

NOTAS DE AULAS DE ESTRUTURA DA MATÉRIA

Prof. Carlos R. A. Lima

CAPÍTULO 15

MODELOS NUCLEARES

Primeira Edição – junho de 2005

CAPÍTULO 15 – MODELOS NUCLEARES

ÍNDICE

- 15.1- Introdução
- 15.2- Composição dos Núcleos
- 15.3- Estabilidade dos Núcleos e Modelo do Gás de Fermi
- 15.4- Espalhamento de Elétrons e Raio Nuclear
- 15.5- Massa Nuclear e Energia de Ligação
- 15.6- Modelo Nuclear da Gota Líquida e Equação de Weizsäcker –
Facultativo
- 15.7- Interação entre Nucleons
- 15.8- Modelo de Camadas e Números Mágicos
- 15.9- Isospin

Nessa apostila aparecem seções, sub-seções e exemplos resolvidos intitulados como **facultativos**. Os assuntos que se referem esses casos, podem ser dispensados pelo professor durante a exposição de aula sem prejuízo da continuidade do curso de Estrutura da Matéria. Entretanto, é desejável que os alunos leiam tais assuntos e discutam dúvidas com o professor fora do horário de aula. Fica a cargo do professor a cobrança ou não dos tópicos facultativos.

Excluindo os tópicos facultativos, esse capítulo deve ser abordado no máximo em **4 aulas de quatro créditos**.

CAPÍTULO 15

MODELOS NUCLEARES

15.1 - Introdução

Logo após o anúncio de Roentgen da descoberta dos raios X em tubos de raios catódicos, o físico francês Antoine Henri Becquerel também interessou-se pelo assunto.

Em 1896, Becquerel envolveu uma amostra de sulfato duplo de potássio e urânio, fornecida pelo seu pai, também físico, Edmond Becquerel, em uma placa fotográfica e constatou que esta era fortemente sensibilizada mesmo quando protegida à exposições luminosas. Com essa experiência Becquerel demonstrou que o fenômeno possuía a mesma propriedade dos raios X de Roentgen de impressionar chapas fotográficas envolvidas por materiais opacos à luz.

Em 1898, Marie Curie deu ao fenômeno observado por Henri Becquerel com sal de urânio, o nome de Radioatividade.

Nessa ocasião, o casal Pierre e Marie Curie realiza uma série de experimentos envolvendo outras substâncias que apresentam o mesmo fenômeno que o sal de urânio, tais como, tório, polônio, actínio e rádio, sendo esse último a inspiração para o nome radioatividade.

Logo no início do século XX, Rutherford classifica como α , β e γ os raios emitidos pelos núcleos radioativos, de acordo com a capacidade de penetração na matéria e ionização do ar. Devese a Rutherford a descoberta de que as partículas α são núcleos de átomo de Hélio.

Logo em seguida, descobre-se que os raios β são elétrons, ou pósitrons, criados nos núcleos dos átomos e os raios γ são formas de radiação eletromagnética de comprimentos de onda muito pequenos.

Experiências de espalhamento de partículas α por átomos, realizadas em 1911 por Geiger e Marsden, mostraram que os raios nucleares variavam de 1 a 10 femtômetros ($1\text{ fm} = 10^{-15}\text{ m}$).

Em 1928, Gamow, Gurney e Condon, mostram que a radioatividade α é um fenômeno quântico de penetração de barreira.

Em 1932, o nêutron é descoberto por Chadwick, o pósitron por Anderson, e a primeira reação nuclear em aceleradores de partículas é observada por Cockcroft e Walton.

15.2 - Composição dos Núcleos

Experimentos com espectros de raios X, realizadas em 1913 por H. Moseley, revelam que a carga nuclear é o produto da carga de um próton com o número atômico Z que, por sua vez, é igual a aproximadamente metade do número de massa A , exceto no caso do hidrogênio onde $Z=A$, uma vez que este é formado por apenas um próton e um elétron.

Em 1920, Rutherford propõe a existência de partículas neutras no núcleo, que as chamou de nêutrons.

Em 1932, após confirmar experimentalmente a existência dos nêutrons, J. Chadwick propõe que um núcleo atômico de número de massa A contenha N nêutrons e Z prótons, tal que

$$N + Z = A \quad (15.1)$$

A ideia de que o nêutron pudesse ser uma combinação de um próton e um elétron foi logo descartada, pois espectros moleculares de algumas substâncias revelavam inconsistência entre o spin total de tais partículas e o spin nuclear. Por exemplo, o espectro molecular do Nitrogênio mostrava que o núcleo do átomo de nitrogênio deveria ter spin inteiro (bóson), enquanto que o número de massa e o número atômico assumiriam os valores $A=14$ e $Z=7$, respectivamente. Se o núcleo fosse então formado por 14 prótons e 7 elétrons (7 prótons e 7 pares elétrons-prótons para formar 7 partículas neutras), teria-se um número ímpar (21) de férmions e a natureza boscônica do núcleo seria inviabilizada.

Para que o núcleo do átomo de Nitrogênio tenha spin inteiro é necessário que, assim como os prótons, os nêutrons também sejam partículas de spin $\frac{1}{2}$.

Valores elevadas da energia cinética dos elétrons combinado com o princípio da incerteza, é também outro indício importante que impede que essas partículas possam ser encontradas em espaços tão pequenos como as regiões nucleares.

A ideia de que os neutrons não sejam formados por uma combinação de prótons e elétrons, não impede que os processos nucleares de aniquilação de neutros possam criar elétrons. Como se verá posteriormente, isso é possível e é responsável pela emissão β por núcleos de átomos radioativos.

Com base na discussão acima, conclui-se que os núcleos atômicos são constituídos por duas partículas fundamentais, os prótons e os neutrons. A primeira carregada positivamente, a segunda neutra, e ambas partículas de spin $1/2$. As massas dessas partículas são praticamente da mesma ordem de grandeza, e dadas por

$$M_p = 938,27231 \text{ MeV}/c^2 \text{ e } M_n = 939,56563 \text{ MeV}/c^2 \text{ (15.2)}$$

De fato, a maioria das características de prótons e neutrons são praticamente idênticas que, por causa disso, são genericamente denominados de nucleons.

Cada nucleon tem um momento magnético associado com seu spin dado, em termos do magneton nuclear $\mu_N = m_e/m_p \mu_B$, por

$$\mu_p = 2,792847386 \mu_N ; \mu_n = -1,91304275 \mu_N \text{ (15.3)}$$

Como na eq. (9.107) do capítulo 9, o momento magnético nuclear $\vec{\mu}_I$, é dado por

$$\vec{\mu}_I = g_I \mu_N \frac{\vec{I}}{\hbar} \quad (15.4)$$

Aqui usa-se o vetor \vec{I} para representar o spin nuclear.

Os fatores g nuclear para o próton g_p , como já mencionado na eq. (9.109), e para o nêutron g_n são, respectivamente:

$$g_{p/2} = 2,792847386 ; g_{n/2} = -1,91304275 \quad (15.5)$$

Entretanto, segundo a teoria quântica de Dirac, para qualquer partícula carregada de spin $1/2$, tal como próton ou elétron, $g_{p/2} = 1$, e para qualquer partícula neutra, também de spin $1/2$, $g_{n/2} = 0$.

A discrepância entre o resultado experimental e a teoria de Dirac para os valores de g_p e g_n , ocorre por causa de uma ação conjunta entre prótons e nêutrons no interior do núcleo, criando uma estrutura complexa não prevista na equação de Dirac.

15.3 - Estabilidade dos Núcleos e Modelo dos Gás de Fermi.

A força que mantém juntos os nucleons, tem uma natureza bem diferente da força eletrostática responsáveis pela estrutura dos átomos.

Sabe-se que as forças nucleares entre próton-próton, próton-neutron e neutron-neutron, são essencialmente idênticas. Algumas evidências de tal propriedade tem sido observadas em experiências de espalhamento entre próton-próton e neutron-neutron.

O pequeno tamanho dos núcleos é uma indicação qualitativa de que a força nuclear entre nucleons está associada a uma interação de curto alcance.

A Fig. 15.1 faz, qualitativamente, uma comparação de uma interação Coulombiana típica V_{coul} com uma interação nuclear V_{nuc} para dois prótons no interior de um núcleo atômico.

O gráfico para V_{nuc} descreve um modelo possível de energia potencial nuclear para um par de prótons num estado com spin total nulo.

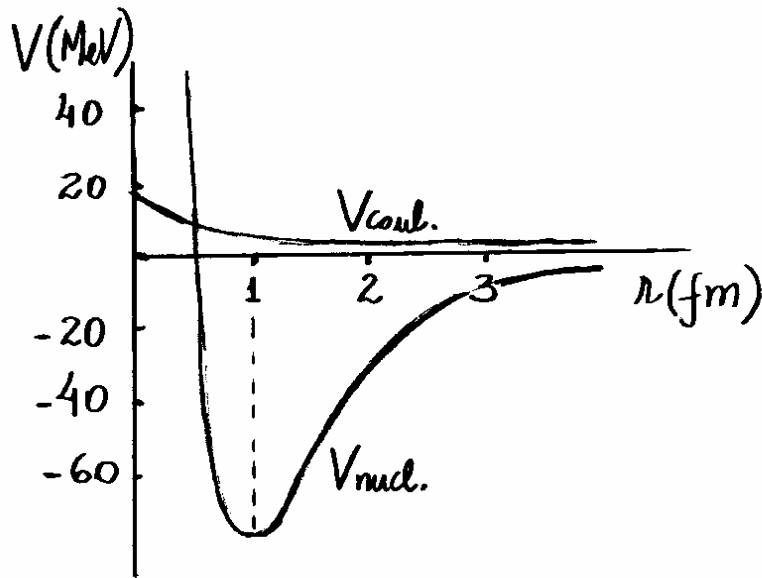


Fig. 15.1 - Energia potencial, de Coulomb $V_{\text{coul.}}$ e nuclear $V_{\text{nucl.}}$, para um sistema de dois núcleons.

A escala natural de comprimento em física nuclear é o fentometro (fm), onde

$$1 \text{ fm} = 10^{-15} \text{ m}$$

lido frequentemente como 1 fermi. O raio nuclear pode variar de 1 a 10 fm, enquanto o raio atômico pode chegar a $100.000 \text{ fm} = 0,1 \text{ nm}$.

Os diferentes tipos de núcleos são denominados de nuclídeos. Em 1913 F. Soddy, um dos colegas de Rutherford, propôs o conceito de isótopos, para as variedades de nuclídeos com mesmo número atômico Z e diferentes número de massa A .

Esses átomos ocupariam o mesmo lugar na tabela periódica, seriam quimicamente idênticos mas fisicamente distintos. Soddy propôs o conceito de isótopos, 20 anos antes da descoberta do nêutron, numa tentativa de explicar porque um mesmo elemento apresentava diferentes comportamentos radioativos.

Os números A e Z são utilizados para identificar os núclídeos e relacionam-se com o número de Nêutrons N de acordo com a eq. (15.1). A designação de uma espécie nuclear particular é simbolizada pela seguinte notação:

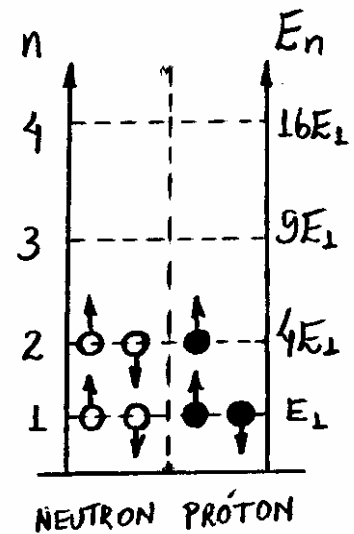
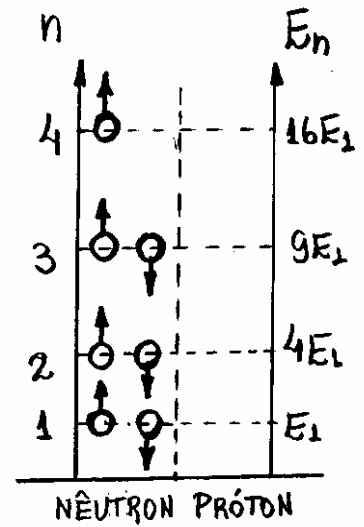
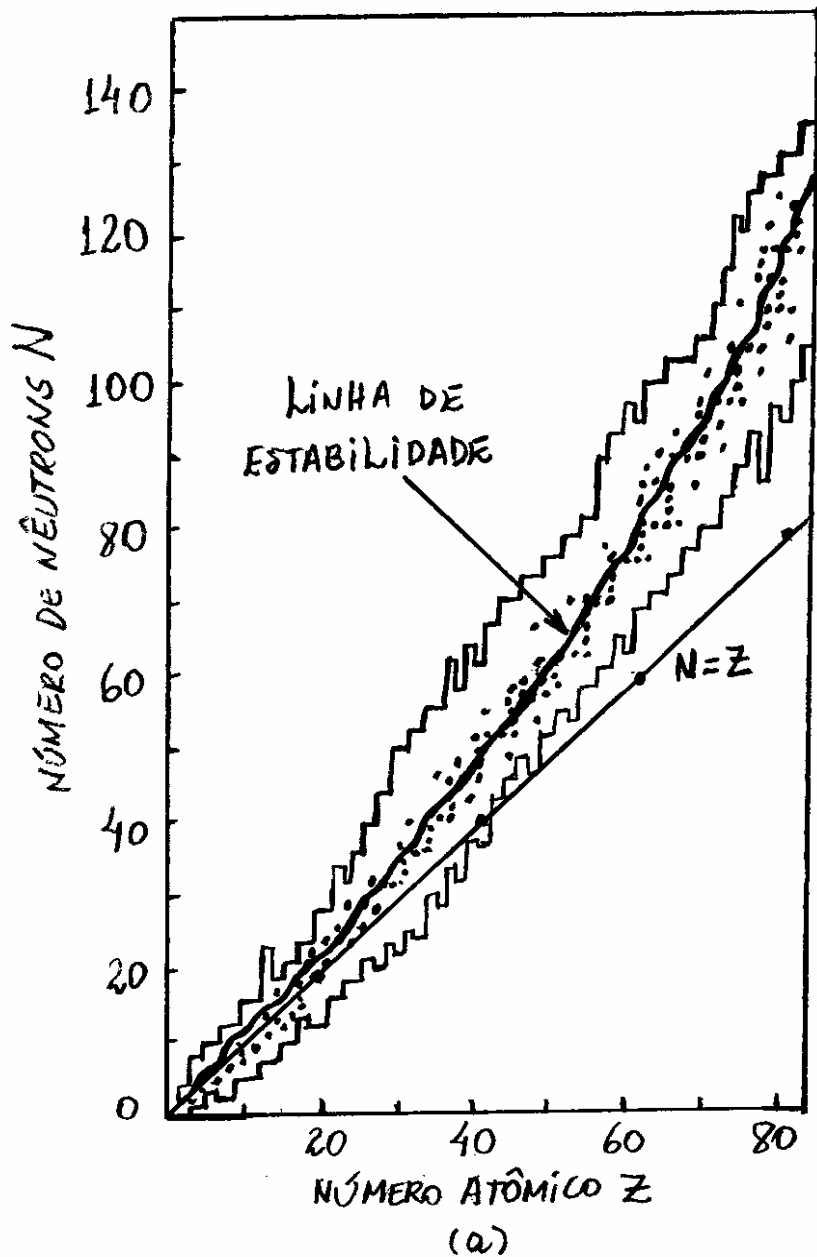
$$\begin{matrix} A \\ Z \end{matrix} X_N \quad (15.6)$$

onde X é o símbolo químico para o átomo de número atômico Z .

Uma outra categoria importante de núclídeos são aqueles que possuem o mesmo número de massa A , e são conhecidos com o isóbaros.

Dos mais de 3000 núclídeos conhecidos, existem somente 266 cujos estados fundamentais são estáveis. Todos os outros são instáveis e podem decair para outros tipos de núclídeos.

A Fig. 15.2 (a) mostra um gráfico do número de nêutrons N em função do número de prótons Z para nuclídeos estáveis e instáveis com tempos de vida superiores a 1ms.



(b)

Fig. 15.2 - (a) Comportamento do número de nêutrons N em função do número de prótons Z para os nuclídeos conhecidos. (b) Distribuição de 7 nêutrons e 4 nêutrons e 3 prótons, num poço de potencial infinito.

Os pontos no gráfico indicam os 266 núclídeos estáveis e a região entre as linhas irregulares representa os núclídeos instáveis.

A linha que passa pelo meio dos núclídeos estáveis é denominada de linha de estabilidade.

A forma geral da linha de estabilidade pode ser compreendida em termos do princípio de Pauli e da repulsão eletrostática entre prótons. Seja por exemplo, um modelo simples de poco de potencial infinito para dois núcleos com diferentes número de prótons e nêutrons, como mostrado nos diagramas da Fig. 15.2(b). Deve-se notar que a energia torna-se mínima quando são iguais o número de prótons e nêutrons, e máxima se todas as partículas forem do mesmo tipo. Existe portanto, uma tendência devido ao princípio de Pauli, para que $N=Z$. Essa tendência muda um pouco quando se inclui a repulsão eletrostática entre prótons, que deve ser proporcional ao número atômico Z . Quanto maior o valor de Z um número maior de nêutrons N deve ser requerido para se alcançar a condição de menor energia. Assim, a medida que se aumenta o número atômico Z , a condição de estabilidade deve ocorrer para $N > Z$.

O modelo de poco de potencial infinito para núcleos, mostrado na Fig. 15.2(b), é conhecido como modelo do gás de Fermi, onde os núcleos são tratados como um gás de Fermi constituído como uma mistura de prótons e nêutrons.

Neste modelo, os prótons e nêutrons movem-se livremente numa distribuição esférica, definida como o volume nuclear, comportando-se como um gás degenerado de Fermi, no qual os nucleons ocupam seus estados mais baixos de energia sem violar o princípio de Pauli. Próton e nêutron são partículas distinguíveis uma da outra, e assim o princípio de Pauli e a estatística de Fermi-Dirac podem ser aplicados aos dois nucleons separadamente.

A Fig. 15.3 mostra poços de potenciais constantes para representar o movimento livre de cada uma das partículas nucleares distintas. O efeito de repulsão Coulombiana entre prótons é representado por pontos $V_p(r) > 0$, no gráfico $V_p(r)$ em função de r .

Em cada caso, assume-se um grande número de níveis de energia, com ocupação total para todos aqueles que estão abaixo do nível de Fermi (E_{F_n} para nêutrons e E_{F_p} para prótons).

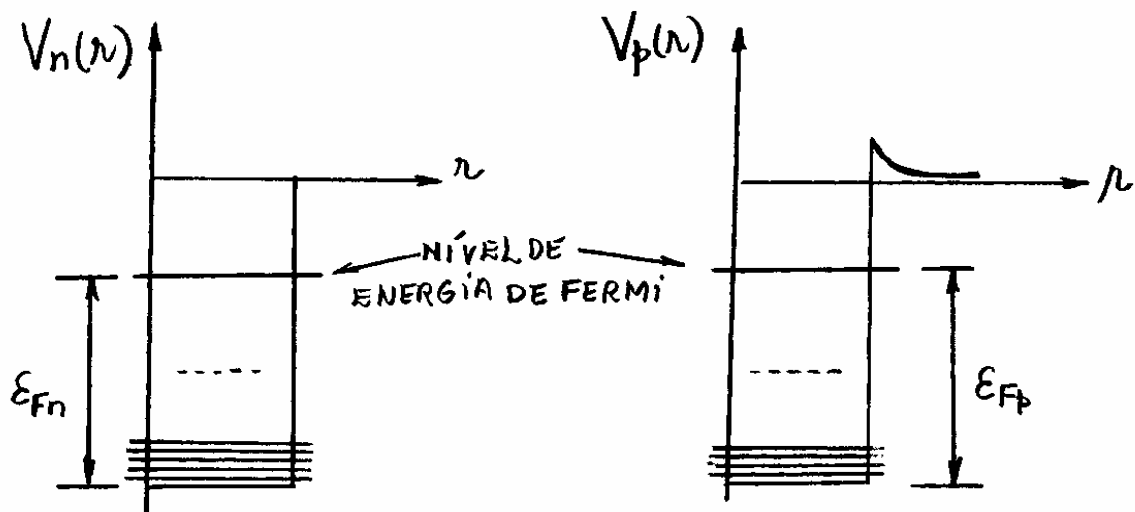


Fig. 15.3 - Interação nuclear entre, (a) nêutron e, (b) prótons de acordo com o modelo dos gás de Fermi.

15.4 - Espalhamento de Elétrons e Raio Nuclear.

Todos os métodos utilizados para medir raios nucleares, mostram que são proporcionais a raiz quadrada do número de massa A . O raio nuclear pode ser encontrado, principalmente, por meio de experimentos de espalhamento de elétrons, analogamente aquele executado por Rutherford com partículas α .

Para esse método, adota-se um modelo esférico para os núcleos e representa-se a densidade de carga nuclear $\rho(r)$ por uma distribuição de Fermi-Dirac, dada por

$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{1 + e^{(r-R)/\alpha}} \quad (15.7)$$

onde, os parâmetros R e α controlam a variável radial r . O coeficiente ρ_0 é proporcional a densidade de carga centrada em $r=0$

$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{1 + e^{-R/\alpha}} \quad (15.8)$$

tal que $\rho_0 \approx \rho(0)$ para $R \gg \alpha$. Pode-se compreender o significado desse modelo observando-se o gráfico da Fig. 15.4.

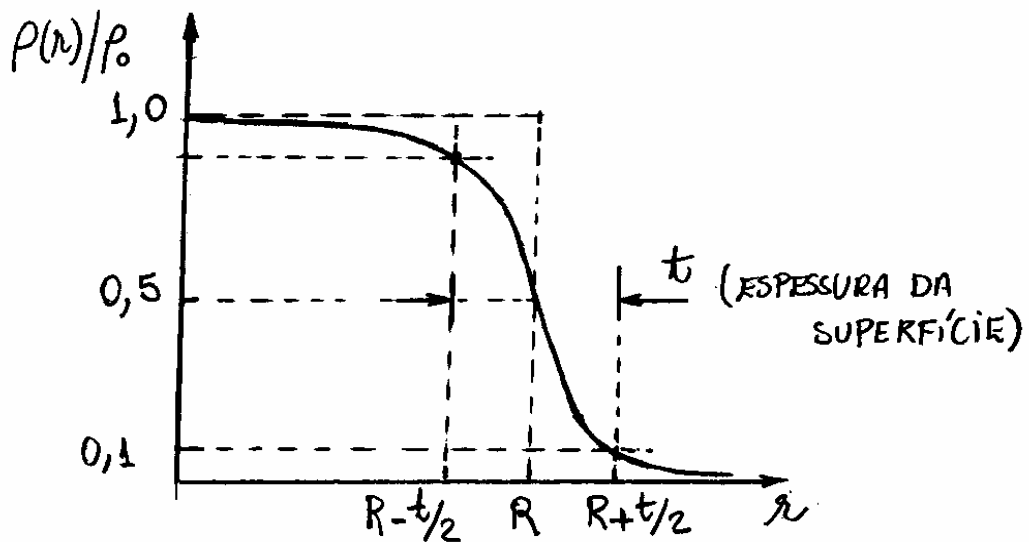


Fig. 15.4 - Parametrização da densidade de carga Nuclear.

O gráfico mostra que a densidade de carga nuclear $\rho(r)$ cai de $\frac{1}{2}\rho_0$ quando $r=R$, e cai de $0,9\rho_0$ a $0,1\rho_0$ sobre uma pequena distância t definida como a espessura da superfície nuclear.

Particularmente, o gráfico mostra que $\rho(r)/\rho = 0,1$ para $r = R + t/2$ que, substituída na eq. (15.7), fornece

$$0,1 = \frac{1}{1 + e^{(R+t/2-R)/\alpha}} \Rightarrow 1 + e^{t/2\alpha} = 10$$

$$\Rightarrow e^{t/2\alpha} = 3^2 \Rightarrow \frac{t}{2\alpha} = 2 \ln 3$$

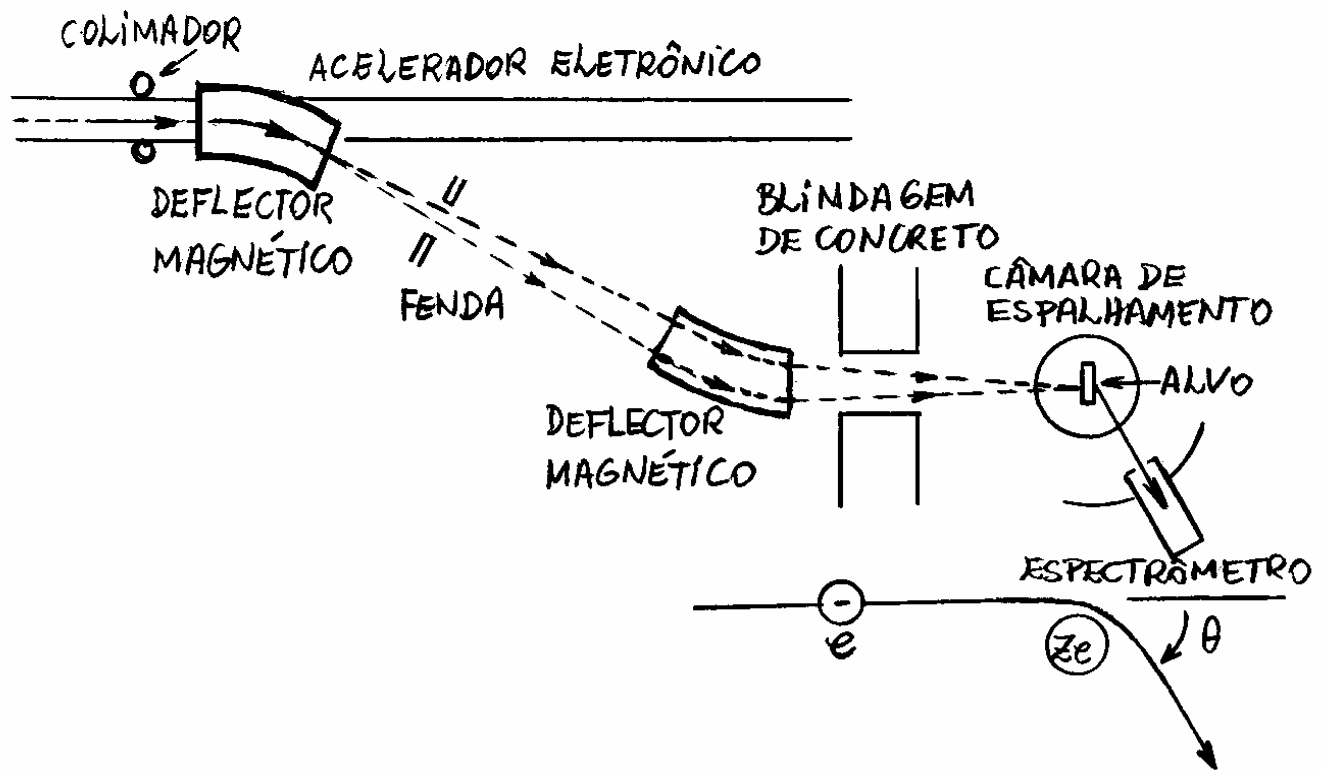
ou

$$t = 4\alpha \ln 3 \quad (15.9)$$

isto é, a espessura t da superfície nuclear está relacionada diretamente ao parâmetro α da eq. (15.7).

Medidas refinadas da estrutura nuclear foram realizadas após o desenvolvimento dos aceleradores de partículas. A primeira série dessas medidas foram executadas por Robert Hofstadter e colaboradores a partir de 1953, utilizando o acelerador linear de Stanford (SLAC \rightarrow Stanford Linear Accelerator).

O experimento é mostrado na Fig. 15.5, e utiliza feixes de elétrons com energias entre 200 e 500 MeV.



15.5 - Diagrama do experimento de espalhamento de elétrons com o acelerador de Stanford.

O equipamento inclui um acelerador de elétrons, defletoras magnéticas, um alvo espalhador de uma espécie X , e um espectrômetro para detectar elétrons espalhados elasticamente em direções angulares θ . A distribuição angular dos elétrons espalhados determina o padrão de difração gerado pelos núcleos espalhadores.

Analogamente ao estudo de espalhamento de partículas α por Rutherford, a distribuição de intensidades de elétrons de alta energia, é apresentada frequentemente

em termos de uma seção de choque diferencial de espalhamento $d\sigma/d\Omega$.

A Fig. 15.6 mostra um exemplo de espalhamento de elétrons de energia $\Delta E = 420$ MeV, por um alvo de ${}^6\text{C}$. A energia do elétron é tal que o comprimento de onda correspondente seja menor que o raio nuclear da amostra.

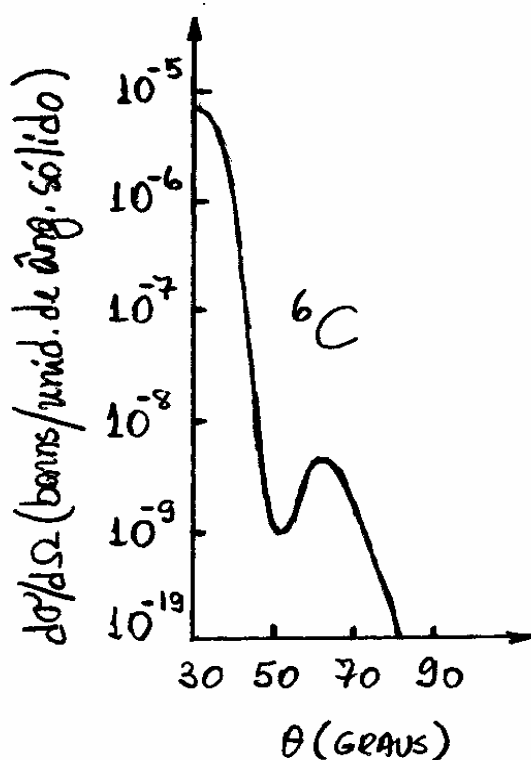


Fig. 15.6 - Figura de difração de elétrons em núcleos espalhadores de ${}^6\text{C}$, para elétrons incidente de energia $\Delta E = 420$ MeV.

Considerando o feixe de elétrons incidente como uma onda plana de comprimento de onda λ , o processo de espalhamento será equivalente à difração da luz por uma abertura circular de diâmetro D . Assim, o primeiro mínimo da figura de difração ocorre, quando

$$\sin\theta = 1,22 \frac{\lambda}{D} = 0,61 \frac{\lambda}{R} \quad (15.10)$$

onde $R = D/2$ é o raio nuclear.

Para uma dada energia dos elétrons incidente, as figuras de difração observadas para núcleos de número de massa A mais elevados, apresentam mínimos adicionais cada vez mais próximos entre si. Este fato, juntamente com a eq. (15.7), mostra que o raio da distribuição de carga nuclear aumenta com o aumento de A .

Resultados quantitativos são apresentados na Fig. 15.7, onde as curvas fornecem as densidades de carga $\rho(r)$ obtidas para alguns núclídeos, dentre eles ${}^6\text{C}$.

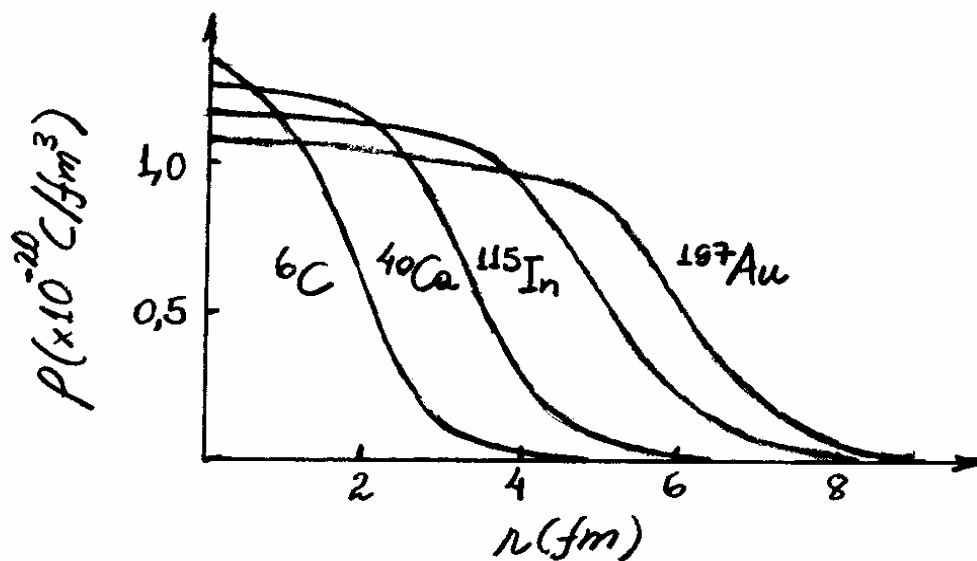


Fig. 15.7 - Densidade de carga nuclear para alguns núclídeos, obtidas a partir de experimentos de espalhamento de elétrons de alta energia.

Normalizando cada uma dessas curvas tal que se tenha um máximo $\rho(r)/\rho_0 = 1$, e comparando-os com o modelo teórico dado na Fig. 15.4, pode-se

concluir, que

$$R = R_0 A^{1/3} \quad (15.11)$$

com $R_0 = 1,07 \text{ fm}$, e

$$t = 2,4 \text{ fm} \quad (15.12)$$

Outros métodos confirmam a dependência do raio nuclear com o número de massa A como o da eq. (15.11). Em geral, tais métodos produzem valores de R_0 que variam entre 1,18 e 1,40 fm.

Exemplo 15.1 - FACULTATIVO.

Utilize o modelo do gás de Fermi para partículas nucleares para calcular a energia total $E = E_z + E_n$ de tais partículas.

Da eq. (15.11) os núcleos tem um volume esférico determinado pelo número de massa A :

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{4}{3} \pi R_0^3 A$$

De acordo com a eq. (11.72), as energias de Fermi são:

$$E_{F_p} = \frac{1}{2M} \left(\frac{3\pi^2 \hbar^3}{V} Z \right)^{2/3} = \frac{\hbar^2}{2M} \left(\frac{3\pi^2}{\frac{4}{3}\pi R_0^3 A} Z \right)^{2/3} = \frac{\hbar^2}{2MR_0^2} \left(\frac{9\pi}{4} \frac{Z}{A} \right)^{2/3} \quad (15.13)$$

para prótons e, similarmente

$$E_{F_n} = \frac{\hbar^2}{2MR_0^2} \left(\frac{9\pi}{4} \frac{N}{A} \right)^{2/3} \quad (15.14)$$

para neutrons. Nessas equações, Z e N são os números de prótons e neutrons, respectivamente, e M é a massa comum de ambas as partículas.

Lembrando-se da eq. (11.74), $E = \frac{3}{5} N E_F$, que dá a energia total das partículas em termos do número de partículas N e da energia de Fermi E_F , tem-se

$$E_Z = \frac{3}{5} Z E_{F_Z} = \frac{3}{10} \frac{\hbar^2}{MR_0^2} Z \left(\frac{9\pi}{4} \frac{Z}{A} \right)^{2/3} = \frac{3}{10} \left(\frac{9\pi}{4} \right)^{2/3} \frac{\hbar^2}{MR_0^2} A \left(\frac{Z}{A} \right)^{5/3} \quad (15.15)$$

para prótons e, similarmente

$$E_N = \frac{3}{10} \left(\frac{9\pi}{4} \right)^{2/3} \frac{\hbar^2}{MR_0^2} A \left(\frac{N}{A} \right)^{5/3} \quad (15.16)$$

para neutrons.

Pode-se perceber uma certa simetria em energia dos núcleos por causa de um certo desvio em torno da igualdade $Z=N=A/2$. É conveniente introduzir, portanto, uma mudança de variável, tal que

$$N = \frac{A}{Z} + \xi \quad \text{e} \quad Z = \frac{A}{Z} - \xi \quad (15.17)$$

ou,

$$\frac{N}{A} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2\xi}{A} \right) \quad \text{e} \quad \frac{Z}{A} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2\xi}{A} \right)$$

Dessas equações obtém-se a seguinte expressão binomial:

$$\begin{aligned} \left(\frac{Z}{A} \right)^{5/3} + \left(\frac{N}{A} \right)^{5/3} &= \left(\frac{1}{2} \right)^{5/3} \left[\left(1 - \frac{2\xi}{A} \right)^{5/3} + \left(1 + \frac{2\xi}{A} \right)^{5/3} \right] \\ &= \left(\frac{1}{2} \right)^{5/3} \left[1 - \frac{5}{3} \frac{2\xi}{A} + \frac{5}{9} \left(\frac{2\xi}{A} \right)^2 + \dots + 1 + \frac{5}{3} \frac{2\xi}{A} + \frac{5}{9} \left(\frac{2\xi}{A} \right)^2 + \dots \right] \\ &= \left(\frac{1}{2} \right)^{2/3} \left(1 + \frac{20}{9} \frac{\xi^2}{A^2} + \dots \right) \quad (15.18) \end{aligned}$$

Substituindo-se essa expansão na soma das eqs. (15.15) e (15.16), obtém-se para energia total do sistema de núcleons a seguinte expressão:

$$E = E_Z + E_N = \frac{3}{40} (9\pi)^{2/3} \frac{\hbar^2}{M R_0^2} \left(A + \frac{20}{9} \frac{\xi^2}{A} \right) \quad (15.19)$$

para a segunda ordem em ξ . Essa equação deve contribuir para a energia de repouso do núclídeo A_X .

15.5 - Massa Nuclear e Energia de Ligação

O experimento de Thomson para medidas de e/m mostrava-se capaz de detectar também diferenças em massa de íons positivos de um determinado elemento. Experiências como essa, forneceram as primeiras evidências da existência de dois isótopos de átomos de Neônio de números de massa $A=20$ e $A=22$. A notação da massa atômica tem sido introduzida para representar a massa média sobre todas as abundâncias de isótopos estáveis dos elementos.

Em 1919, F.W. Aston desenvolve a primeira versão iônica do experimento de Thomson. O instrumento, mostrado na Fig. 15.8 para casos de amostras gasosas, separa isótopos de acordo com suas massas, fornece uma medida precisa das massas dos íons observados e, por causa disso, ficou conhecido como espectrômetro de massa.

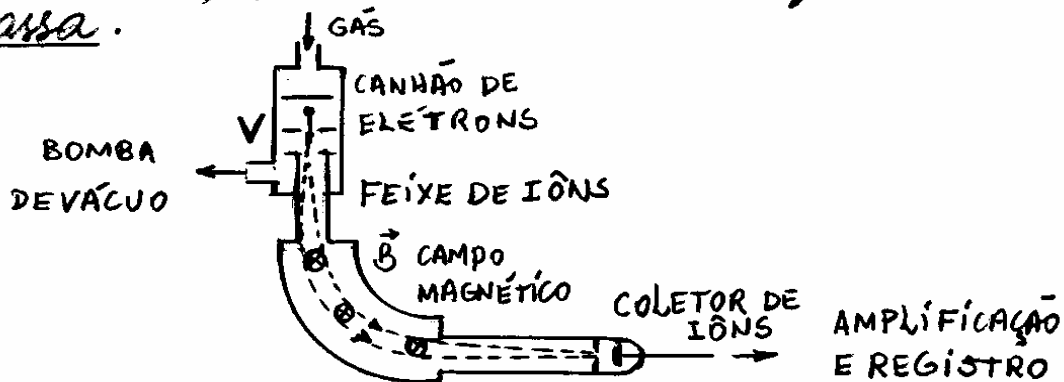


Fig. 15.8 - Montagem típica de um espectrômetro de massa.

Na montagem da Fig. 15.8, os átomos de uma amostra gasosa a baixa pressão, são bombardeados com elétrons para formar íons positivos. Campos elétricos e magnéticos guiam as cargas para um detector de íons que são coletados separadamente de acordo com suas massas.

A voltagem V acelera os íons à uma velocidade v que são então, defletidos em uma trajetória circular de raio R por um campo magnético \vec{B} . Íons não relativísticos de massa M e carga e , adquire uma energia cinética

$$\frac{1}{2} M v^2 = eV \quad (15.20)$$

e uma força centrípeta

$$M \frac{v^2}{R} = Bev$$

ou

$$v = BR \frac{e}{M}$$

que, substituída na eq. (15.20), resulta

$$\frac{M}{e} = \frac{(BR)^2}{2V} \quad (15.21)$$

O espectrômetro de massa opera com valores fixos de B e R e emprega uma voltagem variável para que se possa coletar íons com diferentes razões M/e . Essa técnica produz espectros de massa como o mostrado na Fig. 15.9 para o caso de átomos de Xenônio.

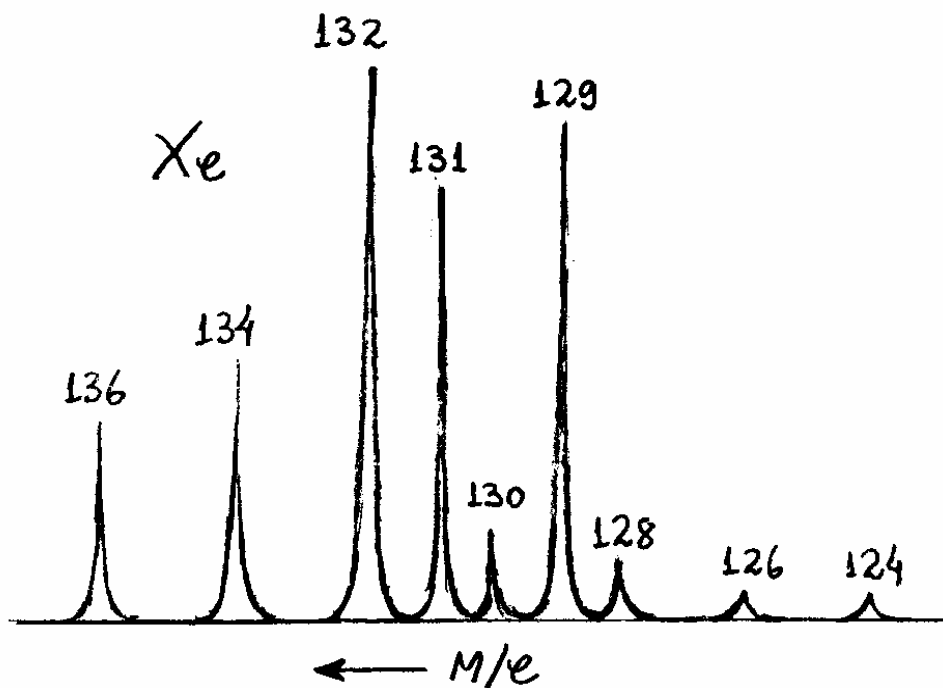


Fig. 15.9 - Espectro de massa do Xenônio mostrando abundâncias relativas de 9 isótopos estáveis.

As massas das partículas microscópicas podem ser medidas com mais precisão comparando-se a massa desconhecida com as massas de certas partículas padrões.

Sabe-se que a energia de ligação E_b mantém juntas um agregado de partículas por interações atrativas. Tal energia pode ser definida em termos de energias relativísticas de repouso, como

$$E_b = \sum_i M_i c^2 - M c^2 \quad (15.22)$$

onde $M c^2$ é a energia de repouso do agregado de partículas em relação ao centro de massa e, $M_i c^2$ são as energias de repouso de cada partícula do agregado individualmente.

Para o caso de um átomo neutro de Z elétrons, a eq. (15.22) reduz-se, a

$$E_b(\text{átomo}) = [M(\text{núcleo}) + Z m_e - M(\text{átomo})] c^2 \quad (15.23)$$

Tais energias de ligação atômica assumem valores de 13,6 eV, 13,6 eV e 79,0 eV para o hidrogênio, deutério e Hélio, respectivamente. Deve-se lembrar que o deutério (${}^2\text{H}$) é o hidrogênio cujo o núcleo tem um próton e um nêutron.

Para o caso de um núcleo de Z prótons e N nêutrons, a eq. (15.22) reduz-se, a

$$E_b(\text{núcleo}) = [Z M_p + N M_n - M(\text{núcleo})] c^2 \quad (15.24)$$

Somando-se as eq. (15.23) e (15.24), obtêm-se

$$E_b(\text{núcleo}) + E_b(\text{átomo}) = [ZM_p + NM_n + Zm_e - M(\text{átomo})]c^2$$

Como as energias de ligação dos átomos são da ordem de keV e as energias de ligação dos núcleos são da ordem de MeV, quase sempre se despreza a primeira nos estudos de física nuclear tal que, a equação anterior, torna-se

$$E_b(\text{núcleo}) = [Z(M_p + m_e) + NM_n - M(\text{átomo})]c^2 \quad (15.25)$$

O termo $M_p + m_e$ corresponde a massa do átomo de hidrogênio ${}^1\text{H}$, de modo que a eq. (15.25) fornece a energia de ligação de um núclídeo ${}^A_Z\text{X}$, como

$$E_b({}^A_Z\text{X}) = [ZM({}^1\text{H}) + NM_n - M({}^A_Z\text{X})]c^2 \quad (15.26)$$

onde $M({}^A_Z\text{X})$ e $M({}^1\text{H})$ referem-se as massas atômicas de átomos neutros que, após ionizados, podem ser determinadas diretamente por espectrometria de massa.

Para os casos de um próton ${}^1\text{H}^+$ e um ião deutério ${}^2\text{H}^+$ (partícula formada por um próton e um nêutron), a eq. (15.26) fornece

$$E_b({}^2\text{H}^+) = [1 \times M({}^1\text{H}^+) + 1 \times M_n - M({}^2\text{H}^+)]c^2$$

ou,

$$M_n = \frac{1}{c^2} E_b(^2\text{H}^+) + M(^2\text{H}^+) - M(^1\text{H}^+) \quad (15.27)$$

Experiências com reações nucleares de colisões entre íons de deutério ($^2\text{H}^+$), permite encontrar a energia de ligação entre o próton e o neutrão nesse íon. Experiências como essa, aliada a eq. (15.27), mostram que a "massa atômica" do neutrão, é

$$M_n = 1,008665 \text{ uma} \quad (15.28)$$

Adotando-se o valor de M_n , dado na eq. (15.28), e resultados de experiências de espectrometria de massa, é possível calcular a energia de ligação $E_b(^A\text{X})$ para qualquer nuclídeo ^AX da tabela periódica. A Fig. 15.10 mostra um gráfico da energia de ligação por nucleon E_b/A para vários nuclídeos como função do número de nucleons A .

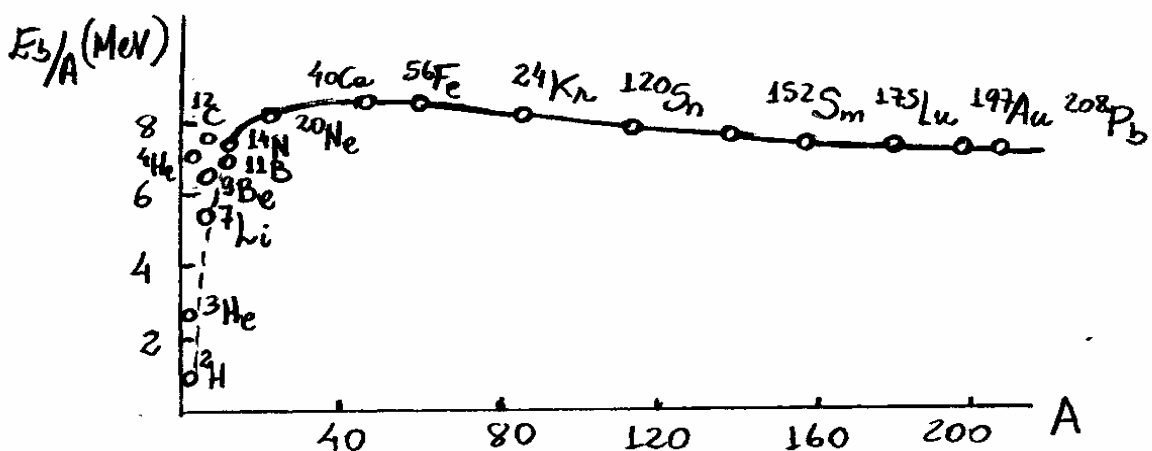


Fig. 15.10 - Energia de ligação por nucleon em função do número de nucleons, obtido por A. H. Wapstra e K. Bos.

É interessante observar que a energia de ligação por nucleon tem uma certa estabilidade em torno de 8 MeV por nucleon para todos os núcleos com $A > 16$. Esse comportamento indica um fenômeno de saturação que reflete a natureza de curto alcance das forças nucleares.

Exemplo 15.2 :

A unidade de massa atômica (uma) é definida em termos do carbono ^{12}C , como

$$1 \text{ uma} = \frac{1}{12} M(^{12}\text{C}) \quad (15.29)$$

(a) Converta 1 uma para o sistema internacional de medidas (MKS) e, calcule a energia de repouso correspondente.

(b) Sabendo-se que uma amostra de carbono apresenta dois isótopos estáveis ^{12}C e ^{13}C , com massas atômicas e abundâncias isotópicas, dadas na Tabela abaixo:

	^{12}C	^{13}C
MASSA ATÔMICA (uma)	EXATAMENTE 12	13,00335482
ABUNDÂNCIA ISOTÓPICA (%)	98,90	1,10

Calcule o peso atômico (Média das massas atômicas) desse elemento.

(c) Sabendo-se que $M(^1\text{H}) = 1,007825 \text{ uma}$, Calcule a energia de ligação por nucleon para o ^{12}C .

$$(a) 1 \text{ uma} = \frac{1}{12} M(^{12}\text{C}) = \frac{1}{12} \frac{12 \text{ g/mol}}{6,0221 \times 10^{23} / \text{mol}} = 1,6606 \times 10^{-24} \text{ g}$$

ou,

$$1 \text{ uma} = 1,6606 \times 10^{-27} \text{ kg} \quad (15.30)$$

A energia de repouso, é

$$1 \text{ uma} c^2 = 1,6606 \times 10^{-27} \text{ kg} \times (2,9979 \times 10^8 \text{ m/s})^2 = 1,492 \times 10^{-10} \text{ J}$$

ou,

$$1 \text{ uma} c^2 = 931,50 \text{ MeV} \quad (15.31)$$

(b) Peso Atômico $\equiv P(\text{C}) = 0,9890 \times 12 + 0,0110 \times 13,00335482$

ou,

$$P(\text{C}) = 12,011 \text{ uma} \quad (15.32)$$

(c) Para o ^{12}C , $Z=N=6$, tal que a eq. (15.26), fornece

$$E_b(^{12}\text{C}) = [6(1,007825) + 6(1,008665) - 12] c^2 = 0,09894 c^2$$

Como, $1 \text{ uma} c^2 = 931,50 \text{ MeV}$, então

$$E_b(^{12}\text{C}) = 0,09894 \times 931,50 \text{ MeV} = 92,16 \text{ MeV}$$

A energia de ligação por nucleon é, então

$$\frac{E_b(^{12}\text{C})}{A} = \frac{92,16 \text{ MeV}}{12} = 7,680 \text{ MeV}$$

15.6 - Modelo Nuclear da Gota Líquida e Equação de Weizsäcker - FACULTATIVO.

No início da década do ano de 1930, notava-se que a densidade de matéria nuclear e a Energia de ligação por nucleon eram aproximadamente as mesmas para a maioria dos núcleos estáveis. Essa característica levou os pesquisadores a comparar o núcleo com uma gota líquida, que também apresenta uma densidade constante, no caso, de moléculas.

Para se remover moléculas de uma gota líquida é necessária uma energia de vaporização, que é proporcional ao número de moléculas, da mesma forma que a energia de ligação E_b é proporcional ao número de nucleons.

Utilizando o modelo nuclear da gota líquida, em 1935, C.F. von Weizsäcker propõe uma equação semi-empírica que permite calcular a energia de ligação nuclear $E_b(A, Z)$ e, conseqüentemente, a massa nuclear a partir da eq. (15.26). Tal equação, conhecida como equação de Weizsäcker, é dada por

$$E_b(A, Z) = a_1 A - a_2 A^{2/3} - a_3 \frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_4 \frac{(A/2 - Z)}{A} + E_5 \quad (15.33)$$

O primeiro termo tem sua origem no fato que a energia de ligação por nucleon é aproximadamente constante $E_b/A = a_1$, como revelado no gráfico da Fig. 15.10. A energia

$$E_{b1} = a_1 A$$

é denominada de energia de volume, pois a dependência linear com A está relacionada ao volume de uma esfera cujo raio varia com $A^{1/3}$, como na eq. (15.11), em que $R = R_0 A^{1/3}$.

O segundo termo é uma correção do primeiro. Nucleons que estão na superfície do núcleo tem menos interação com vizinhos do que os nucleons internos. Como a área da superfície é proporcional a $R^2 = R_0^2 A^{2/3}$, então essa energia é proporcional a $A^{2/3}$, isto é

$$E_{b2} = -a_2 A^{2/3}$$

Tal energia, conhecida como correção de superfície, é análoga a tensão superficial observada nas superfícies dos líquidos. O sinal negativo é necessário por que um menor número de interação implica numa energia de ligação menor. Este termo é responsável pela queda brusca da energia de ligação por nucleon para pequenas valores de A , como observado na Fig. 15.10.

O terceiro termo está associado à repulsão entre prótons. Pode-se recorrer a teoria eletromagnética para calcular a energia potencial média U armazenada numa esfera uniforme de carga $Q = Ze$ e raio R .

A partir da lei de Gauss mostra-se que os campos elétricos \vec{E} , dentro e fora, dessa esfera são, respectivamente:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qr}{R^3} \hat{r} \quad \text{para } r \leq R$$

e

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{r} \quad \text{para } r > R$$

Como a densidade de energia armazenada num campo elétrico \vec{E} , é dada por $\mu = dU/dv = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$, então

$$U = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int E^2 dV = \frac{1}{2} \epsilon_0 \left[\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^3} \right)^2 \int_0^R r^2 r^2 d\Omega + \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} Q \right)^2 \int_R^\infty \frac{1}{r^2} r^2 d\Omega \right]$$

onde, $d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$, é o elemento de ângulo sólido. Executando-se os cálculos, obtém-se

$$U = \frac{3}{5} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(Ze)^2}{R} = \frac{3}{5} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(Ze)^2}{R_0 A^{1/3}}$$

uma vez que $R = R_0 A^{1/3}$ para núcleos atômicos.

Logo, deve-se concluir que

$$E_{b3} = -a_3 \frac{Z^2}{A^{2/3}}$$

O sinal negativo é necessário porque a repulsão entre prótons deve diminuir a energia de ligação nuclear.

O quarto termo,

$$E_{b4} = -a_4 \frac{(A/2 - Z)^2}{A} = -a_4 \frac{[\frac{1}{2}(N+Z) - Z]^2}{A} = -a_4 \frac{(N-Z)^2}{4A}$$

é um termo empírico de origem quântica que está associado com as propriedades fermiônicas dos nucleons, e inclui o fato que a energia do núcleo aumenta quando $N \neq Z$, como ilustrado na Fig. 15.2. Esse termo, conhecido como termo de simetria, anula-se quando $N=Z$ e independe do sinal de $N-Z$.

O quinto termo, dado por

$$E_5 = E_{b5} = \begin{cases} + \frac{a_5}{A^{3/4}} & \text{para } Z \text{ e } N \text{ pares} \\ - \frac{a_5}{A^{3/4}} & \text{para } Z \text{ e } N \text{ ímpares} \\ 0 & \text{para } Z \text{ e } N \text{ de paridades} \\ & \text{diferentes} \end{cases}$$

é também um termo empírico que inclui a tendência que os núcleons tem de formar pares com núcleons idênticos. Esse termo, conhecido como termo de paridade, aumenta a energia de ligação nuclear para núcleos com Z e N pares e diminui para núcleos com Z e N ímpares.

Combinando-se a eq. (15.33) com a eq. (15.26), obtém-se uma versão semi-empírica da fórmula de Weizsäcker para a massa nuclear:

$$M(A, X) = ZM(^1_1\text{H}) + (A - Z)M_n - \frac{1}{c^2} \left[a_1 A - a_2 A^{2/3} - a_3 \frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_4 \frac{(A/2 - Z)^2}{A} + E_5 \right] \quad (15.34)$$

onde $N = A - Z$ na eq. (15.33). Essa equação é uma fórmula semi-empírica porque as constantes a_1, a_2, a_3, a_4 e a_5 são determinadas por um ajuste da eq. (15.34) a dados experimentais. Um excelente ajuste é obtido com os seguintes parâmetros:

$$a_1 = 15,76 \text{ MeV} ; a_2 = 17,81 \text{ MeV} ; a_3 = 0,7105 \text{ MeV}$$

$$a_4 = 94,80 \text{ MeV} ; a_5 = 39 \text{ MeV}$$

O comportamento da fórmula semi-empírica da massa nuclear $M(A, Z)$ como função do número atômico Z , estabelece um critério de estabilidade dos núcleos quando estes são organizados como isóbaros (mesmos valores de A). A eq. (15.34) descreve uma função quadrática de $M(A, Z)$ com Z , cujo ponto de mínimo pode ser determinado da seguinte condição:

$$\frac{\partial M}{\partial Z} c^2 = [M(^4\text{H}) - M_n] c^2 + 2a_3 \frac{Z}{A^{1/3}} + 2a_4 \frac{Z - A/2}{A} = 0$$

ou,

$$Z \equiv Z_A = \frac{A}{2} \frac{a_4 + [M_n - M(^4\text{H})] c^2}{a_4 + a_3 A^{2/3}} \quad (15.35)$$

Assim, a eq. (15.34) prevê um isóbaros de número de massa A estável (massa nuclear $M(A, Z)$ mínima), quando o número atômico Z satisfaz a eq. (15.35). A Fig. 15.11 ilustra o comportamento de $M(A, Z)$ com Z para três escolhas consecutivas de número de massa A .

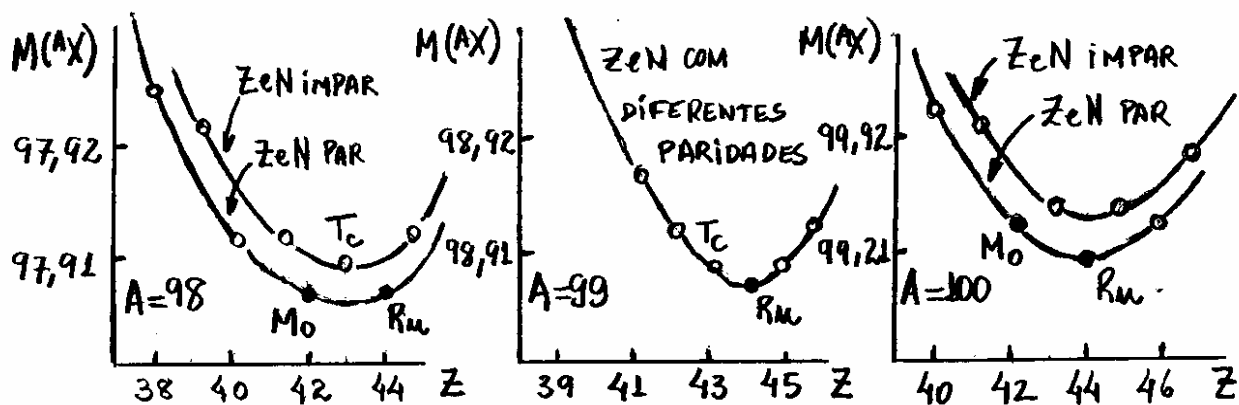


Fig. 15.11 - Massas isobáricas em função do número atômico para três valores consecutivos do número de massa A .

Quando A é ímpar, ou Z e N tem paridades diferentes, $E_5 \equiv 0$ e, nesse caso, a eq. (15.34) fornece uma parábola única. Entretanto, se A é par, o termo E_5 desloca o gráfico para baixo quando Z e N são pares e para cima quando Z e N são ímpares.

Na Fig. 15.11, os isóbaros estáveis são $^{98}_{42}\text{Mo}$ e $^{98}_{44}\text{Ru}$ para $A=98$, $^{99}_{44}\text{Ru}$ para $A=99$, e $^{100}_{42}\text{Mo}$ e $^{100}_{44}\text{Ru}$ para $A=100$.

Deve-se notar que o nuclídeo Tecnécio $^{A}_{43}\text{Tc}$ aparece nas três partes da Fig. 15.11 e que, em nenhuma delas essa espécie é estável. De fato, não existe nenhuma estabilidade do nuclídeo $^{A}_{43}\text{Tc}$ para qualquer valor de A . O tecnécio Tc ($Z=43$) e o paramécio Pm ($Z=61$), são os únicos nuclídeos não-estáveis no domínio dos elementos estáveis abaixo do bismuto Bi ($Z=83$).

15.7 - Interação entre Nucleons

Nas seções anteriores, considerou-se somente as propriedades globais de todos os núcleos, sem se preocupar com detalhes da estrutura nuclear. Nesta seção pretende-se ilustrar esse importante aspecto da física nuclear utilizando o sistema nuclear mais simples, o déuteron (${}^2\text{H}$), formado por um próton e um nêutron.

O déuteron é simbolizado por d , tem número de massa $A=2$, é um sistema simples por ter somente uma interação próton-nêutron. Resultados experimentais mostram que o déuteron tem energia de ligação e raio nuclear, dados por

$$E_b({}^2\text{H}) = 2,225 \text{ MeV} ; R_d = 2,1 \text{ fm} \quad (15.36)$$

O momento angular de spin \vec{I} do déuteron é obtido da adição dos spins do próton \vec{S}_p , do nêutron \vec{S}_n e do momento angular orbital \vec{L} do sistema próton-nêutron, isto é

$$\vec{I} = \vec{L} + \vec{S}_p + \vec{S}_n \quad (15.37)$$

A Fig. 15.12 mostra um diagrama que ilustra essa composição vetorial.

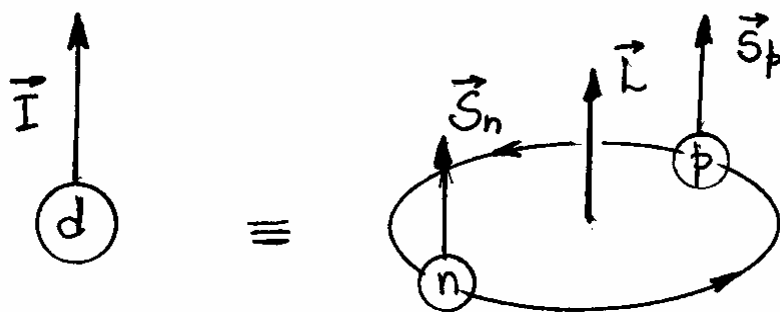


Fig. 15.12. Contribuições orbital e de spin do próton e nêutron para o spin do dêuteron.

Os termos da eq. (15.37) tem generalizaçãõ obvias para núcleos contendo Z prótons e N neutrons:

$$\vec{L} = \sum_{k=1}^Z \vec{L}_{pk} + \sum_{k=1}^N \vec{L}_{nk} ; \quad \vec{S}_p = \sum_{k=1}^Z \vec{S}_{pk} ; \quad \vec{S}_n = \sum_{k=1}^N \vec{S}_{nk} \quad (15.38)$$

Vale a pena mencionar aqui que as eq. (15.37) e (15.38), utilizadas para núcleos complexos, refere-se ao acoplamento LS discutido na secãõ 10.9 do capítulo.10. Assim como o caso atômico, o acoplamento LS só pode ser usado quando a interação entre partículas é dominante em relação a interação spin-órbita. Também como no caso atômico, isso deve ocorrer quando o número de partículas nucleares é pequeno. Na próxima seção será analisado certos aspectos que só podem ser compreendidos com a utilização do acoplamento jj.

De acordo com as regras de quantização para momentos angulares, tem-se

$$I = \hbar \sqrt{i(i+1)} \quad ; \quad I_z = \hbar m_i$$

onde $m_i = -i, \dots, i$. Para tal construção, adota-se um número quântico de spin nuclear i semi-inteiro para um núclídeo de número de massa A ímpar, e inteiro para o caso em que A é par. Para o caso do déuteron, cujo número de massa A é par, tem-se $i=1$.

Deve-se reconhecer a analogia das eqs. (15.37) e (15.38) com o momento angular total \vec{J} na teoria de átomos complexos. Portanto, a notação espectroscópica $^{2s+1}L_j$, utilizada para a descrição dos estados atômicos num acoplamento LS, também pode ser adotada na descrição dos estados nucleares simplesmente substituindo-se j e m_j por i e m_i , isto é

$$^{2s+1}L_i \quad (15.39)$$

Uma configuração spin-paralelo ($s=1$) para o déuteron num estado orbital $l=0$, é consistente com o valor medido $i=1$. Invocando-se então a notação (15.39), pode-se referir ao déuteron como possuindo um estado

$$^3S_1 \quad (15.40)$$

Na secção 8.7 do capítulo 8 discutiu-se as condições de paridade para harmônicos esféricos $Y_{lm}(\theta, \varphi)$. A relação

$$Y_{lm}(\pi - \theta, \pi + \varphi) = (-1)^l Y_{lm}(\theta, \varphi)$$

dada na eq. (8.69), resume tais condições de operação de simetria.

Em termos dos números quânticos n, l, j , os estados de spin e paridade nucleares, são definidos por:

$$i^p \quad (15.41)$$

onde, $i = j$ e $p = \text{ sinal de } (-1)^l$. Particularmente, no caso do deuteron, tem-se uma paridade positiva do tipo:

$$1^+ \quad (15.42)$$

uma vez que, $i = 1$ e $l = 0$.

O fato de que o estado nuclear do deuteron $l = 0$ existe para $\beta = 1$, mas não para $\beta = 0$, mas não para $\beta = 0$, é uma evidência de que a interacção nuclear entre duas partículas depende dos spins dessas partículas.

Tal efeito ocorre por causa de uma estrutura hiperfina devido a um acoplamento spin-spin, análogo ao discutido no Capítulo 9. Uma expressão da forma $\vec{S}_p \cdot \vec{S}_n$ pode resultar num desdobramento de energia associados aos dois spins $s=0$ e $s=1$ no estado $l=0$ de um sistema próton-nêutron. Evidentemente, a situação não é exatamente a mesma a que ocorre no desdobramento hiperfino atômico, pois no caso nuclear a dinâmica não tem origem eletromagnética.

O estado orbital $l=0$ descreve uma distribuição de probabilidade esfericamente simétrica que define a forma do núcleo.

A distribuição de carga nuclear do deuteron resulta num pequeno momento de quadrupolo elétrico

$$Q_d = 2,82 \times 10^{-3} e \times \text{barn} \quad (15.43)$$

o qual é responsável por uma pequena deformação da forma esférica desse núcleo. A unidade $e \times \text{barn}$, onde e é a carga do elétron e $\text{barn} = 10^{-28} \text{m}^2$, para o momento de quadrupolo elétrico é apropriada na física nuclear.

O momento de quadrupolo elétrico clássico Q , é definido em termos de uma densidade de carga $\rho(\vec{r})$, por

$$Q = \int (3z^2 - r^2) \rho(\vec{r}) d\tau \quad (15.44)$$

onde, $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$. O núcleo é alongado quando $Q > 0$ e achatado quando $Q < 0$, ambos relativamente ao eixo z .

O momento de quadrupolo elétrico quântico para o deuteron é definido em termos do valor esperado de Q , como se segue:

$$\langle Q \rangle = e \int \Psi^* (3z_p^2 - r_p^2) \Psi d\tau = \frac{e}{4} \int \Psi^* (3z^2 - r^2) \Psi d\tau \quad (15.45)$$

onde $\vec{r} = 2\vec{r}_p$ e $z = 2z_p$ estão associados as coordenadas de um sistema de dois corpos formado por um próton e um nêutron, como ilustra a Fig. 15.13.

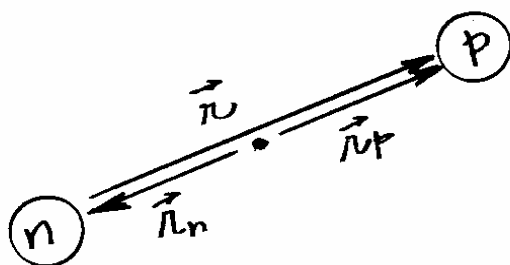


Fig. 15.13. - Sistema de dois corpos formando um deuteron.

Pode-se mostrar que $\langle Q \rangle = 0$ para um estado $l=0$. Assim, o pequeno valor observado de Q_d pode ser explicado somente se a função de onda do deuteron tem uma pequena parcela $l \neq 0$ compondo o estado 3S_1 .

Deve-se rejeitar a possibilidade de uma contribuição $l=1$ para o estado do deuteron, pois isso implicaria numa paridade errada. Escolhendo-se então a próxima opção $l=2$, conclui-se que o estado do deuteron é uma combinação de estados

$${}^3S_1 \quad \text{e} \quad {}^3D_1 \quad (15.46)$$

Deve-se ressaltar que a propriedade de tripleto de spin é mantida, pois $s=1$ e $l=2$ podem ainda ser combinados para preservar o número quântico $i=1$ do spin nuclear.

Resultados experimentais mostram que o momento de dipolo magnético do deuteron,

$$\mu_d = 0,8574 \mu_N \quad (15.47)$$

Deve-se lembrar que, da eq. (15.3), $\mu_p \approx 2,7928 \mu_N$ e $\mu_n \approx -1,9130 \mu_N$. A pequena probabilidade de ocorrência da correção $l=2$,

justifica a pequena discrepância entre os momentos magnéticos $\vec{\mu}_d$ e $\vec{\mu}_p + \vec{\mu}_n$.

As propriedades quânticas do dêuteron podem ser compreendidas com a ajuda da equação de Schrödinger.

É suficiente assumir que na interação entre nucleons do dêuteron, o acoplamento spin-spin tem somente um efeito secundário e que, portanto, a força nuclear deve estar associada integralmente a um potencial central $V(r)$ entre as duas partículas.

Nota-se que o dêuteron pode ser tratado adequadamente com o uso de um poco de potencial quadrado, parametrizado por uma profundidade V_0 de largura $r=r_0$, como mostra a Fig. 15.14.

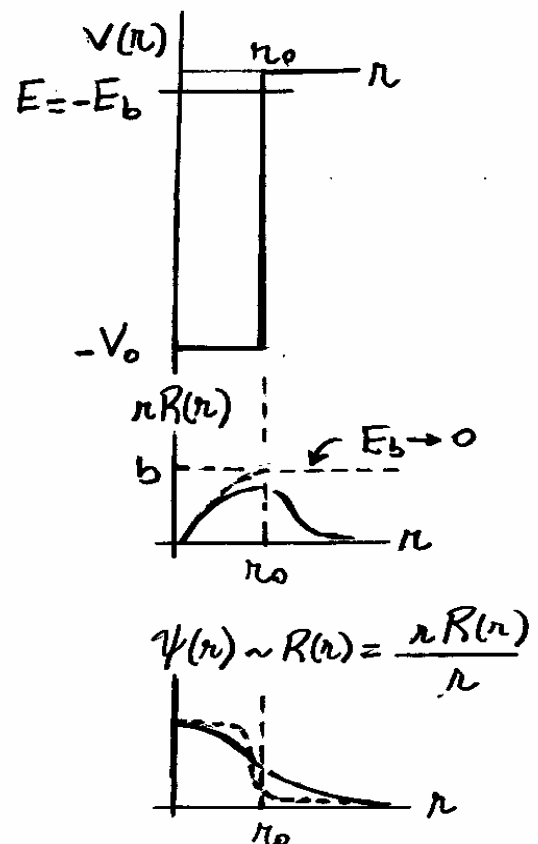


Fig. 15.14 - Modelo do potencial quadrado para a ligação das partículas do dêuteron.

Supondo-se que o próton e o nêutron tem mesma massa M , então, para o sistema mostrado na Fig. 15.13, pode-se adotar uma massa reduzida $\mu = \frac{1}{2}M$ e coordenadas vetoriais, dadas por

$$\vec{r}_p = \vec{r}_n = \frac{1}{2} \vec{r} \quad (15.48)$$

Assumindo-se que o dêuteron seja descrito por um estado puro 3S_1 com autovalor de energia $-E_b$, então a função de onda deve assumir a seguinte forma:

$$\psi(r) = R(r) Y_{00}(\theta, \varphi) = \frac{R(r)}{\sqrt{4\pi}} \quad (15.49)$$

pois, neste caso, $l=0$ e $m_l=0$.

A função radial $R(r)$ satisfaz a eq. (8.71) do Capítulo 8:

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2}{dr^2} (rR) + V_{ef}(rR) = E(rR)$$

onde

$$V_{ef}(r) = V(r) + \frac{\hbar^2}{2\mu r^2} l(l+1) = V(r)$$

pois $l=0$. Adotando-se $\mu = M/2$ e $E = -E_b$, a equação radial, torna-se

$$\frac{d^2}{dr^2} (rR) - \frac{M}{\hbar^2} [V(r) + E_b] (rR) = 0 \quad (15.50)$$

ou, para o modelo do poço de potencial qua-
drado

$$\frac{d^2}{dr^2}(rR) + \frac{M}{\hbar^2}(V_0 - E_b)(rR) = 0 \quad ; \quad r < r_0$$

e,

$$\frac{d^2}{dr^2}(rR) - \frac{M}{\hbar^2}E_b(rR) = 0 \quad ; \quad r > r_0$$

Adotando-se os números de onda,

$$k = \frac{\sqrt{ME_b}}{\hbar} \quad e \quad K = \frac{\sqrt{M(V_0 - E_b)}}{\hbar} \quad (15.51)$$

as equações anteriores, torna-se

$$\frac{d^2}{dr^2}(rR) + K^2(rR) = 0 \quad ; \quad r < r_0$$

e,

$$\frac{d^2}{dr^2}(rR) - k^2(rR) = 0 \quad ; \quad r > r_0$$

cujas soluções, são

$$rR(r) = \begin{cases} a \sin Kr & ; \quad r < r_0 \\ b e^{-kr} & ; \quad r > r_0 \end{cases} \quad (15.52)$$

Uma solução $rR(r) \sim \cos Kr$ ou, $R(r) \sim \cos Kr/r$,
não pode ser adotada para $r < r_0$, pois
 $R(0) \sim 1/0 \rightarrow \infty$. Do mesmo modo, a solução

$rR(r) \sim e^{kr}$, ou, $R(r) \sim 1/r e^{kr}$, também não

pode ser adotada para $r > r_0$, pois $R(\infty) \rightarrow \infty$.

Na Fig. 15.14 observa-se o comportamento das funções $rR(r)$ e $\psi(r)$ de acordo com as eqs. (15.52) e (15.49).

Das eqs. (15.52), a condição de continuidade da função $rR(r)$ e da sua derivada em $r=r_0$, fornece

$$a \sin Kr_0 = b e^{-kr_0} \quad \text{e} \quad Ka \cos Kr_0 = -k b e^{-kr_0}$$

Dividindo-se a segunda equação pela primeira, obtém-se

$$K \operatorname{ctg} Kr_0 = -k \quad (15.53)$$

ou, das eqs. (15.51)

$$\frac{\sqrt{M(V_0 - E_b)}}{\hbar} \operatorname{ctg} \frac{\sqrt{M(V_0 - E_b)}}{\hbar} r_0 = -\frac{\sqrt{ME_b}}{\hbar}$$

ou ainda

$$\operatorname{ctg} \frac{\sqrt{M(V_0 - E_b)}}{\hbar} r_0 = -\sqrt{\frac{E_b}{V_0 - E_b}} \quad (15.54)$$

Se $E_b \ll V_0$, ou $E_b \rightarrow 0$, como se sugere na Fig. 15.13, a relação geral dada na eq. (15.54), torna-se

$$\operatorname{ctg} \frac{\sqrt{MV_0}}{\hbar} r_0 = 0$$

ou

$$\frac{\sqrt{MV_0}}{\hbar} r_0 = \frac{\pi}{2} \quad \text{para } E_b \rightarrow 0 \quad (15.55)$$

Nessas condições, as eqs. (15.51) fornecem

$$k=0 \quad \text{e} \quad K = \frac{\sqrt{MV_0}}{\hbar} = \frac{\pi}{2r_0} \quad \text{para } E_b \rightarrow 0 \quad (15.56)$$

e as eqs. (15.52), tornam-se

$$rR(r) = \begin{cases} a \sin(\pi r / 2r_0) & ; r < r_0 \\ b & ; r > r_0 \end{cases} \quad (15.57)$$

para o caso limite $E_b \rightarrow 0$. O comportamento dessa solução é representada pela curva traçada na Fig. 15.14.

Nota-se que quando $E_b \rightarrow 0$ a solução $\psi(r)$ fica restrita somente ao interior do poço de potencial. A forte descontinuidade da autofunção $\psi(r)$ implica que este estado é incapaz de revelar detalhes da força entre núcleons com boa resolução.

A condição geral pode ser analisada graficamente, fazendo-se uma mudança de variável $Kr_0 = \mu$ na eq. (15.53), tal que

$$\frac{\mu}{r_0} \operatorname{ctg} \mu = -k$$

ou

$$\operatorname{tg} \mu = -\frac{\mu}{k r_0} \quad (15.58)$$

A solução dessa equação transcendental é representada por pontos de interseção dos gráficos das funções $\operatorname{tg} \mu$ e $-\mu/k r_0$, como mostra a Fig. 15.15.

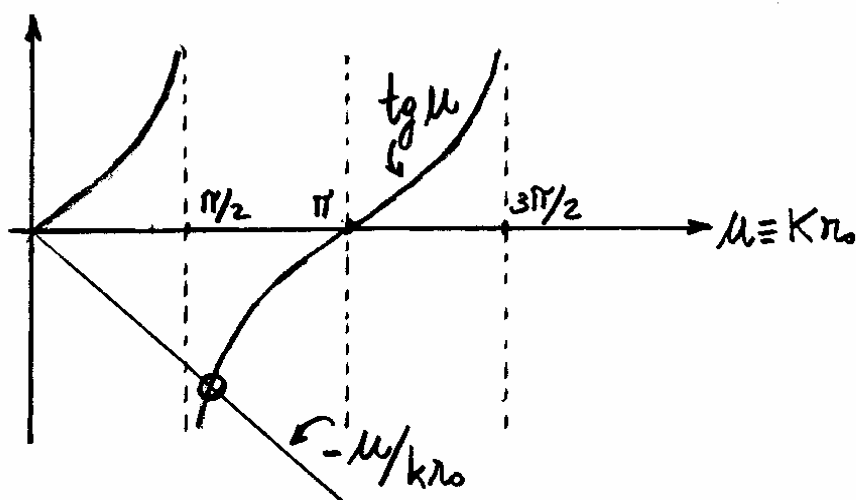


Fig. 15.15 - Solução geral para o dêuteron no modelo do poço de potencial quadrado.

A Fig. 15.15 indica a seguinte condição para a solução, $\pi/2 < k r_0 < \pi$, ou

$$\pi/2 < \frac{\sqrt{M(V_0 - E_b)} r_0}{\hbar} < \pi \quad (15.59)$$

Quando $E_b \rightarrow 0$, ou $k = \sqrt{M E_b} / \hbar \rightarrow 0$, a Fig. 15.14 mostra que, $K r_0 \rightarrow \pi/2$, ou

$$K \rightarrow \pi/2r_0$$

que concorda com a conclusão obtida da eq. (15.56).

No modelo discutido acima para a interação entre nucleons não leva em conta o efeito do caroço repulsivo de curto alcance presentes em tais pares de partículas. Esse efeito poderia ser considerado se o poço quadrado da Fig. 15.14 fosse substituído pela forma mostrada na Fig. 15.16.

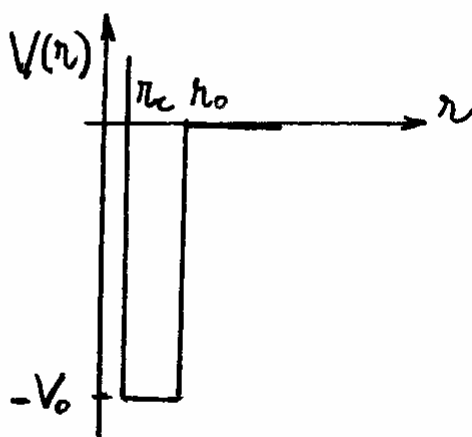


Fig. 15.16 - Poço de potencial quadrado incluindo um caroço infinitamente repulsivo de raio r_c . Parâmetros realísticos para o deutero nesse sistema modelo são: $V_0 = 70 \text{ MeV}$, $r_0 = 1,7 \text{ fm}$ e $r_c = 0,4 \text{ fm}$.

Por causa da repulsão infinita nas vizinhanças de $r=0$, a autofunção $\psi(r)$ deve ser modificada de modo a anular-se no interior do caroço repulsivo.

15.8 - Modelo de Camadas e Números Mágicos.

Deseja-se discutir aqui um método apropriado que permita compreender o comportamento de núcleos que contêm qualquer número de nucleons. Assim como átomos complexos, deve-se recorrer a métodos de aproximação para se estudar núcleos complexos.

O método da partícula independente de Hartree-Fock, utilizado com sucesso em átomos complexos, é também uma estratégia produtiva para núcleos complexos, ressaltando-se obviamente as diferenças entre os dois sistemas. Particularmente, constata-se que a força nuclear seja dominada por interações não-centrais entre pares de nucleons. Entretanto, pode-se pensar num modelo de potencial central no qual um nucleon independente seja submetido a uma força média gerada por todas as outras partículas nucleares.

O princípio de exclusão de Pauli, juntamente com a teoria do campo central, tem sido invocado para construir o modelo de camadas em sistemas atômicos. O mesmo processo também tem sido adotado com sucesso em sistemas nucleares.

O modelo de camada para núcleos já tem sido mencionado na seção 15.3. Observou-se que os números mágicos referem-se a quantidades limiares de prótons e neutrons em núcleos estáveis.

A Fig. 15.17 mostra um gráfico da distribuição de população de alguns núcleos estáveis em função do número de prótons e neutrons, no qual é colocado em evidência a sequência de números mágicos.

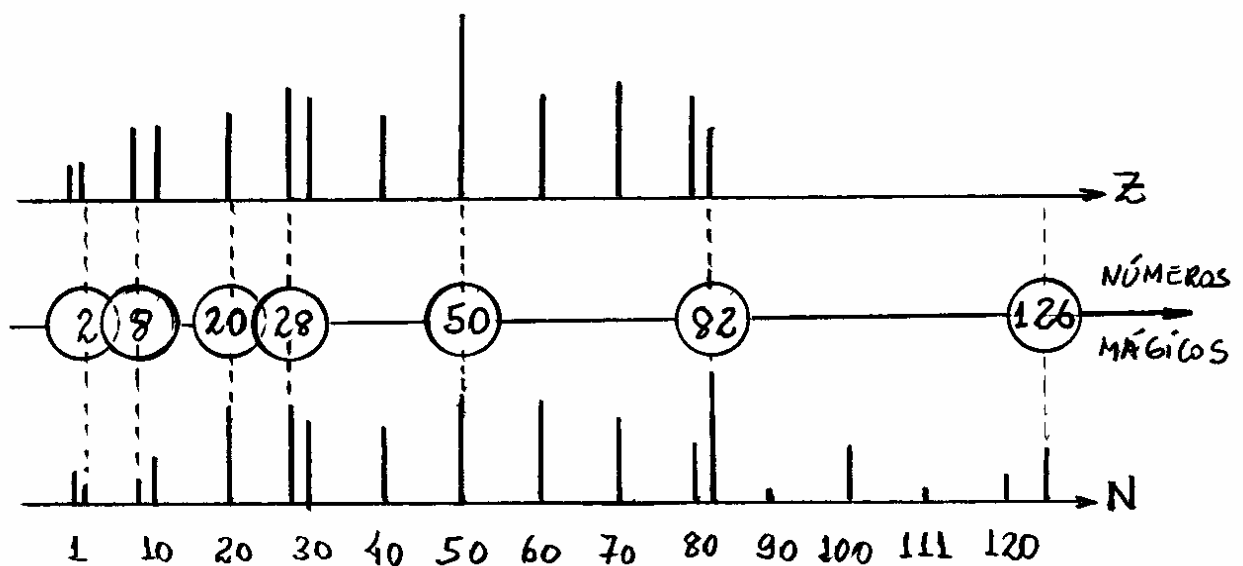
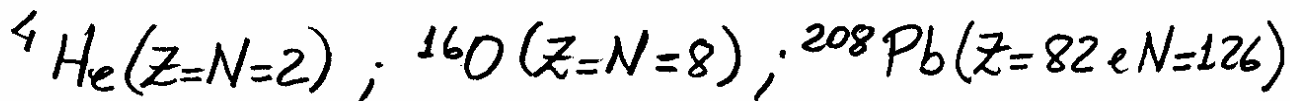


Fig. 15.17. Distribuição de população de núcleos estáveis em função do número de prótons e neutrons.

A Figura mostra um grande acúmulo de núcleos para $Z=20$ (Cálcio), $Z=50$ (Estanho), $N=20$ e $N=82$. Nota-se que o núcleo ^{40}Ca é duplamente mágico com $Z=N=20$.

Outros núcleos duplamente mágicos com estabilidade usual, são:



A Fig. 15.18 mostra o comportamento da energia de separação de nêutrons em função do número de nêutrons para alguns isóbaros conhecidos.

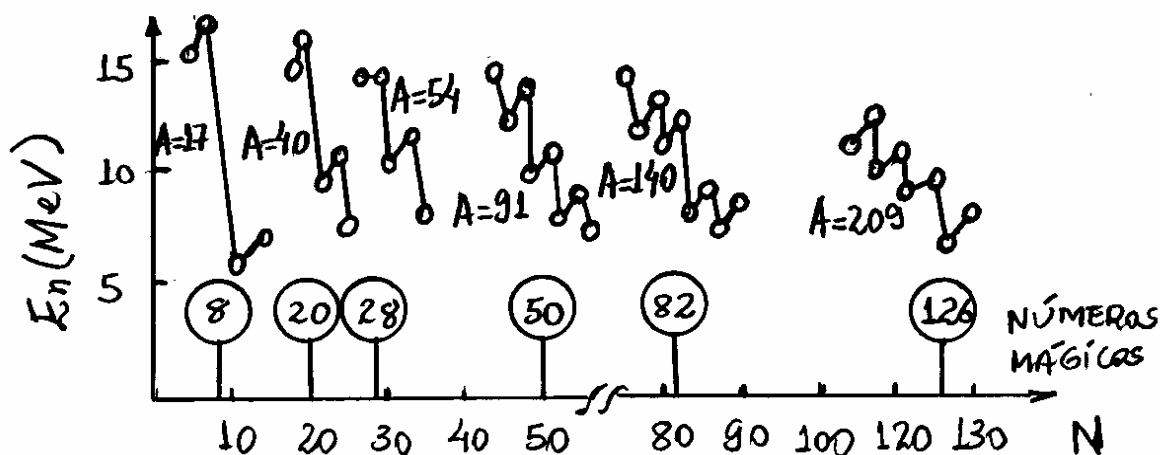


Fig. 15.18 - Energia de separação entre nêutrons em função do número de nêutrons para alguns isóbaros conhecidos.

Quando se observa a energia de separação entre núcleons, nas vizinhanças dos números mágicos, entra-se evidências do modelo de camadas para núcleos. O comportamento observado na Fig. 15.18 para núcleos, é análogo ao que ocorre com a energia de ionização de sistemas atômicos discutido no Capítulo 10.

Na Figura observa-se claramente quedas abruptas de E_n para determinadas variações de números de nêutrons N , indicando a presença de camadas fechadas no interior do núcleo. Um comportamento similar é obtido para a energia de separação entre prótons.

Para construir o modelo de camada em sistemas nucleares, assume-se uma energia potencial central $V_c(r)$ para cada nucleon tal que seja possível aplicar as propriedades de quantização do momento angular aos estados de cada partícula. Este procedimento permite nivelar os estados em termos de números quânticos (n, l, m_l, m_s) relativos a uma única partícula, tal que a autofunção para um nucleon num estado estacionário possa assumir a seguinte forma:

$$\Psi_{nlm_l m_s} = R_{nl}(r) Y_{lm_l}(\theta, \varphi) (\uparrow \text{ ou } \downarrow) \quad (15.60)$$

A função radial $R_{nl}(r)$ e, conseqüentemente, o autovalor de energia E_{nl} , depende da escolha do potencial $V_c(r)$.

Na eq. (10.13) do capítulo 10, concluiu-se que a forma apropriada para a equação diferencial radial, é

$$\frac{d^2}{dr^2} (rR_{nl}) + \frac{2M}{\hbar^2} [E_{nl} - V_{el}(r)] (rR_{nl}) = 0 \quad (15.61)$$

onde

$$V_{el}(r) = V_c(r) + \frac{\hbar^2}{2Mr^2} l(l+1) \quad (15.62)$$

O modelo requer então a escolha de uma função $V_c(r)$ para descrever o campo central. O modelo simplista do poco de potencial quadrado mostrado na Fig. 15.13 seria, a princípio, uma boa proposta para $V_c(r)$. Entretanto, é possível obter os níveis de energia E_{nl} , mais precisamente, utilizando-se pocos de potenciais suavizados mais realísticos.

A Fig. 15.19 mostra os níveis de energia E_{nl} e degenerescências no modelo de camadas para os casos de potencial central $V_c(r)$, assumindo a forma simplista de um poco de potencial quadrado e uma forma de poco de potencial suavizado.

Obviamente esses resultados devem variar com a escolha do número de massa A .

As degenerescências existem em todos os níveis, exatamente como no caso atômico, por causa da independência da energia com os números quânticos m_l e m_s .

Dessa forma, cada valor de energia E_{nl} corresponde a

$$2(2l+1)$$

estados degenerados, ou orbitais, que podem ser ocupados por nucleons.

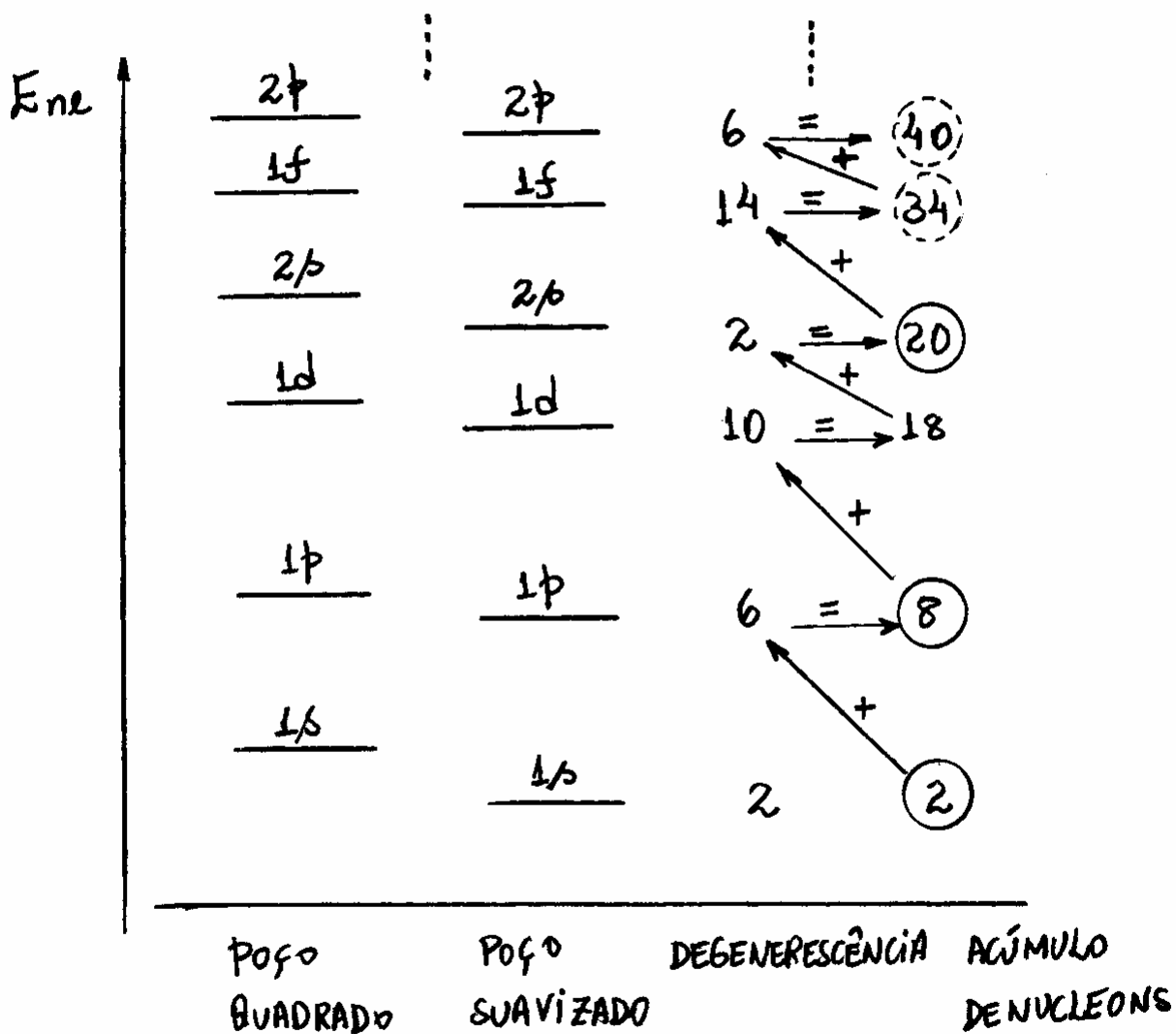


Fig. 15.19 - Níveis de energia e degenerescências para um poço de potencial quadrado e um poço de potencial suavizado.

Na verdade, a descrição acima para os níveis de energia no modelo de nucleons independentes, aplica-se corretamente somente no caso de nêutrons. No caso de prótons deve-se adicionar efeitos de repulsão Coulombiana entre essas partículas.

Esse aspecto adicional deve elevar a energia potencial e introduzir uma barreira repulsiva para o próton. O resultado deve gerar uma configuração de energias qualitativamente similar àquela mostrada na Fig. 15.19, exceto por uma elevação geral em todas as níveis de energia.

O acúmulo de nucleons nas subcamadas ne resulta nos números mágicos associados aos intervalos expressivos de energia. Somente os três primeiros números mágicos previstos, envolvidos na Fig. 15.19 por círculos contínuos, concordam com números mágicos conhecidos. Isso se deve a não inclusão de efeitos similares a interação spin-órbita observados em átomos.

Sabe-se que o acoplamento spin-órbita em átomos causa um desdobramento dos níveis de energia E_{nl} para todos os estados orbitais $l \neq 0$ da partícula independente.

O desdobramento ocorre por causa da presença de diferentes contribuições de energia para dois diferentes valores do número quântico j do momento angular total ($j = l \pm 1/2$ para $l \neq 0$).

Por causa do intenso potencial de curto alcance e do sinal negativo atribuído aos núcleons, pode-se admitir que no caso nuclear o desdobramento spin-órbita seja mais intenso e invertido em relação ao caso atômico, como sugere a Fig. 15.20.

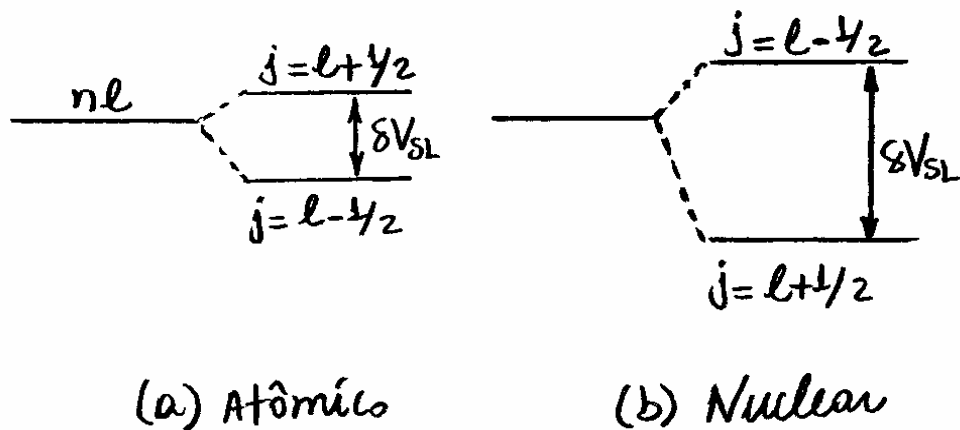


Fig. 15.20. Desdobramento do nível de energia E_{nl} devido ao acoplamento spin-órbita, (a) para átomos e, (b) para núcleos.

A ideia de um intenso e invertido desdobramento spin-órbita para as transições nucleares, foi introduzida em 1949 por M. Goeppert-Mayer e J.H.D. Jensen, e foi uma das mais importantes contribuições para a compreensão da estrutura nuclear.

A Fig. 15.21 mostra como o desdobramento spin-órbita influencia os níveis de energia. Éne de nucleons independentes no modelo de camadas.

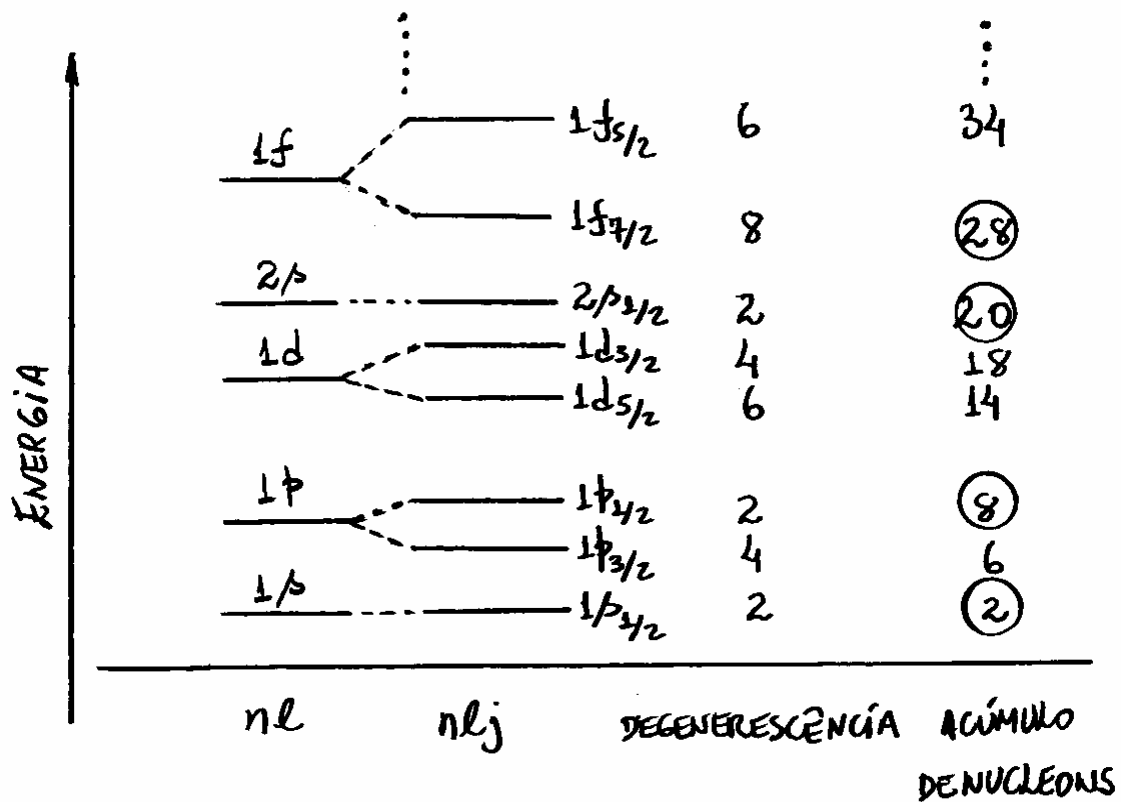


Fig. 15.21 - Níveis de energia nuclear incluindo interação spin-órbita.

Pode-se notar que agora o número de nucleons acumulados reproduz com sucesso os números mágicos conhecidos. É importante ressaltar que ambos, magnitude intensa e desdobramento invertido, atribuídos a interação spin-órbita, garantem a ordenação correta dos números mágicos.

A representação dos estados de nucleons independentes em termos dos números quânticos $(nljm_j)$, permite identificar o momento angular total \vec{J} de um nucleon formalizado, por

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S} \quad (15.63)$$

Como o núcleo é formado por A nucleons, o momento angular de spin nuclear \vec{I} pode ser escrito em termos da eq. (15.63), como

$$\vec{I} = \sum_{k=1}^A \vec{J}_k = \sum_{k=1}^A (\vec{L}_k + \vec{S}_k) \quad (15.64)$$

Deve-se notar que os momentos angulares orbital e spin, são adicionadas de acordo com o esquema de acoplamento-jj. O acoplamento-jj deve ser usado sempre que a interação spin-órbita é dominante, como é o caso em questão.

A interação spin-órbita desdobra cada nível de energia E_{nl} , com $l \neq 0$, em pares de níveis de energia E_{nlj} . Cada nível de energia com números quânticos (nlj) , define uma subcamada nuclear de $2j+1$ estados degenerados, correspondentes aos vários valores de m_j associados a cada valor de j , que podem ser ocupados por nucleons.

Pelas mesmas razões do caso atômico, discutido no capítulo 10, os núcleos tem paridade par para qualquer subcamada totalmente ocupada. Conseqüentemente, o spin nuclear e a paridade do estado fundamental são determinados somente pela dinâmica dos nucleons da última subcamada incompleta do núcleo.

Na subcamada incompleta, dois prótons ou dois nêutrons, com valores opostos de m_j , tem grande probabilidade de estarem próximos, pois ambos definem uma mesma densidade de probabilidade espacial. Assim, além de ocorrer um cancelamento do momento angular, como no caso dos caroços atômicos,

$$L_{\text{caroço}} = \sum_{\text{caroço}} L_i = 0 \quad \text{e} \quad S_{\text{caroço}} = \sum_{\text{caroço}} S_i = 0$$

tais partículas emparelhadas ficam submetidas a uma intensa força nuclear.

Como $l=0$ e $J=L+S=0$, de acordo com a representação dada em (15.41), as partículas emparelhadas na subcamada incompleta, tem contribuições para o estado nuclear e paridade, dados por

$$i^p = 0^+ \quad (15.65)$$

Como filam submetidas a internas forças nucleares, tais partículas são difficilmente removidas do estado fundamental, tal que, somente o último próton, ou nêutron, ou ambos, desemparelhados, podem ser efetivamente excitados.

Para o caso em que o número de massa A é ímpar, somente um próton, ou um nêutron, da subcamada incompleta, controla a dinâmica nuclear. Nesse caso, a eq. (15.64) fica reduzida ao momento angular total de uma dessas partículas, isto é

$$\vec{I} = \vec{J}_p \quad \text{ou} \quad \vec{I} = \vec{J}_n \quad (15.66)$$

com paridade e quantização de spin nuclear, dados respectivamente, por

$$(-1)^{l_p}; i=j_p \quad \text{e} \quad (-1)^{l_n}; i=j_n \quad (15.67)$$

O momento de dipolo magnético $\vec{\mu}$ do núcleo, também pode ser calculado a partir do nucleon desemparelhado. Ambas as parcelas, orbital $\vec{\mu}_l$ e spin $\vec{\mu}_s$, contribuem para o momento magnético total $\vec{\mu}$ se o nucleon é um próton, enquanto que, somente a parcela de spin $\vec{\mu}_s$ é importante se o nucleon é um nêutron.

A fórmula geral do momento de dipolo magnético nuclear para número de massa A ímpar, pode ser encontrada de forma equivalente ao caso do átomo monoelétrônico descrito no capítulo 9. Nos cálculos deve-se trocar o magnéton de Bohr μ_B pelo magnéton nuclear μ_N e adotar valores explícitos de fatores- g orbital g_L e spin g_S para o nucleon, tal que

$$\begin{aligned}
 & g_L = 1 \quad \text{e} \quad g_S = g_p \quad \text{para o próton} \\
 & g_L = 0 \quad \text{e} \quad g_S = g_n \quad \text{para o nêutron}
 \end{aligned}
 \tag{15.68}$$

Para o caso de um nuclideo com número ímpar de prótons e um número ímpar de nêutrons, tem-se um próton e um nêutron desemparelhados. Nesse caso, a eq. (15.64) fica reduzida a uma soma de dois momentos angulares:

$$\vec{I} = \vec{J}_p + \vec{J}_n
 \tag{15.69}$$

Esse problema de acoplamento de momentos angulares segue a mesma regra de quantização disjutida na secão 10.7 do capítulo 10. Como na eq. (10.49), a quantização do spin nuclear, i

$$i = |j_p - j_n|, |j_p - j_n| + 1, \dots, j_p + j_n - 1, j_p + j_n
 \tag{15.70}$$

Para esses casos, a paridade será calculada, por

$$p = \text{ sinal de } (-1)^{l_p} (-1)^{l_n} \quad (15.71)$$

O momento de dipolo magnético total $\vec{\mu}$ para o caso de um próton e um nêutron desemparelhados, deve obviamente, incluir contribuições de ambas as partículas.

A Tab. 15.1 mostra as subcamadas ocupadas por prótons e nêutrons desemparelhados, em ordem crescente de energia, de acordo com vários resultados empíricos observados com diversos núcleos de número ímpar de prótons ou nêutrons.

Inclue-se na tabela a ocupação máxima m_j de cada subcamada, bem como, o acúmulo total de nucleons. Os números mágicos estão envolvidos por círculos contínuos como antes.

O modelo de camadas pode ser testado utilizando-se alguns núcleos ${}^A_Z X_N$, facilmente encontrados na natureza. Por exemplo, as duas espécies ${}^{46}\text{P}$ e ${}^{40}\text{Ca}$ tem acúmulos de nucleons coincidentes com números mágicos possuindo, portanto, subcamadas totalmente preenchidas para prótons e nêutrons.

Para esses casos, a paridade será calculada, por

$$p = \text{ sinal de } (-1)^{l_p} (-1)^{l_n} \quad (15.71)$$

O momento de dipolo magnético total $\vec{\mu}$ para o caso de um próton e um nêutron desemparelhados, deve obviamente, incluir contribuições de ambas as partículas.

A Tab. 15.1 mostra as subcamadas ocupadas por prótons e nêutrons desemparelhados, em ordem crescente de energia, de acordo com vários resultados empíricos observados com diversos núcleos de número ímpar de prótons ou nêutrons.

Inclue-se na tabela a ocupação máxima m_j de cada subcamada, bem como, o acúmulo total de nucleons. Os números mágicos estão envolvidos por círculos contínuos como antes.

O modelo de camadas pode ser testado utilizando-se alguns núcleos ${}^A_Z X_N$, facilmente encontrados na natureza. Por exemplo, as duas espécies ${}^{16}_8\text{O}$ e ${}^{40}_{20}\text{Ca}$ tem acúmulos de nucleons coincidentes com números mágicos possuindo, portanto, subcamadas totalmente preenchidas para prótons e nêutrons.

Para estes casos, o modelo de camadas prevê que $i=j=0$ e $l=0$ e, conseqüentemente, os nucleons devem ocupar estados $i^{\pi}=0^{+}$.

Z IMPAR			N IMPAR		
$n l j$	OCUPAÇÃO MÁXIMA (m_j)	ACÚMULO DE NUCLEONS (A)	$n l j$	OCUPAÇÃO MÁXIMA (m_j)	ACÚMULO DE NUCLEONS (A)
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$1 g_{7/2}$	8	58	$2 d_{5/2}$	6	56
$1 g_{9/2}$	10	(50)	$1 g_{9/2}$	10	(50)
$2 p_{1/2}$	2	40	$2 p_{3/2}$	2	40
$1 f_{5/2}$	6	38	$1 f_{5/2}$	6	38
$2 p_{3/2}$	4	32	$2 p_{3/2}$	4	32
$1 f_{7/2}$	8	(28)	$1 f_{7/2}$	8	(28)
$1 d_{3/2}$	4	(20)	$1 d_{3/2}$	4	(20)
$2 p_{1/2}$	2	16	$2 p_{1/2}$	2	16
$1 d_{5/2}$	6	14	$1 d_{5/2}$	6	14
$1 p_{3/2}$	2	(8)	$1 p_{3/2}$	2	(8)
$1 p_{3/2}$	4	6	$1 p_{3/2}$	4	6
$1 p_{1/2}$	2	(2)	$1 p_{1/2}$	2	(2)

Tab. 15.1 - Sequência de subcamadas nucleares em ordem crescente de energia.

Os núclídeos $^{17}_8\text{O}_9$ e $^{39}_{19}\text{K}_{20}$ possuem números ímpares de nêutrons e prótons, respectivamente, contendo, portanto, um nucleon desemparelhado.

A Tab. 15.1 mostra que o nêutron desemparelhado no $^{17}_8\text{O}_9$ deve ocupar uma subcamada $1d_{5/2}$, pois como $N=9$, os 8 primeiros nêutrons devem preencher as subcamadas $1s_{1/2}$, $1p_{3/2}$, $1p_{1/2}$ e o último a subcamada $1d_{5/2}$. Assim, espera-se para $^{17}_8\text{O}_9$ um estado nuclear $i^P = 5/2^+$, pois $j=5/2$ e $l=2$.

Por outro lado, a Tab. 15.1 mostra que o próton desemparelhado no $^{39}_{19}\text{K}_{20}$ deve ocupar uma subcamada $1d_{3/2}$, pois como $Z=19$, os 16 primeiros prótons devem preencher as subcamadas $1s_{1/2}$, $1p_{3/2}$, $1p_{1/2}$, $1d_{5/2}$, $2s_{1/2}$ e os três últimos devem ocupar a subcamada $1d_{3/2}$. Assim, espera-se para $^{39}_{19}\text{K}_{20}$ um estado nuclear $i^P = 3/2^+$, pois $j=3/2$ e $l=2$.

O último núclídeo $^{14}_7\text{N}_7$ possui números ímpares de nêutrons e prótons, contendo, portanto, um próton e um nêutron desemparelhados. A Tab. 15.1 mostra que ambos os nucleons devem ocupar subcamadas $1p_{1/2}$. Como $l_p = l_n = 1$, espera-se que a paridade seja par, pois $p = \text{ sinal de } (-1)^{l_p}(-1)^{l_n} = +$. Como $j_p = j_n = 1/2$, espera-se que o spin nuclear deva ser $i=0$ ou $i=1$. Resultados experimentais mostram que $^{14}_7\text{N}_7$ possui um estado nuclear $i^P = 1^+$.

Praticamente todos os resultados previstos com o modelo de camadas relacionados a nucleons emparelhados e desemparelhados, são confirmados por diversas evidências experimentais.

15.9 - Isospin.

Resultados experimentais mostram que as interações entre nucleons pp , pn e nn são praticamente idênticas. Essa propriedade de independência de cargas elétricas para forças nucleares, introduz um novo princípio de simetria ou lei de conservação que se aplica a física nuclear. Embora prótons e nêutrons seja partículas distinguíveis, pode-se assumir que efeitos eletromagnéticos intrínsecos a essas partículas, sejam desprezados relativamente a força nuclear. Tal simetria pode ser desfeita, entretanto, na presença de campos eletromagnéticos externos. É razoável admitir também que a diferença pequena entre as massas de prótons e nêutrons, resulta num pequeno desvio da forma exata dessa simetria. De acordo com essa hipótese, a pequena diferença entre as massas de prótons e nêutrons, deve-se somente a efeitos eletromagnéticos intrínsecos a essas partículas.

O princípio de simetria de cargas para nucleons, permite representar prótons e nêutrons como estados de cargas duplamente degenerados. Esses estados podem ser desdobrados por interações eletromagnéticas, de forma análoga ao desdobramento dos estados atômicos produzidos pela interação spin-órbita.

Por causa da analogia com os isótopos (átomos de mesmo número atômico Z e número de massa $A = N + Z$ ligeiramente diferentes), e com o desdobramento spin-órbita, associado aos dois estados de spin ($j = l \pm 1/2$), o termo isospin é utilizado para especificar a multiplicidade de estados das cargas nucleônicas.

O vetor isospin \vec{T} é tratado como um vetor num espaço de cargas tridimensional, analogamente ao vetor spin \vec{S} no espaço real.

A propriedade de independência de carga com a força nuclear, deve-se a uma operação de simetria rotacional de isospin no espaço de cargas. Tal operação de simetria é uma manifestação de uma nova lei de conservação para isospin \vec{T} , exatamente como ocorre com a lei de conservação do momento angular no espaço real.

O próton e o nêutron formam um multipletto degenerado de isospin, denominado de dublete de nucleons, com diferentes propriedades eletromagnéticas para "isospin up" (próton) e "isospin down" (nêutron).

As propriedades do vetor isospin \vec{T} são preservadas impondo-se regras de quantização

idênticas as utilizadas para vetores momentos angulares \vec{L} , \vec{S} e \vec{J} , isto é

$$T^2 = t(t+1) \quad \text{com } t = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$$

e

$$T_z = -t, -t+1, \dots, t-1, t \quad \text{para um dado } t \quad (15.72)$$

O valor de t pode ser inteiro ou semi-inteiro, dependendo do número total de prótons e nêutrons no núcleo. Nota-se que o fator t não aparece nas eqs. (15.72), pois \vec{T} é uma quantidade abstrata adimensional, que não tem nada haver com o momento angular clássico.

Cada valor de número quântico de isospin t define um multiplete de isospin consistindo de $2t+1$ componentes.

O dubleto de nucleons tem dois estados de isospin "up" e "down", tal que o número quântico de isospin relevante é $t = \frac{1}{2}$, tal que

$T_z = -\frac{1}{2}$ e $+\frac{1}{2}$ para nêutron e próton, respectivamente.

O autovalor T_z para um estado particular de um núclideo genérico ${}^A_Z X_N$, é

$$T_z = \frac{1}{2}(Z - N) \quad (15.73)$$

Como os $2t+1$ estados de isospin para um determinado valor de T_z , ou t , estão associados a um mesmo número de massa A , eles são também conhecidos como estados isobáricos.

Se um estado nuclear é caracterizado por um número quântico de isospin t , então o multipletto de isospin tem $2t+1$ estados isobáricos análogos, correspondentes a $2t+1$ orientações de um vetor \vec{T} de módulo $\sqrt{t(t+1)}$ no espaço abstrato de cargas. A simetria de isospin permite rotacionar o vetor \vec{T} e, desse modo, passar de um estado isobárico para outro sem afetar os níveis de energia.

A eq. (15.73) mostra que a troca mútua entre Z e N está associada a uma troca de sinal de T_z . Núclídeos que apresentam essa operação de simetria de carga são denominados de núclídeos espelhas.

A Fig. 15.22 mostra um conjunto de múltiplos $t=1$, ou trípletos de isospin, no qual os autovalores T_z , são

$$T_z = \begin{cases} -1 & \text{para } {}^{18}_{8}\text{O}_{10} \\ 0 & \text{para } {}^{18}_{9}\text{O}_9 \\ +1 & \text{para } {}^{18}_{10}\text{Ne}_8 \end{cases}$$

No esquema é mostrado os níveis de energia e estados i^{π} para isóbaros com $A=18$.

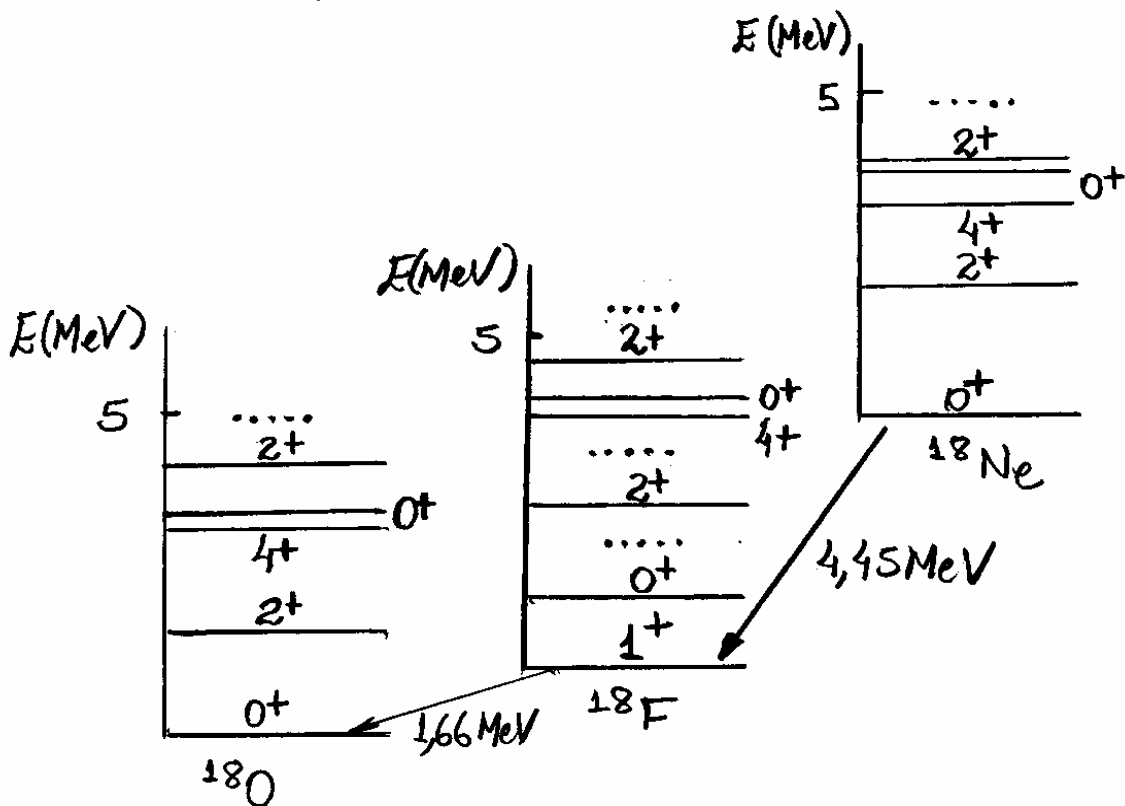


Fig. 15.22 - Níveis de energia e estados i^{π} para isóbaros com $A=18$.

O estado fundamental $i^{\pi}=1^+$, presente no isóbaro ^{18}F , ocorre somente $T_z=0$, o qual corresponde a um estado singlete de isospin, com número quântico de isospin $t=0$.

Deve-se notar que $^{18}_8\text{O}_{10}$ e $^{18}_{10}\text{Ne}_8$ são núcleos espelhos por apresentarem uma troca de sinal no valor de T_z .

Tomando-se novamente o exemplo do deuteron, formado por apenas dois nucleons, pode-se chegar a resultados mais detalhados sobre o isospin.

O deuteron ${}^2\text{H}$ é formado por um próton e um nêutron. Como a força nuclear é independente das cargas dos nucleons, configurações nucleônicas pp , pn e nn são permitidas para a representação do isospin no espaço de cargas. Da eq. (15.73), obtêm-se as seguintes possibilidades para o valor de T_z :

$$T_z = \begin{cases} +1 & \text{para } pp \\ 0 & \text{para } pn \\ -1 & \text{para } nn \end{cases}$$

pois; $pp \rightarrow Z=2$ e $N=0$; $pn \rightarrow Z=1$ e $N=1$;
 $nn \rightarrow Z=0$ e $N=2$.

O vetor isospin total \vec{T} para qualquer dupla de nucleons, é

$$\vec{T} = \vec{T}_1 + \vec{T}_2 = 0 \text{ ou } 1$$

pois \vec{T}_1 e \vec{T}_2 são vetores isospin tais que, $T_1 = T_2 = 1/2$. Conclui-se que todos os estados de um sistema de dois nucleons podem ser identificados por números

quânticos de isospin t , dados por

$$t=0 \text{ ou } t=1$$

Obviamente as configurações pp e nn pertencem aos estados de triplete $t=1$. A configuração pn aparece em dois diferentes estados de isospin associados a troca ($p \leftrightarrow n$) simétrica e anti-simétrica de partículas indistinguíveis. O estado singlete $t=0$ é anti-simétrico e, dado por

$$\xi^A = \frac{1}{\sqrt{2}} (pn - np) \quad (15.74)$$

Os três estados triplete $t=1$ são simétricos e, dados por

$$\xi_1^S = pp \quad ; \quad \xi_0^S = \frac{1}{\sqrt{2}} (pn + np) \quad ; \quad \xi_{-1}^S = nn \quad (15.75)$$

Pode-se reconhecer essas quatro expressões como análogas aos estados de spin total $s=0$ e $s=1$, obtidas para duas partículas indistinguíveis de spin $1/2$ no átomo de Hélio, onde as auto-funções anti-simétrica e simétrica são simbolizadas por χ^A e $\chi_{m/s}^S$, respectivamente. Nesse exemplo atômico, as auto-funções completas para os dois férmions idênticos podem ser escritas, como

$$\psi^S \chi^A \quad \text{ou} \quad \psi^A \chi^S$$

para satisfazer a condição de anti-simetria imposta pelo princípio de Pauli.

Pode-se considerar os dois nucleons do deuteron como partículas idênticas do ponto de vista de forças nucleares, formando um duplo estado de spin $S_z = \pm \frac{1}{2} \hbar$ e um duplo estado de isospin $T_z = \pm \frac{1}{2}$. Nesse contexto, as autofunções devem ser construídas por uma combinação de um fator espacial (ψ^S ou ψ^A), com um fator de orientação de spin (\uparrow ou \downarrow) e com uma designação de isospin (p ou n), tal que satisfaçam ao Princípio de Pauli, isto é

$$\psi^S \chi^S \xi^A \quad \text{ou} \quad \psi^S \chi^A \xi^S \quad \text{ou} \quad \psi^A \chi^S \xi^S \quad \text{ou} \quad \psi^A \chi^A \xi^A$$

Na seção 15.6, concluiu-se que o deuteron tem uma combinação de estados nucleares 3S_1 e 3D_1 . Como a paridade da componente espacial da função de onda é controlada por $(-1)^l$, então os números quânticos $l=0$ e $l=2$ geram autofunções espaciais simétricas com respeito as trocas de variáveis espaciais associados ao próton e ao nêutron.

Os estados tripleto de spin ($2s+1=3$) são igualmente simétricos. Assim, as componentes espacial e spin da função de onda dos nucleons no deuteron são autofunções do tipo

$$\psi^s \text{ e } \chi^s$$

Deve-se escolher, portanto, o singleto ξ^A para a descrição do isospin e garantir a necessidade de anti-simetria generalizada. Conclui-se disso que o deuteron tem número quântico de isospin $t=0$ e autofunção

$$\psi = \psi^s \chi^s \xi^A$$

Lista de Exercícios

1- Calcule o comprimento de onda de de Broglie para um elétron com energia cinética de 183MeV . Qual a energia de um feixe eletrônico corresponde a 1fm de comprimento de onda de de Broglie?

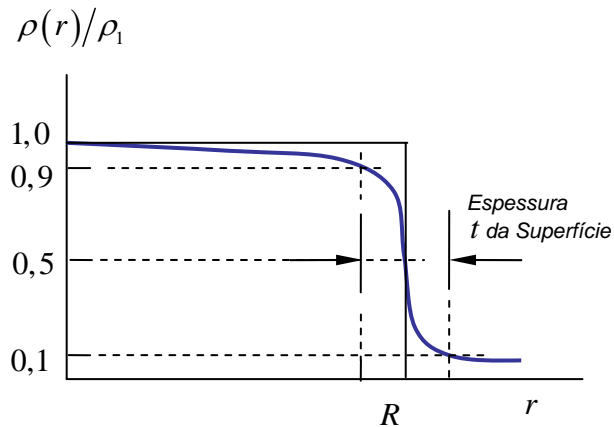
Resp.: $6,76\text{fm}$, 1240MeV .

2- Sabe-se que, para um modelo nuclear esférico, a análise de espalhamentos de elétrons por núcleos mostra que a densidade de carga nuclear pode ser descrita por uma distribuição de Fermi:

$$\rho(r) = \frac{\rho_1}{1 + e^{(r-R)/z_1}}$$

onde, os parâmetros R e z_1 controlam a dependência com a distância radial r . A Figura ao lado mostra a curva característica desta função. Mostre que a espessura da superfície nuclear t satisfaz relação:

$$\frac{t}{z_1} = 4 \ln 3$$



a

3- O nuclídeo espelho ${}^{15}_7\text{N}_8$ e ${}^{15}_8\text{O}_7$ tem massas atômicas $15,000109$ e $15,003065\text{u.m.a}$, respectivamente. (a) Sabendo-se que $M({}^1\text{H}) = 1,007825\text{u.m.a}$ e $M_n = 1,008665\text{u.m.a}$, calcule a diferença de energia de ligação $\Delta = E_b({}^{15}\text{N}) - E_b({}^{15}\text{O})$ obtida da equação $E_b({}^A\text{X}) = [ZM({}^1\text{H}) + NM_n - M({}^A\text{X})]c^2$, em unidades de MeV .

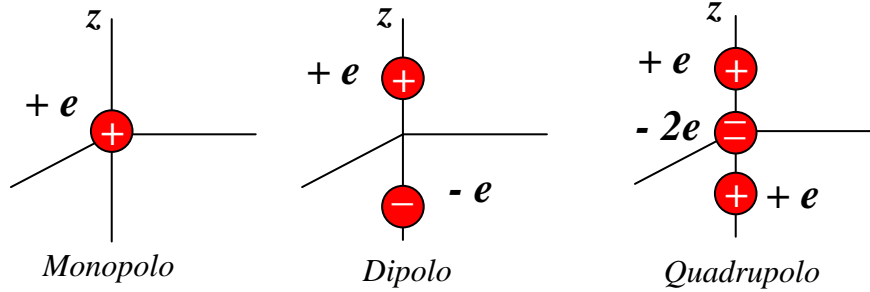
(b) A diferença de energia de ligação $\Delta = E_b({}^{15}\text{N}) - E_b({}^{15}\text{O})$ é identificada com a diferença de energia Coulombiana $V = \frac{3(Ze)^2}{54\pi\epsilon_0 R}$, tal que, tomando-se $Z = 7$ e $Z = 8$, tem-se

$$\Delta = V_8 - V_7 = \frac{3}{5}(64 - 49)\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R} = 9\frac{\alpha\hbar c}{R}$$

uma expressão alternativa para a quantidade Δ em função de uma quantidade R que é da ordem do raio nuclear. A partir dessa equação calcule o valor de R e o valor previsto do parâmetro radial R_0 presente na equação $R = R_0 A^{1/3}$.

Resp.: (b) $R = 3,666\text{fm}$ e $R_0 = 1,487\text{fm}$.

4- A figura abaixo mostra três distribuições elementares de cargas identificadas como configurações monopolo, dipolo e quadrupolo elétricos.



Para o monopolo elétrico, o potencial eletrostático a uma distância r , é $\phi_{mon}(r) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r}$.

(a) Para o dipolo elétrico consistindo de uma carga $+e$ em $(0,0,d/2)$ e uma carga $-e$ em $(0,0,-d/2)$, o potencial eletrostático, é

$$\phi_{dip}(r) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - d/2)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z + d/2)^2}} \right]$$

ou,

$$\begin{aligned} \phi_{dip}(r) &= \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{(r^2 - zd + d^2/4)^{1/2}} - \frac{1}{(r^2 + zd + d^2/4)^{1/2}} \right] \\ &= \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r} \left[\left(1 - \frac{zd}{r^2} + \frac{d^2}{4r^2}\right)^{-1/2} - \left(1 + \frac{zd}{r^2} + \frac{d^2}{4r^2}\right)^{-1/2} \right] \end{aligned}$$

pois, $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ e $(z \pm d/2)^2 = z^2 \pm zd + d^2/4$. Use expansões do tipo $(1 \pm \xi)^n = 1 \pm n\xi + \dots$ e o fato que $d \ll r$, para mostra que

$$\phi_{dip}(r) \approx \frac{ed}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{r^3} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{r^3}$$

onde a quantidade $p = ed$ denota o momento de dipolo elétrico.

(b) Para dois de tais dipolos com sinais opostos com $+p$ localizado em $(0,0,d/2)$ e $-p$ localizado em $(0,0,-d/2)$ formando um quadrupolo elétrico, o potencial eletrostático numa posição r , será

$$\phi_{qua}(r) = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{z - d/2}{[x^2 + y^2 + (z - d/2)^2]^{3/2}} - \frac{z + d/2}{[x^2 + y^2 + (z + d/2)^2]^{3/2}} \right]$$

ou, como no caso anterior

$$\phi_{qua}(r) = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left[\left(z - \frac{d}{2}\right) \left(1 - \frac{zd}{r^2} + \frac{d^2}{4r^2}\right)^{-3/2} - \left(z + \frac{d}{2}\right) \left(1 + \frac{zd}{r^2} + \frac{d^2}{4r^2}\right)^{-3/2} \right]$$

Use novamente as expansões do caso anterior e o fato que $d \ll r$, para mostra que

$$\phi_{qua}(r) \approx \frac{pd}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left(3\frac{z^2}{r^2} - 1 \right) \approx \frac{pd}{4\pi\epsilon_0} \frac{3z^2 - r^2}{r^5}$$

Esse resultado contém a característica polinomial de quadrupolos $(3z^2 - r^2)$, como usado na eq. (15.44) das notas de aula.

5- No modelo do potencial quadrado para a energia de ligação do dêuteron, a função radial $rR(r)$ satisfaz a equação diferencial radial similar aquela adotada para átomos monoelétrônicos:

$$\frac{d^2}{dr^2}(rR) - \frac{M}{\hbar^2} [V(r) + E_b](rR) = 0$$

onde M é a massa comum do próton e nêutron e E_b é a energia de ligação do sistema de partícula em qualquer estado ligante. Se a altura do poço de potencial é $V(r) = -V_0$ e a largura é $r = r_0$, tal equação torna-se

$$\frac{d^2}{dr^2}(rR) + \frac{M}{\hbar^2} [V_0 - E_b](rR) = 0 \quad \text{para } r < r_0$$

e

$$\frac{d^2}{dr^2}(rR) - \frac{M}{\hbar^2} E_b(rR) = 0 \quad \text{para } r > r_0$$

ou,

$$(rR)'' + K^2(rR) = 0 \quad \text{para } r < r_0$$

e

(01)

$$(rR)'' - k^2(rR) = 0 \quad \text{para } r > r_0$$

onde

$$k = \frac{\sqrt{ME_b}}{\hbar} \quad \text{e} \quad K = \frac{\sqrt{M(V_0 - E_b)}}{\hbar} \quad (02)$$

As soluções das eqs. (01), são

$$rR(r) = \begin{cases} asenKr & r < r_0 \\ be^{-kr} & r > r_0 \end{cases} \quad (03)$$

(a) Mostre que a condição de continuidade da função $rR(r)$ e de sua derivada no ponto $r = r_0$, resulta na condição:

$$K \operatorname{ctg}(Kr_0) = -k$$

(b) Da equação obtida no item (a), verifica-se que:

$$\operatorname{sen}^2 Kr_0 = \frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2 Kr_0} = \frac{K^2}{K^2 + k^2}$$

ou

$$\operatorname{sen} Kr_0 = \frac{K}{\sqrt{K^2 + k^2}}$$

A partir dessa equação e da condição de continuidade da função $rR(r)$, mostre que as constantes a e b , presentes nas soluções (03), relacionam-se por:

$$b = a \frac{K}{\sqrt{K^2 + k^2}} e^{kr_0}$$

6- O modelo do potencial quadrado para o dêuteron produz uma autofunção da forma

$$\psi(r) = \frac{a}{\sqrt{4\pi r}} \left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{sen} Kr & r < r_0 \\ \frac{K}{\sqrt{K^2 + k^2}} e^{-k(r-r_0)} & r > r_0 \end{array} \right\}$$

onde, os parâmetros r_0 , k e K são identificados no exercício anterior. Use a condição de normalização, $\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(\vec{r})|^2 d\tau = 4\pi \int_0^{+\infty} |\psi(r)|^2 r^2 dr = 1$, da função de onda $\psi(r)$ para obter a

constante $a = \sqrt{\frac{2k}{1 + kr_0}}$.

(a) Mostre que o valor esperado de r do dêuteron no modelo do potencial quadrado, discutido no exercício anterior, é $\langle r \rangle = \frac{(1 + kr_0)}{2k}$. (b) Sabendo-se que $E_b(^2H) = 2,225 \text{ MeV} = 3,56 \times 10^{-13} \text{ J}$ e $M = M_p = 1,673 \times 10^{-27} \text{ kg}$, calcule o valor de $\langle r \rangle$ para $r_0 = 1,6 \text{ fm}$.

Sugestão para item (a): No cálculo de $\langle r \rangle$:

$$\langle r \rangle = \int \psi^* r \psi dv = \int \psi^* r \psi r^2 d\Omega = \frac{a^2}{4\pi} \left[\int_0^{r_0} \frac{1}{r^2} r^3 \operatorname{sen}^2 Kr dr 4\pi + \frac{K^2}{K^2 + k^2} \int_{r_0}^{\infty} \frac{1}{r^2} r^3 e^{-2k(r-r_0)} dr \right]$$

ou

$$\langle r \rangle = a^2 \left[\int_0^{r_0} r \operatorname{sen}^2 Kr dr + \frac{K^2}{K^2 + k^2} \int_{r_0}^{\infty} r e^{-2k(r-r_0)} dr \right]$$

usando as integrais consultadas em tabelas:

$$\int x \operatorname{sen}^2 \alpha x = \frac{1}{8} (2x^2 - 2x \operatorname{sen} 2x - \cos 2x) \quad , \quad \int x e^{\alpha x} dx = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2} (\alpha x - 1)$$

a condição de continuidade das funções de onda $\psi(r)$ em $r = r_0$:

$$\frac{a}{\sqrt{4\pi r_0}} \operatorname{sen} Kr_0 = \frac{a}{\sqrt{4\pi r_0}} \frac{K}{\sqrt{K^2 + k^2}} \quad \text{ou} \quad \operatorname{sen} Kr_0 = \frac{K}{\sqrt{K^2 + k^2}}$$

e a condição de continuidade da derivada das funções de onda $\frac{d\psi}{dr}$ em $r = r_0$:

$$\frac{a}{\sqrt{4\pi}} \left(\frac{K \cos Kr}{r} - \frac{\operatorname{sen} Kr}{r^2} \right)_{r=r_0} \quad \text{ou} \quad \cos Kr_0 = -\frac{k}{\sqrt{K^2 + k^2}}$$

mostre primeiramente que:

$$\int_0^{r_0} r \operatorname{sen}^2 Kr dr = \frac{r_0^2 K^2 + r_0^2 k^2 + 2kr_0 + 1}{4(K^2 + k^2)} \quad \text{e} \quad \int_{r_0}^{\infty} r e^{-2k(r-r_0)} dr = \frac{1 + 2kr_0}{4k^2}$$

No final dos cálculos não se esqueça de adotar $a = \sqrt{\frac{2k}{1 + kr_0}}$.

Resp.: (b) $\langle r \rangle = 2,96 \text{ fm}$.

7- Deduza as previsões do modelo de camadas para os spins nucleares e paridades dos núclídeos de números de massa A ímpares ^{15}N , ^{23}Na , ^{27}Al e ^{95}Mo .

Resp.: $\frac{1^-}{2}$, $\frac{5^+}{2}$, $\frac{5^+}{2}$, $\frac{5^+}{2}$.