Medidas Físicas Indiretas

1 Objetivo

Aplicar os métodos e análise de dados à grandezas físicas que são medidas indiretamente, isto é, grandezas que dependem de outras grandezas, as quais podem ser medidas diretamente. Observar que as incertezas calculadas nas medidas diretas são propagadas para as medidas indiretas.

Para uma melhor compreensão dos resultados desta experiência, é importante que o estudante faça uma revisão dos métodos de medidas físicas indiretas, apresentados na seção 2.10 do texto **"*Análise de dados para Laboratório de Física*"**, disponível na página do Departamento de Física.

2 Introdução teórica

Na maioria dos experimentos, a medição de uma grandeza f de interesse é feita de maneira indireta, sendo esta grandeza obtida a partir de medidas de uma ou mais grandezas primárias. O cálculo de f é feito a partir de uma função conhecida das grandezas primárias. Estas grandezas são também denominadas grandezas de entrada, enquanto a grandeza f é denominada grandeza de saída. Um exemplo é o cálculo da densidade de um objeto, no qual se mede a massa e o volume do mesmo. A massa e volume são as grandezas de entrada enquanto a densidade é a grandeza de saída. A partir do conceito da incerteza δx de uma medida direta x, é possível estimar a incerteza combinada ou propagada δf para a grandeza indireta f. Como demonstrado no texto **"*Análise de dados para Laboratório de Física*"**, no caso em que a grandeza indireta f é função somente de uma grandeza direta x, isto é, $f = f(x)$, a incerteza δf em função da incerteza δx será dada, aproximadamente, por

$$\delta f \approx \frac{df(x)}{dx}\Big|_{x=\langle x\rangle} \delta x \tag{1}$$

Na Tab.1 são apresentadas as incertezas propagadas para algumas relações funcionais de acordo com a Eq.1. É importante enfatizar que esses resultados é somente uma boa estimativa para a propagação de incerteza desde que δx seja pequeno. O motivo disso é discutido no texto **"*Análise de dados para Laboratório de Física*"**.

Relação funcional	Valor médio	Incerteza propagada
$f(x) = ax$; a = constante	$\langle f\rangle = a\,\langle x\rangle$	$\delta f = a\delta x$
$f(x) = x^a$; a = constante	$\langle f\rangle = \langle x\rangle^a$	$\delta f = a\,\langle x\rangle^{a-1}\,\delta x$
$f(x) = e^x$	$\langle f\rangle = e^{\langle x\rangle}$	$\delta f = e^{\langle x\rangle}\delta x$
$f(x) = ln\ x$	$\langle f\rangle = ln\ \langle x\rangle$	$\delta f = \frac{1}{\langle x\rangle}\delta x$
$f(x) = sen\ x$	$\langle f\rangle = sen\,\langle x\rangle$	$\delta f = cos\,\langle x\rangle\,\delta x$

Tab. 1: Expressões para os cálculos dos valores médios e incertezas propagadas de algumas grandezas $f(x)$ que possuem somente uma variável.

A Eq.1 permite calcular a incerteza na medida da grandeza f quando esta é função somente de uma única variável x. Entretanto, é mais frequente o caso onde o resultado de uma experiência é dada em função de duas ou mais medidas independentes. Como demonstrado também no texto **"*Análise de dados para Laboratório de Física*"**, no caso de uma grandeza f obtida a partir das duas grandezas independentes x e y, isto é, $f = f(x, y)$, a incerteza δf em função da incerteza δx será dada por

$$\delta f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{x=\langle x\rangle}\delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{y=\langle y\rangle}\delta y\right)^2} \tag{2}$$

Nesta equação é necessário introduzir o conceito de "derivada parcial", escrevendo o símbolo ∂ no lugar de d, para ressaltar o fato que as derivadas da função $f(x, y)$, em relação a uma das variáveis, devem ser executadas assumindo constante a outra variável. Isso só é possível porque as grandezas x e y podem ser medidas independentemente uma da outra. Recorrendo-se a Eq.2, é possível verificar as incertezas propagadas para todas as funções de duas variáveis independentes mostradas na Tab.2.

Relação funcional	Valor médio	Incerteza propagada
$f(x,y) = ax \pm by$; $a, b =$ constante	$\langle f \rangle = a \langle x \rangle \pm b \langle y \rangle$	$\delta f = \sqrt{a^2 \delta x^2 + b^2 \delta y^2}$
$f(x,y) = xy$	$\langle f \rangle = \langle x \rangle \langle y \rangle$	$\delta f = \sqrt{\langle y \rangle^2 \delta x^2 + \langle x \rangle^2 \delta y^2}$
$f(x,y) = \dfrac{x}{y}$	$\langle f \rangle = \dfrac{\langle x \rangle}{\langle y \rangle}$	$\delta f = \dfrac{1}{\langle y \rangle^2} \sqrt{\langle y \rangle^2 \delta x^2 + \langle x \rangle^2 \delta y^2}$

Tab. 2: Expressões para os cálculos dos valores médios e incertezas propagadas de algumas grandezas $f(x,y)$ que possuem duas variáveis independentes.

Nesse momento, fica evidente o caso geral onde $f = f(x,y,z,...)$ é uma função de várias variáveis independentes. Nesse caso, a incerteza propagada pode ser calculada através de uma extensão óbvia da Eq.2 dada por

$$\delta f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_{x=\langle x \rangle} \delta x \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\bigg|_{y=\langle y \rangle} \delta y \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\bigg|_{z=\langle z \rangle} \delta z \right)^2 + ...} \tag{3}$$

3 Material Necessário

Papel cartão, régua milimetrada de 300 mm, balança tri-escala, trilho de ar, cronômetro digital de interface com disparador eletrônico, carrinho e sensores fotoelétricos.

4 Procedimento experimental

1. **Medida da densidade superficial ρ do papel cartão usando a régua milimetrada e uma balança tri-escala**.

   (a) Utilizando uma régua milimetrada, cada aluno do grupo deve medir e a notar na Tab.3, o comprimento a e a largura b do papel cartão. O número de medidas de a e b deverá ser, portanto, igual ao número de componentes do grupo. Em todas as anotações, deve-se levar em conta o número de algarismos significativos de cada medida.

   (b) Calcule e anote na Tab.3, a soma dos valores a_i, b_i, a soma dos valores a_i^2, b_i^2 e os valores médios $\langle a \rangle$, $\langle b \rangle$. Use esses valores para calcular e anotar na Tab.3, o desvio padrão da média σ_m das medidas de a e b. Calcule e anote na Tab.3, as incertezas combinadas δa, δb, incluindo a incerteza do aparelho σ_{ap} e a incerteza aleatória σ_m. Em todos os cálculos, deve-se levar em conta o número de algarismos significativos apropriados.

comprimento (mm)			largura (mm)		
a	a_i	a_i^2	b	b_i	b_i^2
a_1			b_1		
a_2			b_2		
a_3			b_3		
a_4			b_4		
a_5			b_5		
Totais	$\sum a_i =$	$\sum a_i^2 =$	Totais	$\sum b_i =$	$\sum b_i^2 =$
$\langle a \rangle =$		$\sigma_m =$	$\langle b \rangle =$		$\sigma_m =$
$\delta a = \sqrt{(\sigma_{ap})^2 + (\sigma_m)^2} =$			$\delta b = \sqrt{(\sigma_{ap})^2 + (\sigma_m)^2} =$		

Tab. 3: Tabela de dados e cálculos para o comprimento a e largura b do papel cartão.

   (c) Calcule o valor médio $\langle A \rangle$, a incerteza propagada δA e escreva a área A do papel cartão na forma da seguinte equação:

$$\langle A \rangle \pm \delta A = \langle a \rangle \langle b \rangle \pm \sqrt{\langle b \rangle^2 \delta a^2 + \langle a \rangle^2 \delta b^2}$$

   retirada da Tab.2.

(d) Cada aluno do grupo deve medir a massa m do papel cartão com a balança disponível na bancada e anotar todas as medidas na Tab.4, levando-se em conta o número de algarismos significativos das medidas.

(e) Calcule e anote na Tab.4, a soma dos valores m_i, a soma dos valores m_i^2 e o valor médio $\langle m \rangle$. Use esses valores para calcular e anotar na Tab.4, o desvio padrão da média σ_m das medidas de m. Calcule e anote na Tab.4, a incerteza combinada δm incluindo a incerteza do aparelho σ_{ap} e a incerteza aleatória σ_m. O número de algarismos significativos apropriados deve ser levado em conta em todos os cálculos.

massa (g)		
m_1		
m_2		
m_3		
m_4		
m_5		
Totais	$\sum m_i =$	$\sum m_i^2 =$
$\langle m \rangle =$		$\sigma_m =$
$\delta m = \sqrt{(\sigma_{ap})^2 + (\sigma_m)^2} =$		

Tab. 4: Tabela de dados e cálculos para a massa m do papel cartão.

(f) Calcule o valor médio $\langle \rho \rangle$, a incerteza propagada $\delta \rho$ e escreva a densidade superficial ρ do papel cartão na forma da seguinte equação:

$$\langle \rho \rangle \pm \delta \rho = \frac{\langle m \rangle}{\langle A \rangle} \pm \frac{1}{\langle A \rangle^2} \sqrt{\langle A \rangle^2 \, \delta m^2 + \langle m \rangle^2 \, \delta A^2}$$

retirada da Tab.2.

(g) Compare a densidade superficial do papel cartão, obtida na experiência, com o valor 200 g/m^2, anunciado pelo fabricante.

2. **Medida da velocidade média v_m do carrinho no trilho de ar**.

(a) A Fig.1 mostra a fotografia do trilho de ar e seus acessórios que novamente serão utilizados neste experimento. Coloque a intensidade do gerador de fluxo de ar numa posição entre 2 e 3 e ligue-o. ***Atenção! nunca mova o carrinho sobre o trilho de ar sem que o gerador de fluxo de ar esteja ligado. Isso pode riscar e danificar definitivamente a escala do trilho de ar***. O pequeno imã deverá ser mantido no carrinho para prendê-lo no início do trilho de ar e possibilitar o seu movimento assim que a bobina de retenção e disparo for acionada.

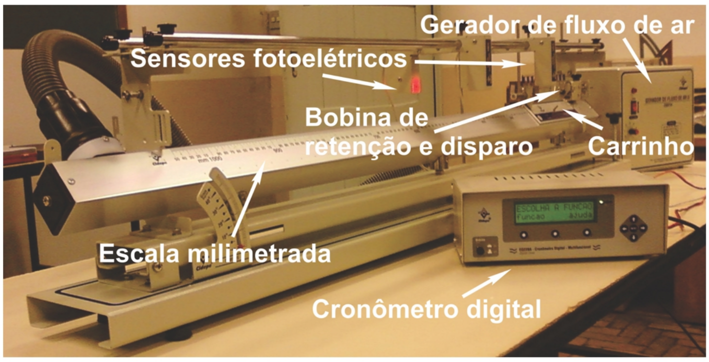

Fig. 1: Esquema do trilho de ar utilizado em nosso laboratório.

(b) Neste experimento, dois sensores S_0 e S_1 serão novamente mantidos, respectivamente, nas duas posições $x_0 = 0,2700\ m$ e $x = 0,9500\ m$ no trilho de ar, onde o sensor S_0 é conectado na entrada S_0 e o sensor S_1 é conectado na entrada S_1 do cronômetro digital de interface.

(c) Após ligar o cronômetro digital de interface, use as orientações apresentadas na prática "***medidas físicas e o trilho de ar***" para conferir os alinhamentos dos sensores S_0 e S_1. Calcule e anote na Tab.5, o valor do deslocamento $l = x - x_0$ em metros. Para fins de simplificação, neste experimento as incertezas dos aparelhos serão omitidas. Somente as incertezas aleatórias serão consideradas.

$l = x - x_0 =$		(m)
tempo (s)		
t	t_i	t_i^2
t_1		
t_2		
t_3		
t_4		
t_5		
t_6		
t_7		
t_8		
t_9		
t_{10}		
Totais	$\sum t_i =$	$\sum t_i^2 =$
$\langle t \rangle =$		$\delta t = \sigma_m =$

Tab. 5: Tabela de dados e cálculos para o tempo t de percurso do carrinho no trilho de ar.

(d) Siga os passos abaixo cuidadosamente e meça um intervalo de tempo de percurso do carrinho entre o sensor S_0 e o sensor S_1 no trilho de ar:

i. Ligar o cronômetro. Aparece na tela **Escolha a Função**.

ii. Escolha a opção **função**, clicando a tecla 1.

iii. Escolha a opção **OK**, clicando a tecla 2, para definir o número de sensores utilizados na experiência.

iv. Escolha a opção $N^o 2$, clicando a tecla 1, para definir o uso de 2 sensores.

v. Aparece na tela **Inserir Distância**. Note que no cronômetro digital a distância é simbolizada pela letra S. Escolha a opção **Não**, clicando a tecla 1. Nesse momento o cronômetro está preparado para o ***início da experiência***.

(e) Aperte o botão disparador da fonte da bobina de retenção e disparo para impulsionar o carrinho no trilho de ar e dar início ao experimento.

(f) Aparece na tela do cronômetro **Exp. Finalizado**. Escolha a opção **Ver**, clicando a tecla 1, para ver o resultado da medida. Aparece na tela do cronômetro **Resultados**. Escolha a opção **t**, clicando a tecla 1, para ver e anotar na Tab.5 o intervalo de tempo correspondente t_1 que o carrinho gasta para percorrer a distância entre os dois sensores. Escolha a opção **OK**, clicando a tecla 2 e, em seguida, a opção **Sair**, clicando a tecla 3, para retornar aos recursos anteriores.

(g) Escolha a opção **Repetir**, clicando a tecla 2 para novamente dar início a experiência. Repita a experiência mais nove vezes e anote os valores dos tempos correspondentes t_i na Tab.5. Em todas as anotações, deve-se levar em conta o número de algarismos significativos de cada medida.

(h) Calcule e anote na Tab.5, a soma dos valores t_i e a soma dos valores t_i^2. Calcule e anotar na Tab.5 o valor médio

$$\langle t \rangle = \sum_{i=1}^{n} \frac{t_i}{n}$$

e a incerteza aleatória δt correspondente, dada na forma do *desvio padrão da média*,

$$\delta t = \sigma_m = \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} t_i^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^{n} t_i \right)^2}$$

O número de algarismos significativos apropriados deve ser levado em conta em todos os cálculos. A formulação do conceito de *desvio padrão da média* é discutida em detalhes na seção 2.8 do texto "***Análise de dados para Laboratório de Física***".

(i) Calcule a velocidade média $\langle v \rangle$ do carrinho no trilho de ar, com a sua incerteza δv utilizando para isso, a seguinte equação, retirada da Tab.2:

$$\langle v \rangle \pm \delta v \approx \frac{l}{\langle t \rangle} \pm \frac{l \delta t}{\langle t \rangle^2}$$

Nesta equação a incerteza aleatória na medida da distância foi dispensada, isto é, $\delta l \approx 0$, pois durante todo o experimento, ficou mantido constante o valor da distância l percorrida pelo carrinho. Discuta o que foi observado e conclua os resultados.