

1.4 Observáveis

Analizamos resultados experimentais em termos de perguntas simples. Agora sintetizaremos uma quantidade observável a partir de perguntas simples. Começamos com uma noção preliminar de observável: um observável é uma coleção de perguntas simples $\{\hat{A}_1, \hat{A}_2, \hat{A}_3, \hat{A}_4, \hat{A}_5, \dots\}$ que cumpre as seguintes exigências:

- (A) As perguntas são mutuamente excludentes, isto é, para $k \neq l$, a propriedade \hat{A}_k implica na propriedade não \hat{A}_l .
- (B) A menor pergunta que é maior que qualquer \hat{A}_k é a pergunta trivial que é sempre verdadeira.

Na representação das perguntas \hat{A}_k por subespaços A_k de um espaço de Hilbert H estas exigências significam:

- (A) $k \neq l \Rightarrow A_k \subset A_l^\perp$
- (B) $\bigoplus_l A_l = H$

onde, neste caso, o símbolo “ \oplus ”, que antes usamos para o “ou quântico” significa a soma direta de subespaços. Alias, na representação de propriedades como subespaços num espaço de Hilbert o “ou quântico” corresponde exatamente à soma direta. A título de exemplo de observável, vamos imaginar um número de contadores de cintilação para medir a coordenada x da posição de uma partícula.

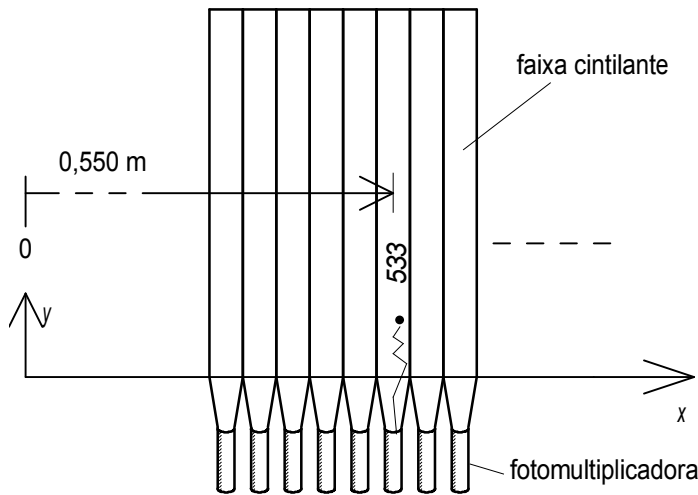


Fig. 1.4.1 Medidor da coordenada x de uma partícula com faixas cintilantes e fotomultiplicadoras. A foto-multiplicadora 533 deu um sinal.

O plano x - y é coberto com faixas longas de material cintilante. Se a partícula passa através das faixas ela produzirá um pulso de luz, isto é, uma cintilação que será registrado por uma fotomultiplicadora. Um resultado de uma medida será uma resposta “sim”, isto é um sinal na fotomultiplicadora número n e uma resposta “não”, isto é sem sinal, em

todas as outras fotomultiplicadoras. Como podemos comunicar este resultado? É claro que uma maneira seria: “a fotomultiplicadora número 533 deu um sinal”. Entretanto, para entender o significado físico disto a pessoa que recebesse esta mensagem teria que conhecer os detalhes do aparato utilizado, quanto espaço os contadores ocupam e como numeramos os contadores. Portanto, é mais útil rotularmos os contadores com valores com algum significado físico. Poderíamos usar, por exemplo, a coordenada x do centro das faixas como rótulos. Ao invés de dizer “o contador número 533 deu um sinal” poderíamos falar “medimos $x = (0,550 \pm 0,025) \text{ m}$ ” (supondo que as faixas possuam

5 cm de largura e que o centro do contador 533 tenha a coordenada $x = 0,550$ m). Isto nos leva a seguinte definição:

Um observável unidimensional $\hat{\mathcal{A}}$ é uma coleção de perguntas simples excludentes $\hat{A}_1, \hat{A}_2, \hat{A}_3, \hat{A}_4, \hat{A}_5, \dots$ cuja união é a pergunta trivial junto com rótulos a_1, a_2, a_3, \dots que são valores de algum espaço-valor V de uma grandeza física unidimensional de tal forma que $a_k \neq a_l \Rightarrow (\hat{A}_k \Rightarrow \text{não} \hat{A}_l)$. Ao invés de dizer que “a pergunta \hat{A}_k foi respondida com um sim” dizemos “medimos o valor a_k ”.

Se o vetor de estado estiver num dos espaços A_k a medida da quantidade observável $\{\langle \hat{A}_1, a_1 \rangle, \langle \hat{A}_2, a_2 \rangle, \langle \hat{A}_3, a_3 \rangle, \langle \hat{A}_4, a_4 \rangle, \dots\}$ dará reproduzivelmente o resultado a_k . Para estados gerais os resultados flutuarão. Em qualquer caso podemos medir um valor médio \bar{a} em um número grande de experiências usando um ensemble de sistemas.

$$\bar{a} \stackrel{\text{def.}}{=} \sum_k a_k r_k \quad (1.4.1)$$

onde r_k é a frequência relativa das respostas “sim” da pergunta \hat{A}_k . A previsão teórica deste valor

$$\langle \hat{\mathcal{A}} \rangle \stackrel{\text{def.}}{=} \sum_k a_k \text{Pr}[\hat{A}_k; \hat{\Psi}] \quad (1.4.2)$$

é chamada de *valor esperado do observável $\hat{\mathcal{A}}$* . Se \bar{a} coincide com o valor esperado podemos ficar contentes.

Seja V o espaço-valor que usamos para os rótulos a_k . No exemplo dado das faixas cintilantes, este seria o valor de distâncias espaciais. Podemos definir o produto tensorial do espaço $V + iV$ (isto é, o espaço V complexificado) com o espaço de Hilbert e definir o produto de operadores $\rho: H \rightarrow H$ e operadores $\mathcal{A}: H \rightarrow (V + iV) \otimes H$. Com uma base ortonormal $\{|\phi_v\rangle, v=1,2,\dots\}$ em H podemos escrever os operadores nestes espaços na forma

$$\rho = \sum_{v,\mu} \rho_{v\mu} |\nu\rangle\langle\mu|, \quad \mathcal{A} = \sum_{v,\mu} \mathcal{A}_{v\mu} |\nu\rangle\langle\mu| \quad \text{com } \rho_{v\mu} \in \mathbb{C}, \mathcal{A}_{v\mu} \in V + iV \quad (1.4.3)$$

e definir os produtos

$$\rho \mathcal{A} \stackrel{\text{def.}}{=} \sum_{v,\mu,\kappa} \rho_{v\kappa} \mathcal{A}_{\kappa\mu} |\nu\rangle\langle\mu|, \quad \mathcal{A} \rho \stackrel{\text{def.}}{=} \sum_{v,\mu,\kappa} \mathcal{A}_{v\kappa} \rho_{\kappa\mu} |\nu\rangle\langle\mu| \quad (1.4.4)$$

Temos $\rho \mathcal{A}: H \rightarrow (V + iV) \otimes H$ e $\mathcal{A} \rho: H \rightarrow (V + iV) \otimes H$. A operação de traço pode ser estendida naturalmente para este tipo de operador:

$$\text{Tr}(\mathcal{A} \rho) \stackrel{\text{def.}}{=} \sum_{v,\kappa} \mathcal{A}_{v\kappa} \rho_{\kappa v} \quad (1.4.5)$$

Esta operação resulta num valor em $V + iV$. Caso \mathcal{A} e ρ foram auto-adjuntos o valor fica em V .

Agora podemos substituir a fórmula (1.3.17) da probabilidade na fórmula (1.4.2) e usar a linearidade da operação traço para escrever o valor esperado de uma forma interessante:

$$\langle \hat{\mathcal{A}} \rangle = \sum_k a_k \text{Tr}(\mathcal{P}_{A_k} \rho_e) = \text{Tr} \left(\left(\sum_k a_k \mathcal{P}_{A_k} \right) \rho_e \right) \quad (1.4.6)$$

Nesta fórmula aparece um operador auto-adjunto que é determinado pela coleção de pares de subespaços e valores $\{\langle A_1, a_1 \rangle, \langle A_2, a_2 \rangle, \dots\}$:

$$\mathcal{A} \stackrel{\text{def.}}{=} \sum_k a_k \mathcal{P}_{A_k}, \quad \mathcal{A}: H \rightarrow (V + iV) \otimes H \quad (1.4.7)$$

A complicada coleção de pares de subespaços e valores $\{\langle A_1, a_1 \rangle, \langle A_2, a_2 \rangle, \dots\}$ é associada a um único objeto matemático \mathcal{A} . Isto não é apenas uma associação de uma coisa com outra, mas a complicada coleção $\{\langle A_1, a_1 \rangle, \langle A_2, a_2 \rangle, \dots\}$ e o operador \mathcal{A} são de fato equivalentes, pois a coleção pode ser reconstruída a partir do operador. Para fazer isto basta resolver o problema espectral do operador. Os subespaços A_k são justamente os auto-espaços e os a_k são os autovalores correspondentes do operador.

Temos que aprimorar o nosso conceito de observável um pouco mais. Analisando o exemplo das faixas cintilantes criticamente, percebemos que a associação da pergunta se um determinado contador dará um sinal com um único valor da coordenada x não é muito correta. Na verdade deveríamos associar a pergunta do contador número 533 não com o valor 0,550m mas com o intervalo de valores $[0,525\text{m}; 0,575\text{m}]$ ¹. Se tivéssemos usado um arranjo de faixas cintilantes com a metade da largura teríamos, em certo sentido, medido o mesmo observável, mas com uma resolução melhor. O que chamamos de observável não corresponde exatamente a um único aparato no laboratório, mas a uma classe de aparatos. Um aparato mede um dado observável com determinada resolução e outro pode medir o mesmo observável um pouco melhor com mais alta resolução. Ambos os aparatos perguntam por intervalos no espaço-valor de uma grandeza. Podemos ainda permitir que se façam perguntas por uniões contáveis de intervalos. No lugar da exigência que as perguntas de um observável sejam mutuamente excludentes devemos exigir que eles sejam *compatíveis* do sentido de formar uma álgebra Booleana. Isto nos leva à seguinte definição de observável unidimensional:

Um observável unidimensional $\hat{\mathcal{A}}$ com espaço valor V é uma coleção de pares de perguntas simples \hat{A}_C e conjuntos Borel $C \subset V$ tal que $C \cap D = \emptyset \Rightarrow (\hat{A}_C \Rightarrow \text{não} \hat{A}_D)$ e que $\hat{A}_{C \cup D} = \hat{A}_C \oplus \hat{A}_D$ e $\hat{A}_{C \cap D} = \hat{A}_C \wedge \hat{A}_D$ e tal que \hat{A}_V é a pergunta trivial (sempre verdadeira). Vamos dizer que, para o conjunto C , o observável $\hat{\mathcal{A}}$ faz a pergunta \hat{A}_C . Ao invés de dizer que “a pergunta \hat{A}_C foi respondida com um sim” vamos dizer que “medimos um valor a no conjunto C ”.

¹ Uso aqui “,” para separar os valores no lugar da vírgula para não confundir o separador com a virgula do número decimal.

Na representação matemática, as perguntas \widehat{A}_C correspondem a subespaços fechados A_C ou a projetores ortogonais \mathcal{P}_{A_C} neste subespaços. O espaço valor V é um espaço linear unidimensional totalmente ordenado. Para $a \in V$ seja

$$I(a) \stackrel{\text{def.}}{=} \{x \in V \mid x \leq a\} \quad (1.4.8).$$

Os projetores ortogonais

$$\mathcal{E}_{\mathcal{A}}(a) \stackrel{\text{def.}}{=} \mathcal{P}_{A_{I(a)}} \quad (1.4.9)$$

permitem escrever um operador auto-adjunto² \mathcal{A} em forma de integral de Lebesgue–Stieltjes³ que representa o observável:

$$\mathcal{A} \stackrel{\text{def.}}{=} \int_{a \in V} a \, d\mathcal{E}_{\mathcal{A}}(a) \quad (1.4.10).$$

$\mathcal{E}_{\mathcal{A}}(a)$ é a família espectral do operador e tem a propriedade

$$a_1 < a_2 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{E}_{\mathcal{A}}(a_1) \leq \mathcal{E}_{\mathcal{A}}(a_2) \quad (1.4.11).$$

Para os subespaços correspondentes isto significa:

$$a_1 < a_2 \quad \Rightarrow \quad A_{I(a_1)} \subset A_{I(a_2)} \quad (1.4.12)$$

Pontos de crescimento contínuo da função valor-operador $\mathcal{E}_{\mathcal{A}}(\cdot)$ pertencem ao espectro contínuo do operador, pontos de descontinuidade são autovalores discretos e regiões onde esta função é constante não pertencem ao espectro.

Os projetores \mathcal{P}_{A_C} correspondentes a um conjunto de Borel C podem ser escritos também como integral de Lebesgue–Stieltjes

$$\mathcal{P}_{A_C} = \int_{a \in V} \chi_C(a) \, d\mathcal{E}_{\mathcal{A}}(a) \quad (1.4.13)$$

com a função característica χ_C do conjunto C :

$$\chi_C(a) \stackrel{\text{def.}}{=} \begin{cases} 1 & \text{para } a \in C \\ 0 & \text{para } a \notin C \end{cases} \quad (1.4.14).$$

A probabilidade de medir um valor num conjunto C é

$$\Pr[\widehat{A}_C; e] = \text{Tr}(\mathcal{P}_{A_C} \rho_e) = \int_{a \in V} \chi_C(a) \, d\text{Tr}(\mathcal{E}_{\mathcal{A}}(a) \rho_e) \quad (1.4.15)$$

e o valor esperado do observável é

² Na verdade existe aqui uma tremenda complicação matemática, para muitos observáveis (aqueles com espectro não limitados) o operador não é definido em todo o espaço de Hilbert. Neste caso precisa do conceito de operadores *essencialmente auto-adjuntos*.

³ Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função monotonicamente crescente. A integral

de Riemann–Stieltjes $\int_a^b f(x) \, dg(x)$ é definida como limite das somas $\sum_k f(x_k) [g(x_{k+1}) - g(x_k)]$

com partições do intervalo $[a, b]$ com $\max_k [x_{k+1} - x_k] \rightarrow 0$. Este tipo de integral pode ser estendida,

formando a integral de Lebesgue–Stieltjes, para poder incluir funções f medíveis não contínuas. A integral (1.4.10) generaliza esta idéia tendo operadores de projeção no lugar da função g .

$$\langle \hat{\mathcal{A}} \rangle = \int_{a \in V} a \, d\text{Tr}(\mathcal{E}_{\mathcal{A}}(a) \rho_e) \quad (1.4.16)$$

Para estados que podem ser representados por um vetor de estado podemos escrever as fórmulas (1.4.15) e (1.4.16) também como

$$\text{Pr}[\hat{A}_C; e] = (\psi_e, \mathcal{P}_{A_C} \psi_e) = \int_{a \in V} \chi_C(a) d(\psi_e, \mathcal{E}_{\mathcal{A}}(a) \psi_e) \quad (1.4.17)$$

$$\langle \hat{\mathcal{A}} \rangle = \int_{a \in V} a d(\psi_e, \mathcal{E}_{\mathcal{A}}(a) \psi_e) \quad (1.4.18)$$

Podemos imaginar que alguém não gostou dos rótulos de um observável e queira usar outros rótulos. Isto pode ser feito com a ajuda de funções medíveis⁴. Seja $\hat{\mathcal{A}}$ um observável unidimensional com espaço valor V . Segundo nossa definição, podemos escrever $\hat{\mathcal{A}}$ como uma família indexada de perguntas $\hat{\mathcal{A}} = \{\hat{A}_C\}_{C \in \sigma(V)}$ onde chamei a álgebra- σ dos conjuntos de Borel em V de $\sigma(V)$. Seja W outro espaço valor e $\sigma(W)$ a álgebra- σ dos conjuntos de Borel em W . E seja $f: V \rightarrow W$ uma função medível. Então podemos definir o observável $f(\hat{\mathcal{A}})$ como a família indexada de perguntas $f(\hat{\mathcal{A}}) \stackrel{\text{def}}{=} \{\hat{A}_{f^{-1}(D)}\}_{D \in \sigma(W)}$. Se $\hat{\mathcal{A}}$ era representado no espaço de Hilbert pelo operador $\int_{a \in V} a d\mathcal{E}_{\mathcal{A}}(a)$ então o observável $f(\hat{\mathcal{A}})$ será representado pelo operador $\int_{a \in V} f(a) d\mathcal{E}_{\mathcal{A}}(a)$. Se a função f não for injectiva, a formação da função de um observável envolve além da mera mudança dos rótulos uma identificação de perguntas, isto é, algumas perguntas A_1, A_2, \dots que originalmente eram distintas podem ser substituídas pelo “ou quântico” $\bigoplus_k A_k$.

A idéia essencial do observável era uma coleção de perguntas simples compatíveis cuja união é a pergunta trivial. Os valores do observável eram meramente rótulos para comunicar os resultados das medições de forma prática. Então podemos considerar o uso de outros tipos de rótulos. Por exemplo, poderíamos usar valores de uma grandeza multi-dimensional. Seja V um espaço-valor de n dimensões de alguma grandeza de dimensão n . Podemos formar um observável n -dimensional $\hat{\mathcal{A}}$ que seria uma coleção de perguntas simples \hat{A}_C e conjuntos Borel $C \subset V$ tal que $C \cap D = \emptyset \Rightarrow (\hat{A}_C \Rightarrow \text{não} \hat{A}_D)$, que $\hat{A}_{C \cap D} = \hat{A}_C \wedge \hat{A}_D$ e que $\hat{A}_{C \cup D} = \hat{A}_C \oplus \hat{A}_D$ e tal que \hat{A}_V é a pergunta trivial (sempre verdadeira). Para poder representar este tipo de observável no espaço de Hilbert podemos escolher uma base $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ em V e podemos associar ao observável $\hat{\mathcal{A}}$ n observáveis unidimensionais

⁴ Aqui medível não no sentido da física experimental mas no sentido da teoria matemática de medidas (volumes, áreas etc.). Uma função $f: M \rightarrow N$ que mapeia um espaço de medida M num outro espaço de medida é chamada de medível se todas as imagens inversas de conjuntos medíveis em N foram conjuntos medíveis em M .

$\hat{\mathcal{A}}^{(1)}, \hat{\mathcal{A}}^{(2)}, \dots, \hat{\mathcal{A}}^{(n)}$ da seguinte forma: Para um conjunto Borel $B \subset \mathbb{R}$ o observável $\hat{\mathcal{A}}^{(k)}$ faz a pergunta simples $\hat{\mathcal{A}}_B^{(k)} = \hat{\mathcal{A}}_{\mathbb{R}b_1 \oplus \mathbb{R}b_2 \oplus \dots \oplus Bb_k \oplus \dots \oplus \mathbb{R}b_n}$, ou seja a pergunta simples que o observável $\hat{\mathcal{A}}$ faz para o conjunto $\mathcal{C}_k B = \mathbb{R}b_1 \oplus \mathbb{R}b_2 \oplus \dots \oplus Bb_k \oplus \dots \oplus \mathbb{R}b_n = \left\{ x \in V \mid x = \sum_i x^i b_i, x^k \in B \right\}$ ⁵.

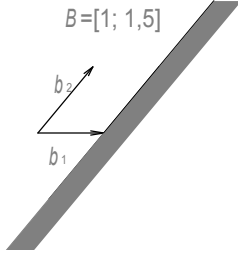


Fig. 1.4.2 Exemplo de um conjunto cilíndrico $\mathcal{C}_k B$ num espaço bidimensional com $k=1$ e $B = [1; 5]$.

Com uma dada base $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ os observáveis $\hat{\mathcal{A}}^{(1)}, \hat{\mathcal{A}}^{(2)}, \dots, \hat{\mathcal{A}}^{(n)}$ são determinados de forma única pelo observável $\hat{\mathcal{A}}$. Por outro lado, o observável $\hat{\mathcal{A}}$ também é determinado de forma única pelos observáveis $\hat{\mathcal{A}}^{(1)}, \hat{\mathcal{A}}^{(2)}, \dots, \hat{\mathcal{A}}^{(n)}$ e pela base. A álgebra- σ em V pode ser gerada por conjuntos da forma $\mathcal{C}_1 B_1 \cap \mathcal{C}_2 B_2 \cap \dots \cap \mathcal{C}_n B_n$, onde os B_1, \dots, B_n são conjuntos de Borel em \mathbb{R} . Para este tipo de conjunto o observável $\hat{\mathcal{A}}$ faz a pergunta $\hat{\mathcal{A}}_{B_1}^{(1)} \wedge \hat{\mathcal{A}}_{B_2}^{(2)} \wedge \dots \wedge \hat{\mathcal{A}}_{B_n}^{(n)}$. Os observáveis $\hat{\mathcal{A}}^{(1)}, \hat{\mathcal{A}}^{(2)}, \dots, \hat{\mathcal{A}}^{(n)}$ podem ser representados no espaço de Hilbert por n operadores auto-adjuntos que comutam. Os observáveis $\hat{\mathcal{A}}^{(1)}, \hat{\mathcal{A}}^{(2)}, \dots, \hat{\mathcal{A}}^{(n)}$ são componentes de um único observável $\hat{\mathcal{A}}$ de n dimensões. Podemos também incluir os valores básicos b_k nos observáveis; $\hat{\mathcal{A}}_{def}^{(k)} = b_k \hat{\mathcal{A}}^{(k)}$. Isto é uma questão de gosto. Observáveis $\hat{\mathcal{A}}^{(1)}, \hat{\mathcal{A}}^{(2)}, \dots, \hat{\mathcal{A}}^{(n)}$ que podem ser considerados componentes de um único observável $\hat{\mathcal{A}}$ são chamados de observáveis comesuráveis pois a medição do observável $\hat{\mathcal{A}}$ pode ser considerada uma medição simultânea de todos os $\hat{\mathcal{A}}^{(1)}, \hat{\mathcal{A}}^{(2)}, \dots, \hat{\mathcal{A}}^{(n)}$.

Seja W um espaço valor de alguma grandeza e $f: V \rightarrow W$ uma função medível, onde V é o espaço valor do nosso observável n -dimensional $\hat{\mathcal{A}}$ que consideramos no último parágrafo. Definimos a função $f(\hat{\mathcal{A}})$ do observável $\hat{\mathcal{A}}$ como o observável que, para um conjunto Borel $B \in \sigma(W)$ faz a pergunta $\hat{\mathcal{A}}_{f^{-1}(B)}$. Os observáveis $f(\hat{\mathcal{A}})$ e $\hat{\mathcal{A}}$ são comesuráveis. Mas a formação de tal tipo de função de um observável significa de novo uma mera alteração dos rótulos. Ela não traz mais informação. Ao contrário, se f não for injectiva, perde-se informação. Isto é, medindo $f(\hat{\mathcal{A}})$ não vamos obter mais conhecimento sobre o estado do sistema do que medindo o próprio $\hat{\mathcal{A}}$. Por outro lado, se medirmos um outro observável $\hat{\mathcal{B}}$ que é comesurável com $\hat{\mathcal{A}}$ ganharemos em geral mais informações, a não ser que $\hat{\mathcal{B}}$ é justamente uma função de $\hat{\mathcal{A}}$. Pode ocorrer que o próprio $\hat{\mathcal{A}}$ já faz perguntas tão detalhadas que não é possível melhorar a informação ainda mais. Isto é o caso quando todos os observáveis comesuráveis com $\hat{\mathcal{A}}$ podem ser escritas como funções de $\hat{\mathcal{A}}$. Neste caso vamos chamar o conjunto de

⁵ Usamos o símbolo \mathcal{C} para lembrar da palavra cilindro. Em teoria de processos estocásticos este tipo de conjunto é chamado de conjunto cilíndrico.

observáveis $\{\hat{\mathcal{A}}^{(1)}, \hat{\mathcal{A}}^{(2)}, \dots, \hat{\mathcal{A}}^{(n)}\}$ um conjunto completo de observáveis comesuráveis.

No caso de espectros totalmente discretos esta condição significa que os auto-espços simultâneos dos correspondentes operadores $\mathcal{A}^{(1)}, \mathcal{A}^{(2)}, \dots, \mathcal{A}^{(n)}$ são todos unidimensionais e os auto-vetores comuns na dotação de Dirac não precisam de índices de degenerescência.

Um conjunto de observáveis comesuráveis $\{\hat{\mathcal{A}}^{(1)}, \hat{\mathcal{A}}^{(2)}, \dots, \hat{\mathcal{A}}^{(n)}\}$ é completo se e somente se todos os observáveis que são comesuráveis com os $\hat{\mathcal{A}}^{(1)}, \hat{\mathcal{A}}^{(2)}, \dots, \hat{\mathcal{A}}^{(n)}$ podem ser escritos como funções dos $\hat{\mathcal{A}}^{(1)}, \hat{\mathcal{A}}^{(2)}, \dots, \hat{\mathcal{A}}^{(n)}$.