os resultados de seu respectivo lado.

Durante o jogo

No período de desenvolvimento da atividade, junto aos estudantes do curso, pudemos notar que na primeira vez que jogamos as regras ainda pareciam um pouco confusas. Após nos familiarizarmos com elas ficou mais fácil e divertido.

Na situação descrita abaixo, um estudante que chamaremos de Jogador 1 (cor verde/lado esquerdo do tabuleiro) joga contra outro estudante, que chamaremos de Jogador 2 (cor laranja/lado direito do tabuleiro) (Figura 4).

Nessa situação de jogo, o Jogador 1 já tem "+ 5" pontos. Pontuação formada pelos resultados obtidos, do lado negativo 0 e do lado positivo 2 e 3. O Jogador 2, tem "+1", formado pelos resultados obtidos do lado negativo -3 (que de acordo com as regras do jogo vale -6, por ser ímpar e estar do lado negativo) e o +7. Ainda na jogada, o Jogador 2, ao tirar nos dados, 2 e 6, opta por fazer uma subtração (6-4) e seleciona a ficha "4" para ser colocada no tabuleiro. O jogador 2, pode optar por colocar sua ficha na parte superior e ela passará a valer "-4", ficando com um total de pontos de "-3" ou poderá colocá-la na parte inferior, em que valerá "+4", e nesse caso ficará com "+5" de saldo. Trata-se de um importante momento para o jogador avaliar qual é a posição mais vantajosa, pois vence o jogo, depois de todas as peças colocadas, quem obtiver soma zero ou mais próxima de zero.

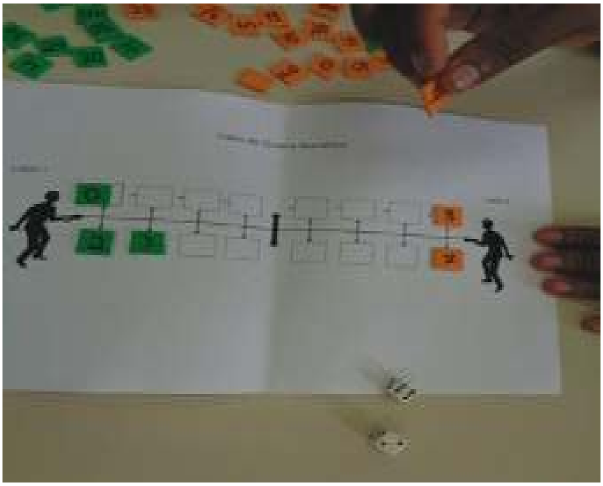


Figura 3: Partida sendo iniciada no tabuleiro. Fonte: Arquivo das autoras.

Os estudantes dependem da sorte ao jogar os dados e de estratégia, a fim de escolher a melhor operação a ser utilizada e a posição da ficha a ser colocada no tabuleiro (superior - negativo ou inferior - positivo). Durante a escolha da melhor estratégia, os estudantes precisam operar com os números inteiros.

O jogo criado por Kamarú teve inspirações em um jogo matemático, no entanto, ele conseguiu relacionar esse mesmo jogo a uma prática indígena. Consideramos que o exercício do estudante em pensar sobre o ensino de matemática por meio da associação deste conteúdo a um jogo indígena resultou em um aprendizado valioso para ele.

Algumas considerações

Consideramos que a proposta atingiu os objetivos almejados, ao oportunizar momentos de discussão com os futuros professores de Matemática acerca de tornar a aprendizagem escolar mais lúdica e divertida por meio de jogos e ao mesmo tempo, por meio de uma abordagem metodológica, valorizar saberes e práticas presentes na cultura dos participantes.

Para além do que foi desenvolvido junto aos estudantes, consideramos que a proposta de escrita deste texto também proporcionou reflexões acerca do trabalho que desenvolvemos juntos a eles, contribuindo com nosso crescimento pessoal. Nesse sentido, esperamos contribuir com a formação de outros professores e futuro professores que ensinam Matemática em diversos contextos e contribuir para que estudantes indígenas do Ensino Fundamental possam se aproximar mais da própria cultura por meio do ensino de matemática a partir dos jogos.

Agradecimentos

Agradecemos o apoio da FAPEMIG (Fundação de Amparo à Pesquisa de Minas Gerais) e a Pró Reitoria de Pesquisa de Universidade Federal de Minas Gerais (PRPQ).

Referências bibliográficas

BETTEGA, M. H. S. **Educação continuada na era digital**. 2 ed. São Paulo: Cortez, 2010.

BRASIL. MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E DO DESPORTO. SECRETARIA DE EDUCAÇÃO FUNDAMENTAL. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. **Pró-letramento: programa de formação continuada de professores dos anos/séries iniciais do ensino fundamental**: matemática. Brasília, 2008.

BRITO, R. P. S. **Apropriação das práticas de numeramento em um contexto de formação de educadores indígenas**. 268f. Dissertação (Mestrado em Educação), Faculdade de Educação da Universidade Federal de Minas Gerais. Belo Horizonte, 2012.

FERNANDES, N. L. R. **Professores e Computadores**: Navegar é preciso. Porto Alegre: Mediação, 2004.

FERREIRA, R. **Educação escolar indígena e etnomatemática:** a pluralidade de um encontro na tragédia pós-moderna. 269f. Tese (Doutorado em Educação), Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo. São Paulo, 2005.

GRANDO, R. C. **O jogo e a Matemática no contexto da sala de aula**. São Paulo: Paulus,2004.

PORTUGAL. Ministério da Educação de Portugal, Direcção Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular. **Clic Mat: atividades interativas de Matemática**. Lisboa, 2005.

SILVA, A. L. Uma “Antropologia da Educação” no Brasil? Reflexões a partir da escolarização indígena. In: SILVA, A. L; FERREIRA, M. K. L. **Antropologia, história e educação:** a questão indígena e a escola. 2ª.ed. São Paulo: Global, 2001.

VINHA, M. Tradição Recentemente Inventada – Terras Indígenas e Jogo “Cabo-de-Guerra”. XVII Encontro Regional de História - O lugar da História. ANPUH/SPUNICAMP. Campinas, 6 a 10 de setembro de 2004. Anais… 2004. CD-ROM.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS. **Projeto Pedagógico do Curso de Formação Intercultural de Professores**. Belo Horizonte, 2011.

A Matemática e os fenômenos da natureza

Edson Vernek[1]

Introdução

Por que utilizamos a matemática para descrever os fenômenos físicos? Seria possível descrever os fenômenos da natureza sem o emprego da matemática? Perguntas como estas parecem sem propósitos quando estamos tão acostumados a associar a Física com a Matemática, sem refletir as razões pelas quais esse "casamento" revela-se tão perfeito. Percebemos que as observações dos fenômenos da natureza estão intrinsecamente ligadas à própria natureza do observador. De fato, é através dos sentidos do observador que o mesmo é capaz de detectar os fenômenos naturais. Por exemplo, observamos o movimento dos objetos pela visão, pelo tato ou até mesmo pela audição. Todas essas e outras possíveis formas de observação parecem independer de quaisquer conceitos matemáticos. É assim, talvez porque a própria observação constitui um fenômeno natural, de sorte que não podemos dissociar o observador da natureza. Nesse artigo queremos discorrer um pouco sobre essas questões sem, contudo, pretender esgotar o assunto. Na verdade, queremos provocar a reflexão do leitor sobre o tema.

Compreensão, comunicação e matemática

Para nós seres críticos não é suficiente observar os fenômenos. É preciso ir além dessa observação rasa e superficial, queremos também quantificá-los a fim de compreendê-los, registrá-los ou comunicá-los a outrem que porventura não os tenha observado. É, precisamente, aqui que precisamos de

1 Instituto de Física, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, MG, 38400-902, Brasil.

uma ferramenta capaz de nos fornecer uma descrição profunda e quantitativa dos fenômenos. A compreensão de um fenômeno observado implica, necessariamente, numa reflexão, num raciocínio lógico sobre o mesmo. Uma vez compreendido o fenômeno, registrá-lo ou comunicá-lo requer uma linguagem. É a matemática o instrumento que nos permite tais feitos. É certamente por essa razão que o laureado físico Richard Feynman disse: "A matemática não é apenas outra linguagem: é uma linguagem mais o raciocínio; é uma linguagem mais lógica; é um instrumento para raciocinar".

A matemática está tão fortemente associada com os fenômenos que é quase impossível separar os conceitos físicos dos matemáticos. Por exemplo, no conjunto dos fenômenos físicos encontramos grandezas como força, velocidade, aceleração, etc. Entretanto, na própria enunciação conceitual dessas grandezas físicas empregamos certos conceitos matemáticos. Quando definimos aceleração de um objeto utilizamos o conceito matemático de derivada temporal (ou taxa de variação) da sua velocidade. É possível que até concebamos a noção de aceleração sem o conceito de derivada, entretanto, é praticamente impossível comunicar tal noção a outrem sem a linguagem matemática. A linguagem matemática permite relacionar uma quantidade a outras. No caso em tela, podemos relacionar a aceleração **a** de um objeto com a sua velocidade **v** e o tempo *t* através da operação matemática derivada expressa por

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

Aqui, vemos claramente como as operações matemáticas permite-nos estabelecer relações entre grandezas físicas. A expressão acima nos diz (em linguagem matemática) que se conhecemos como a velocidade de certo objeto como uma função do tempo, basta-nos aplicar a operação derivada e obteremos a sua aceleração. Este é apenas um exemplo de operação matemática que relaciona grandezas físicas associadas ao fenômeno do movimento dos objetos.

Somos naturalmente conduzidos a perguntar-nos se no conjunto de todos os fenômenos da natureza, para cada um deles existirão operações matemáticas que o descrevem. Se a resposta for afirmativa, então a matemática serve de fato para descrever a natureza, caso contrário ela deve ser descartada. Para nossa sorte, aparentemente, a reposta é positiva. Além disso, podemos e devemos indagar-nos se para todos os resultados de uma dada operação matemática existe pelo menos uma quantidade física associada. Na verdade, a resposta a essa pergunta é extremamente interessante, pois nos permite fazer predições a partir de modelos de sistemas físicos, como veremos a seguir.

A matemática e os modelos para sistemas físicos

Em geral os sistemas físicos são formados por vários elementos ou constituintes. Por exemplo, um gás monoatômico (o sistema físico) é formado por certo número de átomos (os constituintes). Os constituintes do sistema geralmente interagem entre si aos pares. As interações entre cada par é dada por certas relações matemáticas empíricas chamadas Leis. Por exemplo, a força gravitacional de Newton, a força eletromagnética de Lorentz, etc. Uma vez identificadas todas as interações no sistema temos em mãos o que chamamos de modelo matemático para o sistema. Na prática, é impossível conceber um modelo perfeito para os sistemas físicos reais. Os modelos são sempre representações aproximadas dos sistemas físicos a que se referem. Quanto mais fiel for o modelo mais complicado será o mesmo. De posse do modelo matemático, em princípio, podemos fazer predições sobre os fenômenos associados ao sistema físico que o modelo descreve.

Fazer predição teórica sobre um modelo é encontrar os resultados das operações matemáticas admissíveis no modelo. A tarefa de encontrar as soluções de um dado modelo pode ser extremamente árdua. Em virtude das interações entres os constituintes de um dado sistema físico, o comportamento de um deles depende de todos os outros. Em geral, isto resulta na impossibilidade de soluções exatas mesmo para os modelos que são aproximações da realidade. Esse é o chamado *problema de muitos corpos,* que resulta em diversos fenômenos emergentes relevantes (ANDERSON, 1972). Na procura por soluções dos modelos é necessário aplicar técnicas matemáticas algébricas e/ou numéricas, as quais fornecerão os resultados, ou predições. Aqui aparece a importância de saber se a cada resultado matemático existe uma quantidade física correspondente. Aparentemente, esse não é o caso. A realidade física impõe certos vínculos os possíveis resultados matemáticos sobre um modelo. Por exemplo, ao resolver as equações de Maxwell para cargas aceleradas obtemos soluções retardadas e avançadas no tempo. As últimas são descartadas com base no princípio da causalidade, que diz que o efeito não pode preceder a causa. Dessa forma, uma dada solução matemática pode não corresponder a uma realidade física. Fica, portanto, claro que a matemática apenas não dá conta da descrição dos fenômenos da natureza, são necessárias as noções de física.

Existem situações mais exóticas em que, embora a matemática forneça um resultado único, é preciso dar significados aos mesmos, interpretando-os adequadamente. Esse, por exemplo, é o que acontece na mecânica quântica. Numa linguagem pouco rigorosa, no contexto da mecânica quântica, resolver um modelo significa encontrar soluções para a celebrada equação de Schrödinger ou algo equivalente. Como resultado, obtemos uma função complexa, a chamada *função de onda.* De acordo com a *interpretação* de Copenhague, é o módulo quadrado dessa função que tem significado físico, a densidade de probabilidade de encontrar um sistema em um dado estado quântico. O caráter probabilístico da mecânica quântica é um postulado físico, e não um resultado matemático.

Embora na mecânica quântica a matemática pareça não seja suficiente, é nela, possivelmente, que as estruturas matemáticas mais complexas encontram a realidade da natureza. Por exemplo, na mecânica quântica, estruturas como espaços vetoriais complexos, espaços topológicos, fibrados estão intimamente relacionados a fenômenos descobertos nos últimos anos. O conceito de espaços topológicos, por exemplo, tem sido de fundamental importância para os recentes avanços na compreensão de uma série de novos fenômenos, tais como o efeito Hall quântico, efeito Hall de spin (isolantes topológicos) e supercondutores topológicos, entre outros.

Conclusão

Vimos que a matemática está tão intimamente relacionada com os estudos dos fenômenos da natureza de modo que os conceitos físicos quase não podem ser concebidos sem o auxílio de noções matemáticas. A aparente indissociabilidade da matemática dos fenômenos naturais leva-nos a imaginar que uma não pode existir sem a outra. Talvez a natureza material seja apenas uma projeção dos conceitos matemáticos abstratos, tal como uma bola de gude é a manifestação imperfeita da noção matemática de esfera. Mas será que esses conceitos matemáticos existem independentemente da existência dos indivíduos (materiais) que os concebe ou são frutos da condição material desses indivíduos? Em última instância, não sabemos a resposta, contudo, é extremamente prazeroso continuar refletindo sobre tal questão.

Referência bibliográfica

ANDERSON, P. W. **Science**, New Series, Vol. 177, No. 4047, pp. 393-396. 1972.

Matemáticas da Música[1]

Luiz Castelões[2]

Introdução

Apesar do generalizado desprestígio da Música como atividade profissional e acadêmica no seio da sociedade brasileira, a Música tem uma origem nobilíssima do ponto de vista das ciências exatas, entre elas a Matemática, na história ocidental.

O monocórdio de Pitágoras, um dispositivo sonoro, foi não apenas um experimento musical e matemático mas é também considerado como o primeiro dispositivo científico desenvolvido no Ocidente. Isto abriu caminho para uma longa e vívida história de colaborações entre Música e Matemática, que chega, com vigor, até os dias de hoje.

No espaço restrito, ainda que precioso, deste capítulo, então, me dedicarei a:

1. Refletir sucintamente sobre as relações entre Matemática (Ciência) e Música, a partir de alguns poucos *flashes* históricos selecionados para esta ocasião;

2. Demonstrar como a Teoria Musical que aqui vou chamar de "tradicional" (a grosso modo, a mais utilizada entre os séc. XVII e XIX, o chamado "período da prática comum", mas ainda utilizada hoje em dia para as músicas derivadas deste) faz uso bastante idiossincrático e distorcido da Aritmética (justificável do ponto de vista da música em questão, mas *nonsense* do ponto de vista matemático);

---

1 Este ensaio é a versão escrita da palestra que realizei no Centro de Ciências da UFJF, em 26 de Outubro de 2017, a convite de Bárbara Duque. Deixo registrado meu mais sincero agradecimento por esta vibrante oportunidade.

2 Instituto de Artes e Design, Universidade Federal de Juiz de Fora.

3. Exemplificar o papel pujante da Matemática no âmbito específico da Composição Musical atual, sobretudo em pesquisas desenvolvidas pelo COMUS – Grupo de pesquisa em composição musical da UFJF desde 2010.

Este capítulo tem um caráter sobretudo de divulgação acadêmica, buscando uma leveza e quase informalidade de escrita, na meta talvez utópica de fazer a Música inteligível ao não-músico e destinando-se muito mais aos colegas de outras áreas e aos estudantes dos anos iniciais das graduações em Música do que aos especialistas pós-graduados, acostumados que estão a literaturas mais densas e consolidadas em Música e Matemática.

1. Relação Matemática e Música: histórico gerando reflexões

A Antiguidade Clássica e a Idade Média nos fornecem exemplos inequívocos de relação visceral entre Música (Ciência) e Matemática.

Na Antiguidade Clássica, a Música vista como 4º ramo da Matemática, integrada à Matemática e à Astronomia através do conceito de "Harmonia das esferas" (em resumo, a crença na equivalência da proporção entre números inteiros pequenos, a distância entre os planetas e a afinação de escalas musicais) e a Harmonia (musical) sendo estudada por Pitágoras (580-500AC) e pelos pitagóricos como parte da Física são apenas alguns exemplos. E, na Idade Média, a Música como parte do *Quadrivium*, junto com Aritmética, Geometria e Astronomia, demonstra a continuação desta aliança para muito além da Grécia Antiga.[3]

Apesar deste rico histórico de parceria entre o que vemos hoje como áreas distintas, é preciso frisar, justamente do ponto de vista confortável da época na qual falamos (isto é, 2017), que Música não é igual à Matemática.

Digo isto no quadro necessário de se tentar escapar de duas visões igualmente equivocadas do senso-comum a respeito de Música: 1) a ideia supracitada de que Música é igual à Matemática (e, portanto, apenas e necessariamente "racional"), e 2) a ideia oposta, ou seja, de que Música é um território apenas *expressivo* e *espontâneo* (e, segundo esse ponto de vista, da esfera do

3 Para uma leitura em língua portuguesa mais extensa acerca destes exemplos, recomendo o livro de Abdounur (1999).

“irracional” e necessariamente desvinculada de qualquer aspecto matemático, racional, científico, planejado).

Mas... nem tanto ao céu, nem tanto ao mar! Provavelmente, estaremos mais próximos de uma verdade musical ao optarmos por um caminho do meio: Música não é nem só uma “ciência”, “racional”, nem apenas “expressão”, “irracional”.

O fato de a Música abranger tanto aspectos “racionais” e “objetivos” quanto não (ou seja: sensação, intuição, sentimento, vontade, percepção, gosto, expressão) nos permite, então, afirmar com uma certa margem de segurança que ela não é igual à Matemática. Embora nunca seja forçoso salientar que isto não equivale a defender que haja uma relação de oposição entre ambas as áreas, já que existem interseções possíveis entre lógicas musicais e matemáticas – um tópico bastante mais especializado que foge ao escopo deste capítulo, mas que pode ser examinado entre as referências listadas ao seu final.

O reconhecimento de uma não-identificação total entre Música e Matemática nos remete à relação, mais ampla, entre Música e Ciência, novamente desde o confortável ponto de vista da atualidade (digo “confortável” porque tendo à disposição milênios de história passada, registrada por escrito).

Música e Ciência utilizam de altas doses de criatividade em seus processos e nisto são parecidas. Basta imaginar o quanto de criatividade foi necessária a um Newton e a um Einstein, mas também a um J. S. Bach e a uma Elis Regina. Porém, “Ciência” pressupõe métodos racionais (coerência de argumento, modelos, critérios, protocolos) aplicados a uma realidade supostamente objetiva; enquanto que à Música pode interessar tanto uma tal “realidade” (ex.: modelos físicos aplicados a sons do ambiente, modelos matemáticos aplicados a estruturas e procedimentos sonoros/musicais) quanto ficções (sons imaginários, inventados), via processos racionais ou não.

Neste ponto, recomendamos uma consulta ao próprio desenvolvimento da escrita musical ocidental, a grosso modo ao longo de todo o milênio passado e até o presente, uma história rica em exemplos de, por um lado, controle progressivamente maior e mais racional da matéria sonora (em criadores como Machaut, Gesualdo, J. S. Bach, Beethoven, Debussy, Webern, Lachenmann, Ferneyhough e Carola Bauckholt), e por outro lado, de indeterminação (em criadores como John Cage, Cornelius Cardew e nas partituras de *songbooks* do repertório popular).

Talvez resida neste duplo interesse da Música, em relação ao que é científico e ao que não é, ao racional e irracional, sistemático e espontâneo, determinado e indeterminado, justamente a grande dificuldade em se realizar nela, em ser um "bom músico": a Música trabalha simultaneamente com diversas competências, diversas esferas, antagônicas entre si até. Isto explica, em parte, o relato usual de frustração do senso-comum em relação ao aprendizado e desenvolvimento musicais: "eu queria ser músico", "eu desisti da música" etc.

Digo apenas "em parte" (e aqui me permito uma breve digressão) porque a outra parte se refere à falência da educação musical em nossa sociedade, resultante de fatores como o preço alto da educação musical de qualidade face à desigualdade estrutural que nos caracteriza, a autossabotagem de educadores musicais que veem a Licenciatura em Música como um curso de menor exigência musical, como uma mera válvula de escape, tanto para aquele que não deseja a Música como uma profissão de exigência equivalente à das profissões de maior status na sociedade, quanto para uma burocracia que se pauta mais pelo quantitativo do que pelo qualitativo (e, consequentemente, formando professores de música que não são músicos plenos), além do próprio sucateamento estrutural e generalizado que frequentemente caracteriza a falta de um projeto educacional mais altivo e ambicioso.

Finalmente, no que se refere à relação entre Matemática e Música no ambiente acadêmico (europeu, norte-americano e brasileiro) dos últimos dois séculos, vale sublinhar o fato de que a Matemática (e, mais amplamente falando, a Ciência) foi utilizada para legitimar a inserção e presença da Música na Universidade, num esquema de poder em que as ciências exatas aparecem não como parceiras mas em relação de superioridade hierárquica em relação à Música, num contexto bastante diverso daquele da Antiguidade Clássica (para mais informações, ver por ex. Kerman 1987, além das extensas bibliografias sobre o exemplo de Hanslick no séc. XIX e sobre formas de legitimação em Música, citadas em Castelões 2009 e 2016a).

2. As estranhas matemáticas da Teoria Musical "tradicional"

Conforme citado na Introdução deste capítulo, a Teoria Musical aqui apelidada de "tradicional" foi pródiga em fazer uso idiossincrático (distorcido) da matemática. No que segue, a título ilustrativo, me dedico a listar alguns exemplos da matemática dos intervalos, das fórmulas de compasso, das indicações metronômicas – todos, espero, bem acessíveis ao leitor leigo, não-músico –, além de um tópico um pouco mais complicado, sobre as incongruências entre a aplicação da Teoria dos Conjuntos à Música e os sons como fenômenos físico-acústicos.

2.1. A matemática dos intervalos

Em Música, "intervalo" significa a distância entre duas notas. Cada uma dessas "distâncias", ou seja cada intervalo, pode ser medida em Música (e em Física acústica) e recebeu na Teoria Musical ocidental "tradicional" um nome diferente.

Mais especificamente, o "uníssono" (atenção: "uni-" = 1) representa a identificação da nota com ela mesma (distância/intervalo = 0). Há aqui, já, uma identificação entre os valores 1 e 0. À menor distância/intervalo depois do uníssono (dentro do quadro do sistema temperado igual, que é o quadro preponderante a partir do séc. XVIII e de mais fácil explicação para o leigo), atribuiu-se o número 2 ("segunda [menor]"). É desta identificação entre 1 e 0 (no caso do uníssono) e do menor valor como sendo 2 (segunda) é que nascem as demais distorções da matemática de intervalos (ver Fig. 1).

Distorções como as exemplificadas na Fig. 1 foram corrigidas conforme se adotou um sistema simplificado de contagem semitonal dos intervalos (ou seja, o menor intervalo sendo considerado como 1 e todos os demais intervalos sendo contados como somas a este), algo que só fez sentido musical a partir de meados do séc. XVIII, com a adoção de um sistema temperado igual (ou quase) de afinação, seguido de um gradualmente crescente cromatismo ("semitonalismo") das próprias estéticas musicais em direção ao final do séc. XIX início do XX, e culminando com a aplicação da Teoria dos Conjuntos à Música (exemplificada na última linha da Fig. 1) na segunda metade do séc. XX (por Allen Forte), que resultou numa maior racionalidade na contagem de intervalos (embora tampouco sem incongruências, como veremos no item 2.4).

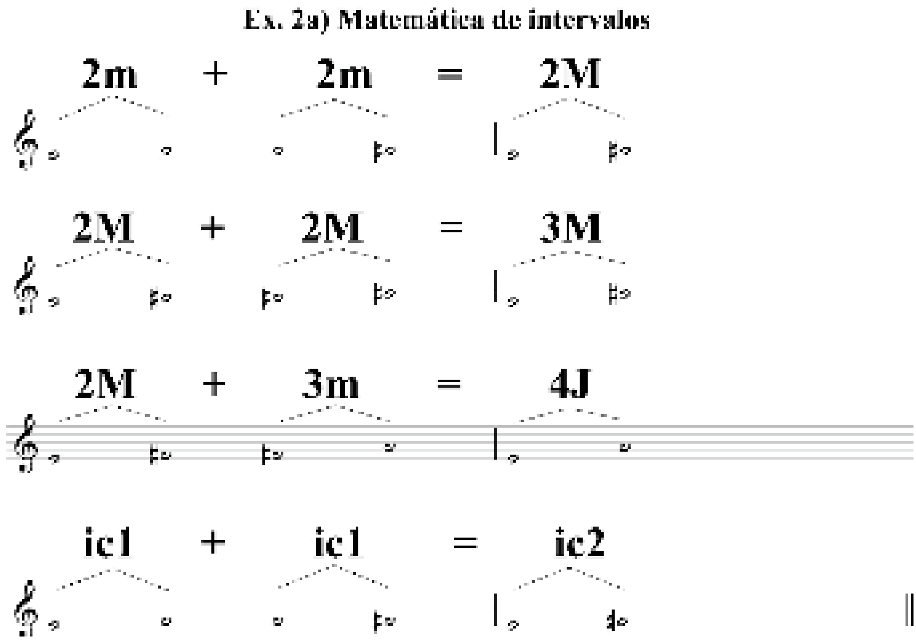


Figura 1: Matemática dos intervalos na análise musical tradicional (3 primeiras linhas) e na Teoria dos Conjuntos conforme aplicada à Música (última linha): embora encontre justificativa na música praticada na época, as somas dos números que designam os intervalos não fazem sentido do ponto de vista matemático nos 3 exemplos superiores (2+2=2, 2+2=3 e 2+3=4) e tal abordagem de contagem de intervalos é substituída no séc. XX pelo modelo da última linha, onde por ex. 1+1=2.

2.2. A matemática das fórmulas de compasso

Em Música, “fórmulas de compasso” designam agrupamentos de pulsos, ou batidas, formando um padrão frequentemente cíclico (ex.: quando você conta de 1 a 4 junto com o ritmo de uma música). Fórmulas de compasso são representadas em escrita musical tradicional ocidental com signos similares a frações (4/4, 3/4, 2/4, 6/8, 9/8, 3/16, 3/4+3/16 etc.). O problema, matematicamente falando, é que tais fórmulas não significam o mesmo que frações e as operações com frações não funcionam com estas fórmulas. Por exemplo, em Música, 3/4 ≠ 6/8 ≠ 12/16, embora sejam equivalentes do ponto de vista matemático (ver Fig. 2).

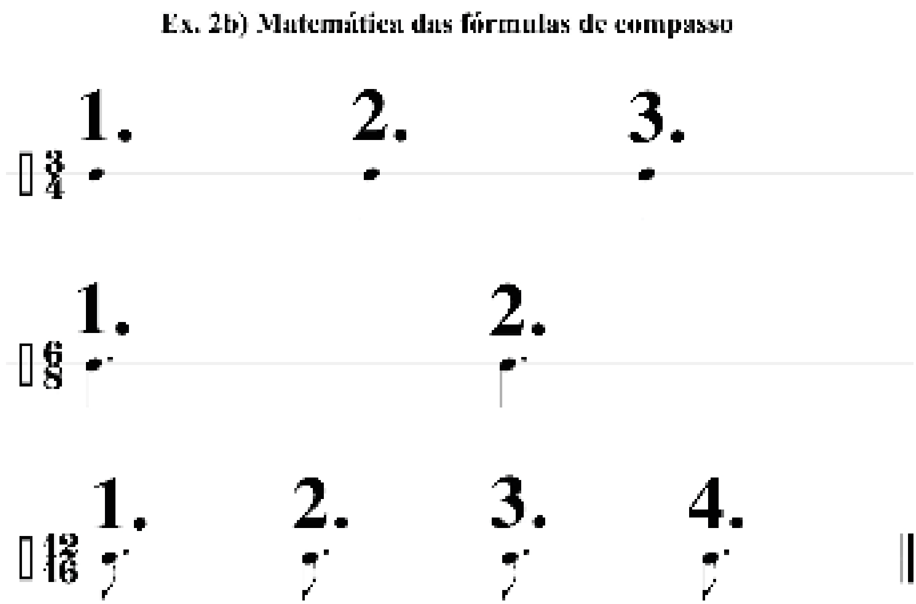


Figura 2: Matemática das fórmulas de compasso, na escrita musical ocidental tradicional (obs.: os números de 1 a 4 sobre as pautas indicam as batidas de cada fórmula de compasso): embora encontre plena justificativa musical, já que 3/4 é um compasso ternário simples, 6/8 é um compasso binário composto e 12/16 é um compasso quaternário composto (e, portanto, todos musicalmente diferentes), a representação de fórmulas de compasso via signos similares a frações não faz sentido do ponto de vista matemático, já que, em Música, por ex., 3/4 ≠ 6/8 ≠ 12/16 e 3/4 + 3/4 não é exatamente igual a 6/4 (ou a 3/2).

2.3. A matemática das indicações metronômicas

Em Música (desde Beethoven), indica-se o andamento, ou seja a velocidade com que se toca uma música, informando quantas vezes um determinado valor rítmico ocorre por minuto. A duração temporal do valor rítmico grafado é, portanto, inversamente proporcional ao número escrito. Entretanto, a teoria musical tradicional foi imprudente ao grafar isto de modo simplista (ou matematicamente equivocado).

Deste modo (2 exemplos):

- ♩ = 60 (lê-se: "semínima é igual a 60"); e
- ♩ = 240 (lê-se: "semínima é igual a 240")

Em vez de assim (como seria matematicamente correto):

- ♩ = 1/60 (que seria lido como: "semínima é igual a 1 minuto / 60"); e

- ♩ = 1/240 (que seria lido como: "semínima é igual a 1 minuto / 240")

Como resultado, as operações musicais-matemáticas com andamentos se tornam menos claras e menos intuitivas. A justificativa (musical) para o que, matematicamente falando, seria visto como um deslize, é que o que o músico que se utiliza dessa grafia quer dizer é que "a indicação metronômica é igual a...", ou seja, que o metrônomo deve ser posto naquele valor, e não que o referido valor rítmico corresponde àquele número. Em todo caso, a grafia empregada dificulta o correto entendimento matemático (e subsequentes operações) do andamento.

2.4. Das incongruências entre aplicação da Teoria dos Conjuntos à Música e os sons como fenômenos físicos

Em meados do séc. XX, a aplicação da Teoria dos conjuntos à analise musical (inicialmente por Allen Forte) teve como um de seus resultados tornar a matemática de intervalos mais coerente, ao consolidar a atribuição do valor zero ao uníssono e do valor 1 ao menor intervalo/distância entre notas no sistema temperado igual (o semitom). A aritmética passou a funcionar com estes intervalos de forma mais coerente (isto é, matematicamente funcional) a partir de então. E isto é um mérito inegável.

Entretanto, números inteiros contíguos abaixo ou acima de 15-16 (ex.: 1 e 2, 2 e 3, 3 e 4... 16 e 17 etc.) NÃO equivalem às proporções físico-acústicas do intervalo de semitom (assim representado), gerando um novo problema musical-matemático-físico – ou, metaforicamente falando, uma espécie de briga entre a Matemática e a Física acústica no ringue da Teoria Musical.

Movimentos musicais como o "Espectralismo" (a partir dos anos 1970) resolveram tal problema, ao menos para fins de composição musical, abandonando nomes de notas e ambas as numerações de intervalos tradicional e via Teoria dos conjuntos em favor do uso de valores de alturas (notas) em Hertz (por ex., "440Hz" em vez de "A4") e do uso de proporções entre alturas (intervalos) equivalentes às encontradas no som como fenômeno físico-acústico (ex., "2:1" em vez de "oitava"). Os sistemas propostos anteriormente (da análise musical tradicional e da Teoria dos Conjuntos conforme aplicada à Música), entretanto, seguem coexistindo com esse tipo de solução mais atual, muito em função do fato de que as músicas analisadas por esses métodos também seguem coexistindo. Ou seja: métodos de teoria/análise diversos refletem um panorama musical também diverso.

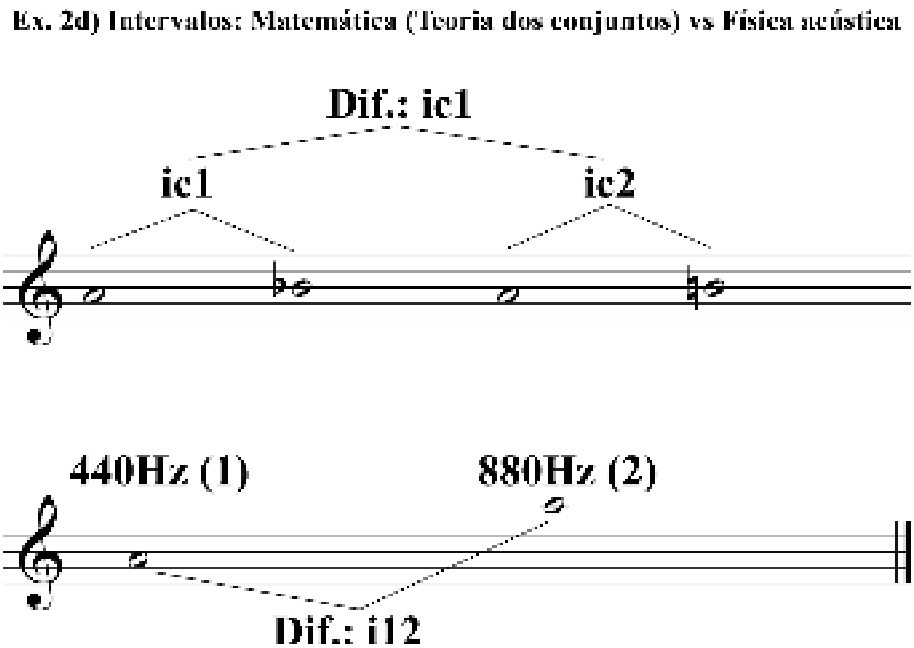


Fig. 3 – Sobre a diferença entre proporções na Teoria dos conjuntos aplicada à Música (linha superior) e na Física acústica (linha inferior): a diferença entre 1 e 2 na primeira equivale a um semitom (ic1), enquanto que na segunda equivale a uma oitava (i12).

3. Alguns papéis da Matemática no auxílio à Composição Musical atual

Voltando-nos para um momento mais atual, à guisa de Conclusão apenas provisória, e olhando a relação entre Música e Matemática de forma mais ampla e sob o prisma da engenharia da Composição Musical, verificamos que a Matemática desempenha um papel fundamental na criação musical a partir de dados de outras disciplinas: ela funciona como o intermediário entre qualquer disciplina que se expresse em números (e fórmulas matemáticas) e a Música. Trata-se, portanto, de uma poderosa ferramenta de Música e interdisciplinaridade, ainda mais fortalecida e acelerada pelo advento e uso de novas tecnologias (digitais), através das quais cálculos extensos e/ou repetitivos, que outrora precisavam ser feitos à mão, passam a ser feitos de maneira automática, ou quase, pela máquina, a partir de sua programação pelo músico e/ou por seus colaboradores de outras áreas (Computação, Engenharia, Física). A importância da Matemática para a Música, portanto, ultrapassa em muito os limites das formulações da própria Matemática: ela funciona como um porta-voz entre a Música e os mundos quantitativos.

Entre as pesquisas de maior impacto conduzidas pelo COMUS – Grupo de pesquisa em composição musical da UFJF (www.ufjf.br/comus) com auxílio da Matemática, desde 2010, estão a conversão de contornos de imagens 2D e 3D e de cores via sistemas RGB, HSV e CMYK com fins criativos (composicionais).

Tais pesquisas foram desenvolvidas através de auxílio financeiro do CNPq (2010-12) e de bolsas de IC que permitiram a constituição de equipes interdisciplinares, com bolsistas dos cursos de Música, Artes, Matemática e Computação da UFJF, e estão fartamente documentadas através de artigos e capítulos publicados de 2010 a 2016 em português, espanhol e inglês, no Brasil, Argentina, México e França – além de terem resultado em vultosa produção artística (obras musicais e audiovisuais originais dos pesquisadores e colaboradores do grupo).

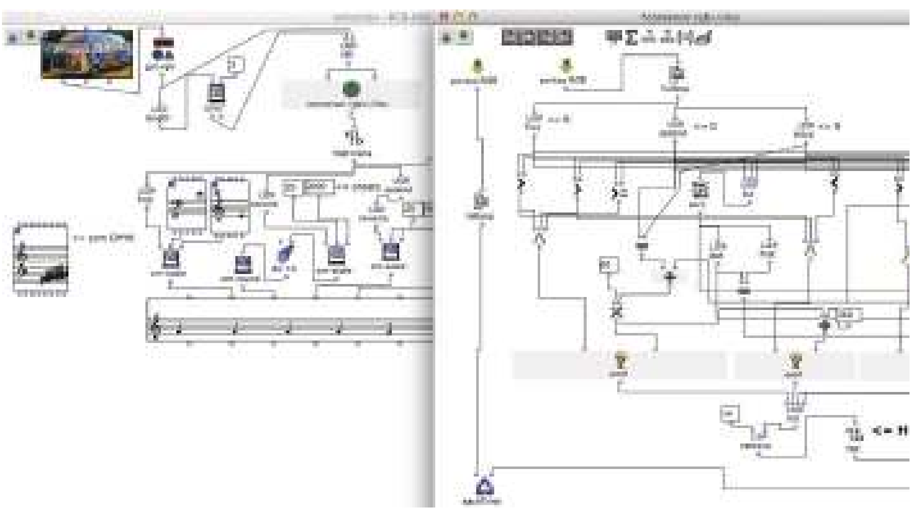


Fig. 4 – Conversor entre sistemas de cores RGB e HSV para fins criativos (composicionais) desenvolvido pelo COMUS – Grupo de pesquisa em composição musical da UFJF: visão geral da implementação do algoritmo via plataforma OpenMusic (para mais informações, ver Castelões et al. 2015 e Castelões 2016b).

Referências bibliográficas

ABDOUNUR, Oscar João. 1999. **Matemática e Música: pensamento analógico na construção de significados**. São Paulo: Escrituras Editora.

CASTELÕES, Luiz E. 2016a. **Formas de legitimação em música**. ouvirOUver, UFU, Uberlândia, v. 12, n. 2, pg. 494-504.

_______________. 2016b. **Musicalising Sonification**. *OM Composer's Book, Vol. 3*, por Jean Bresson [ed.]. Paris: Editions Delatour.

_______________. 2009. **A Catalogue of Musical Onomatopoeia**. IRASM - International Review of the Aesthetics and Sociology of Music, Vol. 40, No. 2: 299-347. Zagreb: Croatian Musicological Society (CMS).

CASTELÕES, Luiz E.; OLIVEIRA, Talita De; FRANCO, Yago. 2015. **Conversores de parámetros del color a parámetros sonoros cuantificables usando los sistemas RGB, HSV y CMYK**. Sonic Ideas, 7(14).

KERMAN, Joseph. 1987. **Musicologia**. 1a ed. São Paulo: Martins Fontes.

O papel da Topologia na Física

Sebastião Alves Dias[1]

Resumo

Vamos apresentar, de maneira bastante genérica e com poucos detalhes, uma importante área da matemática, a *topologia*. Em seguida, trataremos de duas aplicações da topologia a pesquisas atuais, nas áreas da física da matéria condensada e da física das interações fundamentais.

O que é topologia?

A Topologia é um ramo da Matemática que se preocupa com as propriedades *globais* de um determinado objeto, superfície, espaço ou conjunto, independentemente do seu tamanho ou formato. Isso significa que as propriedades que se procura estudar devem permanecer as mesmas se fizermos deformações *contínuas* no objeto em questão, ou seja, se apenas deformamos o objeto sem rasgá-lo, cortá-lo ou emendá-lo com outros objetos:

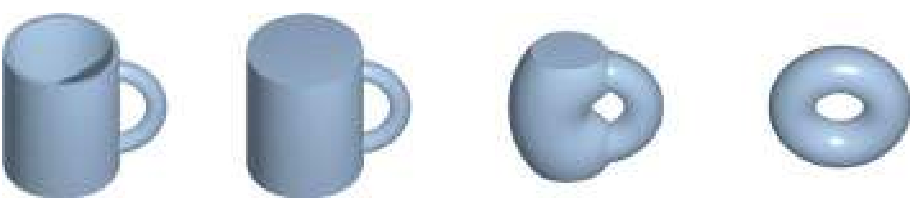


Figura 1: Deformação de uma caneca em um toro.

1 Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas. Coordenação de Astrofísica, Cosmologia e Interações Fundamentais – COSMO.

As características globais do objeto se contrapõem às propriedades *locais*, que podem ser as mesmas para dois objetos globalmente diferentes. Por exemplo, localmente (isto é na nossa vizinhança imediata), temos a impressão de que vivemos numa superfície plana. Para descobrir que vivemos sobre uma esfera de raio muito grande, uma maneira seria sair andando sempre em frente, em linha reta, até voltarmos ao ponto de partida:

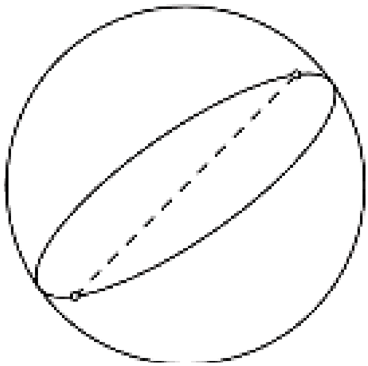


Figura 2: Um caminho na esfera que volta ao mesmo ponto.[2]

Há espaços mais complicados, onde, se fizermos essa experiência, voltamos ao ponto de partida, mas de cabeça para baixo, como no exemplo abaixo:

Figura 3: Fita de Möbius.[3]

2 Fonte: por Nicholas Longo (Derived from imaged in work by Jim Hefferon) [CC BY-SA 2.5 (https://creativecommons.org/licenses/by-sa/2.5)], via Wikimedia Commons.

3 Fonte: por David Benbennick (Own work) [GFDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html), CC-BY-SA-3.0 (http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/) or CC BY-SA 2.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-sa/2.0)], via Wikimedia Commons.

Se dois objetos (ou espaços) puderem ser continuamente deformados um no outro, dizemos que são *topologicamente equivalentes*. Tais deformações, desde que sejam contínuas, não afetam certas propriedades que são chamadas de *invariantes topológicos*.

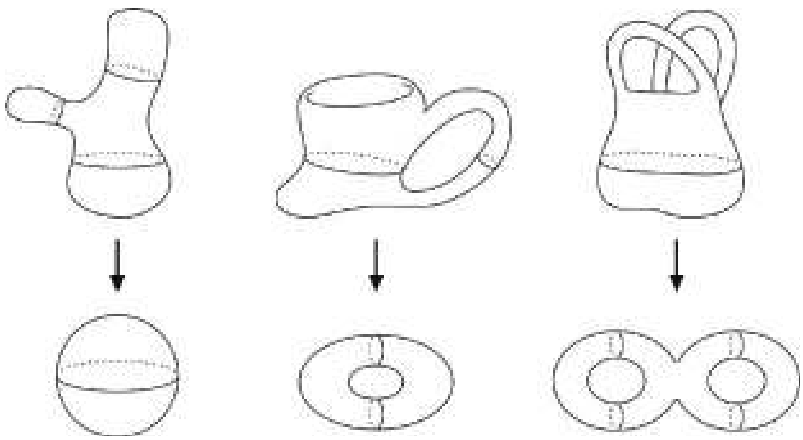


Figura 4: Número de alças é um invariante topológico.

Dois exemplos dessas propriedades são a *conectividade* (capacidade de unir quaisquer dois pontos do objeto por uma curva contínua totalmente contida nele) e a *conectividade simples* (propriedade que permite que qualquer curva fechada desenhada no objeto possa ser continuamente contraída em um ponto), que são ilustrados nas figuras abaixo:

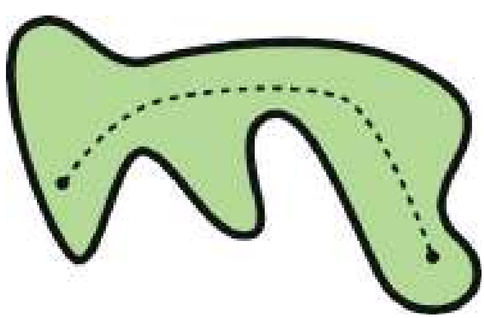


Figura 5: Objeto conexo.

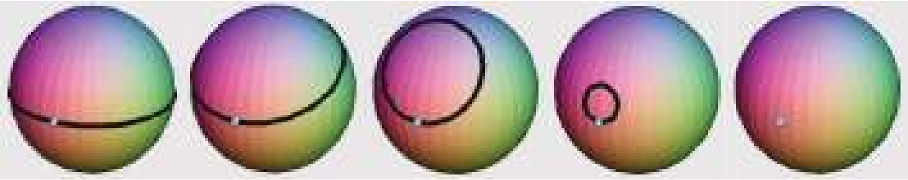


Figura 6: Conectividade simples ilustrada na esfera.[4]

Um exemplo menos óbvio de invariante topológico é a *característica de Euler*. Ela é definida para poliedros, que são sólidos geométricos de faces planas, limitados por segmentos de retas, cujos pontos extremos são chamados de vértices. Para um dado poliedro, definido em 3 dimensões espaciais, a característica de Euler E é definida como

$$E = V - L + F$$

onde V é o número de vértices, L é o número de lados e F é o número de faces do poliedro. Consideremos, por exemplo, o tetraedro, desenhado abaixo:

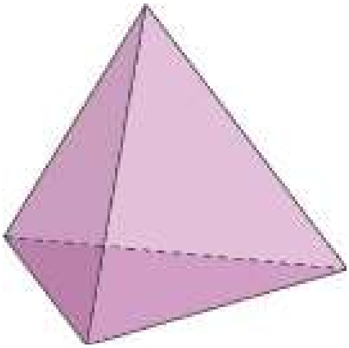
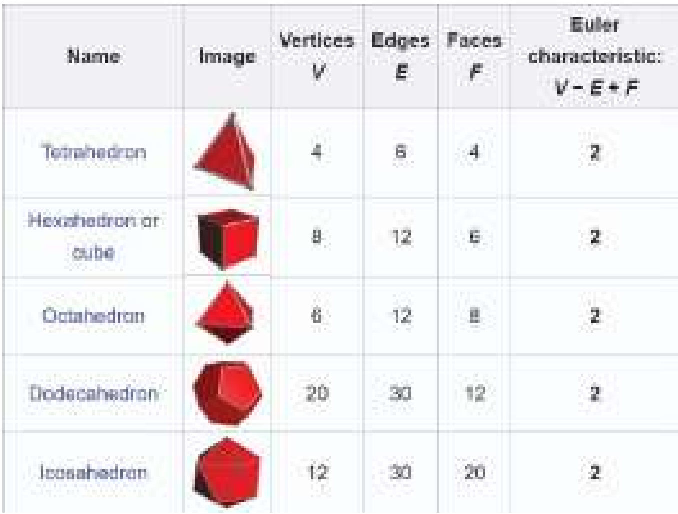


Figura 7: Tetraedro.

O tetraedro tem 4 vértices, 6 lados e 4 faces. Substituindo na definição de E, obtemos $E = 2$. O leitor é convidado a fazer a mesma conta para diversos outros poliedros convexos, listados na tabela abaixo, obtendo sempre o mesmo resultado. É simples notar que todos eles podem ser continuamente deformados uns nos outros, o que quer dizer que eles são topologicamente equivalentes.

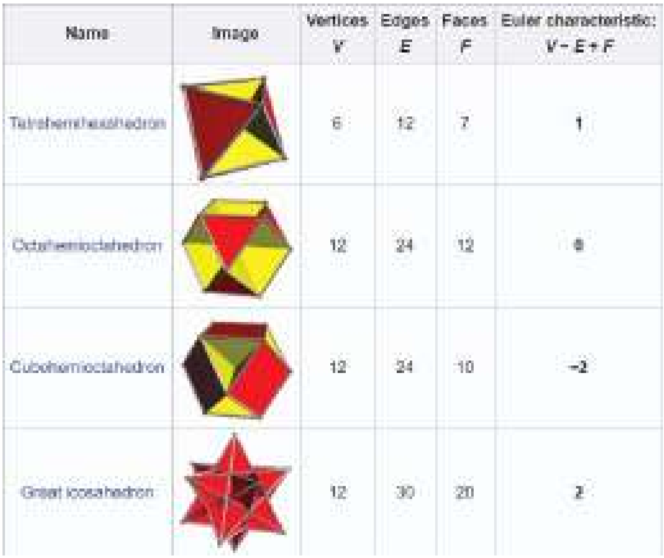
4 Fonte: Salix alba at English Wikipedia [GFDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html), CC-BY-SA-3.0 (http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/) or CC BY 2.5 (http://creativecommons.org/licenses/by/2.5)], via Wikimedia Commons.



Name	Image	Vertices V	Edges E	Faces F	Euler characteristic: $V - E + F$
Tetrahedron		4	6	4	**2**
Hexahedron or cube		8	12	6	**2**
Octahedron		6	12	8	**2**
Dodecahedron		20	30	12	**2**
Icosahedron		12	30	20	**2**

Figura 8: Tabela de poliedros convexos.[5]

Observamos, no entanto, que se retirarmos duas ou mais faces de um poliedro convexo, transformando-o em não convexo, a característica de Euler muda, indicando que eles não são topologicamente equivalentes.



Name	Image	Vertices V	Edges E	Faces F	Euler characteristic: $V - E + F$
Tetrahemihexahedron		6	12	7	**1**
Octahemioctahedron		12	24	12	**0**
Cubohemioctahedron		12	24	10	**−2**
Great icosahedron		12	30	20	**2**

Figura 9: Tabela de poliedros não convexos.[5]

5 Fonte: https://en.wikipedia.org/wiki/Euler_characteristic. Poliedros por Stella software (http://www.software3d.com/Stella.php).

Há inúmeras aplicações práticas de propriedades topologicamente invariantes. Nosso interesse, neste momento, se voltará para a Física, em particular, para duas aplicações na fronteira da pesquisa contemporânea. É do que passaremos a tratar na seção seguinte.

Aplicações à Física

Transições de fase num sistema de spins

Consideremos um conjunto de átomos onde a posição de cada um deles está fixada, de modo que, para especificar o estado dos mesmos basta dizer qual é o valor do seu *spin* (um rótulo, chamado de *número quântico*, que está relacionado ao comportamento do átomo sob rotações). Sabemos que o estado de menor energia deste sistema (o conjunto de átomos) é aquele no qual todos os spins apontam numa única direção, conforme ilustrado esquematicamente abaixo:

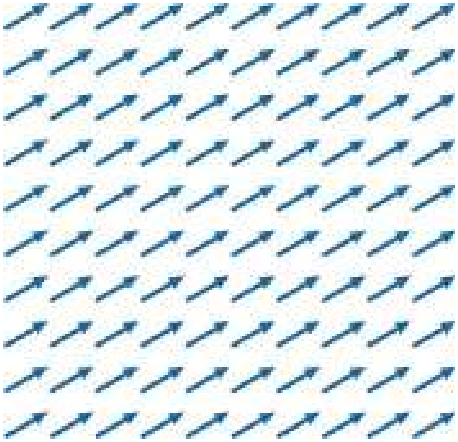


Figura 10: Spins apontando numa mesma direção.

À medida que aumentamos a temperatura do sistema, fornecemos energia para os átomos individuais e podemos ver outras configurações aparecerem, onde os spins não estão necessariamente alinhados. Duas configurações possíveis (e aparentemente prováveis) seriam aquelas nas quais cada spin está ligeiramente rotacionado em relação aos seus vizinhos. Tomando esse processo continuamente chegamos às configurações de vórtice e antivórtice, ilustradas abaixo:

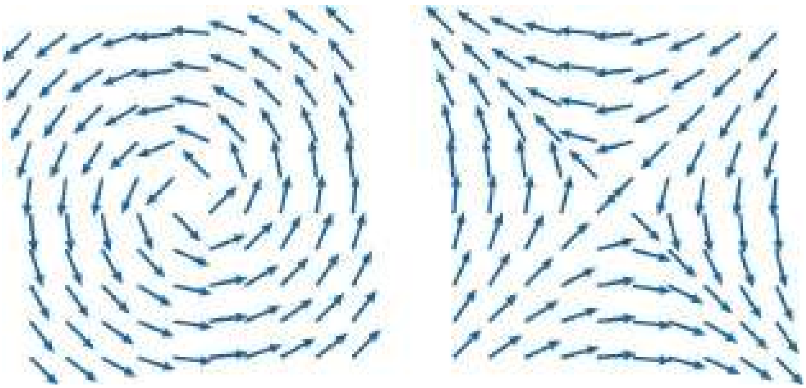


Figura 11: Vórtice e antivórtice.

Embora pareça razoável que o sistema assuma uma dessas configurações à medida que a temperatura aumenta, ele, de fato, não o faz. Isso se dá porque há um invariante topológico, a *vorticidade*, cujo valor teria que mudar para que o estado passasse daquele em que todos os spins estavam alinhados na mesma direção para o estado representado por um vórtice ou um antivórtice. A vorticidade é calculada somando a rotação total dos spins ao longo de qualquer curva fechada e dividindo o resultado por 360 graus. O resultado é o número de voltas que os spins dão em torno de si mesmos à medida que percorremos a curva. Para o estado de menor energia (todos os spins alinhados) a vorticidade é zero. Para o vórtice, é + 1 e, para o antivórtice, - 1. No entanto, se uma parte do sistema estiver na configuração de vórtice e a outra estiver na de antivórtice, a vorticidade do sistema continuará sendo zero e o sistema poderá sofrer a transição de fase.

Este fenômeno foi estudado e compreendido por D. J. Thouless, J. M. Kosterlitz e D. Haldane, que receberam o prêmio Nobel de Física em 2016.

Interações fundamentais e cordas

Um sonho antigo dos físicos é o de fornecer uma descrição unificada de todas as interações fundamentais, incluindo a gravitação (que resiste a ser consistente com a visão quântica do mundo). Uma das tentativas promissoras é a de pensar que, ao invés das partículas elementares serem pontos sem dimensão, elas sejam cordas muito pequenas. As propriedades de cada partícula e suas interações viriam, então, das diferentes maneiras dessas cordas vibrarem no domínio quântico. A consistência da teoria de cordas requer, no entanto, que o espaço-tempo não tenha 4 dimensões, e sim 10 (1 dimensão seria o tempo e as outras 9 seriam espaciais). Como só vemos 3 dimensões espaciais, aparece a questão de como explicar a ausência de 6 delas.

Uma ideia muito interessante é a de que essas 6 dimensões não seriam extensas (como os nossos conhecidos comprimento, largura e altura, que podem medir milímetros ou anos-luz), mas apareceriam compactadas em espaços mínimos, somente visualizáveis se conseguíssemos enxergar distâncias da ordem de 10^{-35} m. A forma precisa como tais dimensões se *compactam* define superfícies matemáticas chamadas de *espaços de Calabi-Yau*.

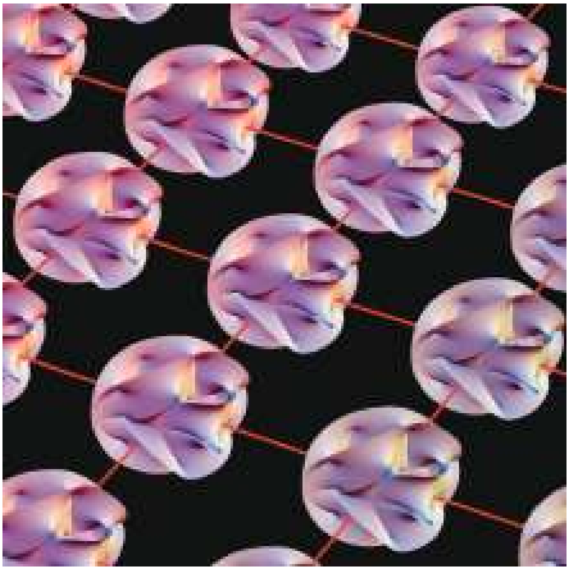


Figura 12: Espaços de Calabi-Yau em cada ponto do espaço de 4 dimensões que conhecemos.[6]

Cada conjunto de espaços de Calabi-Yau topologicamente equivalentes define um estado de menor energia possível (que chamamos de *vácuo*) para as cordas, que deve ser conhecido se quisermos entender a física que aparece como consequência dessa teoria. Assim, estudar os invariantes topológicos associados a esses espaços é de grande importância para a sua classificação e definição dos vácuos possíveis para a teoria das cordas.

6 Fonte: Adaptado e montado a partir da imagem original criada por Lunch [CC BY-SA 2.5 (https://creativecommons.org/licenses/by-sa/2.5)], via Wikimedia Commons.

Outras aplicações dos métodos e técnicas da topologia aparecem a cada momento, mostrando que ainda há muito a se aprender em relação a essa área fascinante da matemática em suas aplicações à física.

Para saber um pouco mais sobre os assuntos que discutimos brevemente aqui, recomendamos os links e textos abaixo:

- Topologia (matemática) – Wikipédia: https://pt.wikipedia.org/wiki/Topologia_(matemática)
- Elon Lages Lima, *Elementos de Topologia Geral*, LTC, 1976.
- *Strange phenomena in matter's flatlands*. The Nobel Prize in Physics 2016, Popular Science Background: https://www.nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/2016/popular-physicsprize2016.pdf
- Andrew Zimmerman Jones e Daniel Robbins, *String Theory for Dummies,* e-book.