

2.3 Simetrias cinemáticas e geradores infinitesimais

O método de construir uma representação de um sistema diretamente a partir das frequências relativas medidas, como exemplificado no spin, seria completamente inviável para sistemas mais complicados. Além disso, uma pura constatação de probabilidades não seria interessante: o que entenderíamos de um sistema se tivéssemos muitas informações do tipo: “quando se mede com o medidor verde, que está na terceira gaveta do armário, num estado preparado com o aparelho quadrado da quinta gaveta obtém-se a frequência relativa 0,35”? Este tipo de informação certamente não tem valor algum. Precisamos de uma caracterização física dos observáveis e estados. Como os sistemas quânticos não são, em geral, de direto acesso aos sentidos isto não é uma tarefa trivial. Estamos acostumados de ver desenhos em livros que mostram um elétron como um grãozinho de arroz circulando em torno de um núcleo. Mas um elétron não é um grãozinho e o significado de um observável chamado de “posição do elétron” é questionável. Em livros texto tradicionais a caracterização dos observáveis é feita através do processo de *quantização*. A quantização é a passagem de uma teoria clássica para uma teoria quântica. A identificação ou caracterização dos observáveis seria feita através do limite clássico: um observável seria chamado de posição se no limite clássico, $\hbar \rightarrow 0$, ele se transformar na posição clássica e um observável seria chamado de velocidade se no limite clássico, $\hbar \rightarrow 0$, ele se transformar na velocidade clássica.

Este procedimento para definir as grandezas tem graves falhas: 1) Existem muitos observáveis que têm o mesmo limite clássico. 2) O que é a posição clássica de um elétron? Ao final não existem elétrons clássicos! 3) Como \hbar é uma constante, o limite clássico é um procedimento formal que não permite determinar se um determinado aparato no laboratório mede um dado observável. A quantização não pode ser considerada seriamente como um procedimento científico e muito menos deve ser tomada como a base da teoria quântica. A razão pela qual a quantização acaba dando certo é que a teoria clássica que se imagina associada ao verdadeiro sistema físico geralmente tem as mesmas simetrias que o sistema real. A identificação dos observáveis é na verdade ligada às simetrias. Uma montagem limpa e transparente de uma teoria quântica de um sistema deveria partir diretamente das simetrias do sistema sem envolver o Hocus Pocus da quantização.

Na mecânica clássica da graduação são estudados simetrias da Lagrangiana ou Hamiltoniana ou da ação de um sistema. Este tipo de simetria seriam simetrias da dinâmica de um sistema. Aqui vamos estudar um conceito de simetria mais geral que vamos chamar de *simetria cinemática*. Definimos:

Uma simetria cinemática de um sistema é um mapeamento que mapeia observáveis do sistema em observáveis do mesmo sistema e estados em estados de tal forma que se conservem todos os valores esperados.

Ou seja, temos uma simetria cinemática se conseguiremos trocar todos os observáveis $\hat{\mathcal{A}}$ por outros observáveis $\hat{\mathcal{A}}'$ e os estados e por outros estados e' mas com a condição que $\langle \hat{\mathcal{A}} \rangle_e = \langle \hat{\mathcal{A}}' \rangle_{e'}$, para todo $\hat{\mathcal{A}}$ e todo e .

Com o spin podemos ver um exemplo. Segundo a equação (2.6.10), a probabilidade para obter um “SIM” para a pergunta $[\vec{u} \uparrow]$ com o estado $(\vec{v} \uparrow)$ depende apenas do ângulo entre os vetores \vec{u} e \vec{v} (vetores no laboratório). Se R é uma rotação no espaço

tridimensional do laboratório, concluímos então que as perguntas $[R\vec{u} \uparrow]$ com os estados $(R\vec{v} \uparrow)$ dão exatamente as mesmas probabilidades que as perguntas $[\vec{u} \uparrow]$ com o estado $(\vec{v} \uparrow)$. Isto é válido para todos os vetores \vec{u} e \vec{v} . Então uma rotação de observáveis, isto é, uma rotação dos aparatos reais no laboratório, é uma simetria cinemática do spin.

Não se deve confundir simetria cinemática com a ambigüidade da representação no espaço de Hilbert, a qual discutimos na secção 2.1. A simetria é uma substituição de objetos físicos por outros objetos físicos. Aqui não estamos interessados em mudar a relação entre objetos físicos e matemáticos. Na discussão das simetrias vamos manter a relação entre observáveis e operadores constante.

Se a representação se mantém constante, uma substituição de observáveis por novos observáveis leva no espaço de Hilbert a uma substituição de operadores por novos operadores. Que tipo de operação no espaço de Hilbert poderia descrever uma simetria? Tem que ser uma operação que mantém os valores esperados inalterados. Já conhecemos duas operações deste tipo:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &\mapsto \mathcal{A}' = \mathcal{U}\mathcal{A}\mathcal{U}^{-1} \\ \rho &\mapsto \rho' = \mathcal{U}\rho\mathcal{U}^{-1} \end{aligned} \quad (2.3.1)$$

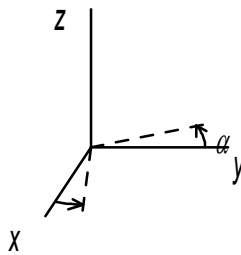
ou para um estado puro

$$|\psi\rangle \mapsto |\psi'\rangle = \mathcal{U}|\psi\rangle$$

onde 1) \mathcal{U} é um operador unitário ou 2) \mathcal{U} é um operador anti-unitário. Estas duas operações descrevem simetrias cinemáticas. Será que qualquer simetria cinemática poderá ser descrita desta maneira? E. Wigner mostrou um teorema que diz, de fato, qualquer simetria cinemática pode ser representado desta maneira.¹

Tentaremos encontrar uma representação da simetria de rotação do sistema do spin. Começaremos com uma rotação ao redor do eixo-z pelo ângulo α .

Fig. 2.3.1 Rotação por volta do eixo-z pelo ângulo α



Esta rotação mapeia o estado $((\theta, \varphi) \uparrow)$ no estado $((\theta, \varphi + \alpha) \uparrow)$ e o estado $((\theta, \varphi) \downarrow)$ no estado $((\theta, \varphi + \alpha) \downarrow)$. Das equações (2.2.30) e (2.2.31) deduz-se diretamente um operador unitário que descreve esta simetria

$$\mathcal{R}_{z,\alpha} \stackrel{\text{def.}}{=} |\uparrow\rangle e^{-i\frac{\alpha}{2}} \langle\uparrow| + |\downarrow\rangle e^{+i\frac{\alpha}{2}} \langle\downarrow| \quad (2.3.2)$$

Vamos introduzir o operador auto-adjunto

$$S_z \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{1}{2} |\uparrow\rangle \langle\uparrow| - \frac{1}{2} |\downarrow\rangle \langle\downarrow| \quad (2.3.3)$$

¹ V. Bargmann: Note on Wigner's Theorem on Symmetry Operations. J.Math. Phys. 5 p. 862-868 (1964).

Com S_z podemos escrever $\mathcal{R}_{z,\alpha}$ na seguinte forma:

$$\mathcal{R}_{z,\alpha} = \exp\{-iS_z\alpha\} \quad (2.3.4)$$

A família de operadores $\mathcal{R}_{z,\alpha}$ depende diferenciavelmente do parâmetro α . Para $\alpha=0$ temos $\mathcal{R}_{z,\alpha} = \mathbf{1}$. Convém estudar o caso de um ângulo de rotação infinitesimal, isto é um ângulo pequeno com a convenção de desprezar termos de ordem α^2 e superior. Para α infinitesimal a exponencial (2.3.4) se reduz à

$$\mathcal{R}_{z,\alpha} = \mathbf{1} - iS_z\alpha \quad (2.3.5)$$

A unitariedade deste operador é válida se desprezarmos termos de ordem α^2 .

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{z,\alpha}\mathcal{R}_{z,\alpha}^\dagger &= (\mathbf{1} - iS_z\alpha)(\mathbf{1} + iS_z\alpha) = \\ &= \mathbf{1} + \cancel{S_z^2\alpha^2}^{\text{segunda ordem}} = \mathbf{1} \end{aligned} \quad (2.3.6).$$

As rotações ao redor do eixo-z formam um grupo. Elas dependem diferenciavelmente do parâmetro α . Existem outras simetrias cinemáticas importantes na física que formam um grupo e dependem de um parâmetro de uma maneira diferenciável, por exemplo translações.

Imaginemos que tenhamos algum grupo de simetrias cujos elementos dependem diferenciavelmente de um parâmetro s de tal forma que $s=0$ corresponda ao elemento de identidade do grupo. Todas estas simetrias podem ser representadas no espaço de Hilbert por operadores unitários² \mathcal{U}_s e podemos escrever este operador na forma

$$\mathcal{U}_s = \mathbf{1} - is\mathcal{G} \quad \text{com } s = \text{infinitesimal} \quad (2.3.7)$$

Temos

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_s\mathcal{U}_s^\dagger &= (\mathbf{1} - i\mathcal{G}s)(\mathbf{1} + i\mathcal{G}^\dagger s) = \\ &= \mathbf{1} + is(\mathcal{G}^\dagger - \mathcal{G}) + \cancel{s^2\mathcal{G}\mathcal{G}^\dagger}^{\text{segunda ordem}} \end{aligned} \quad (2.3.8)$$

\mathcal{U}_s deve ser unitário. Então segue $\mathcal{G}^\dagger = \mathcal{G}$. Este operador auto-adjunto é chamado de *gerador infinitesimal da simetria*. Como \mathcal{G} é auto-adjunto podemos ver se conseguimos associar ao \mathcal{G} um observável. Dentro de certos limites, isto é de fato possível. Logo mais veremos com mais detalhes como o observável que corresponde ao \mathcal{G} é determinado.

Primeiro veremos que mudanças sofrem os operadores de observáveis e os vetores de estados sob a simetria:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &\mapsto \mathcal{A}' = \mathcal{U}_s\mathcal{A}\mathcal{U}_s^\dagger = \mathcal{A} - is(\mathcal{G}\mathcal{A} - \mathcal{A}\mathcal{G}) \\ |\psi\rangle &\mapsto |\psi'\rangle = \mathcal{U}_s|\psi\rangle = |\psi\rangle - is\mathcal{G}|\psi\rangle \end{aligned} \quad (2.3.9)$$

Com $\delta\mathcal{A} \stackrel{\text{def.}}{=} \mathcal{A}' - \mathcal{A}$ e $\delta|\psi\rangle \stackrel{\text{def.}}{=} |\psi'\rangle - |\psi\rangle$ temos

² Pela continuidade e com $\mathcal{U}_0 = \mathbf{1}$ podemos excluir, neste caso, os operadores anti-unitários.

$$\delta \mathcal{A} = -is[\mathcal{G}, \mathcal{A}] \quad (2.3.10)$$

$$\delta |\psi\rangle = -is\mathcal{G}|\psi\rangle \quad (2.3.11)$$

Agora vamos ver se podemos associar um observável ao operador \mathcal{G} . Primeiramente temos que ver se \mathcal{G} é determinado de forma única pela simetria. Depois temos que verificar se \mathcal{G} se transforma de maneira correta sob uma mudança de representação do sistema quântico e finalmente podemos pensar como poderíamos medir o observável que é representado por \mathcal{G} no laboratório.

Infelizmente \mathcal{G} não é determinado de forma única pela simetria. Se \mathcal{U}_s representa a simetria o operador $e^{-ic}\mathcal{U}_s$ com $c \in \mathbb{R}$, também representa esta mesma simetria. Para $s=0$ ambos os operadores devem coincidir com a identidade, então para $s=0$ deve valer $c=0$. Mas para s infinitesimal podemos ter $c=g_0s$ onde g_0 é uma constante. Se o parâmetro s do grupo toma valores dentro de algum espaço-valor V de uma grandeza então g_0 é uma constante no espaço dual de V , pois g_0s tem que ser um número. Com tal mudança da representação da simetria o gerador sofre a seguinte mudança

$$\mathcal{G} \mapsto \mathcal{G} + g_0 \mathbf{1} \quad (2.3.12).$$

Então o gerador é determinado somente até uma constante aditiva. Mais tarde veremos que o Hamiltoniano é um gerador. A indeterminação (2.3.12) é a razão pela qual só é possível medir diferenças de energia na mecânica não-relativística. Porém às vezes a estrutura do grupo de simetria permite impor condições que restringem a liberdade de somar constantes aos geradores. Com o grupo de rotações e translações veremos exemplos como a indeterminação dos geradores pode ser eliminada. Também na física quântica relativística o grupo de simetria (o grupo de Poincaré) é tal que neste caso a constante arbitrária da energia pode ser eliminada e relativisticamente a energia tem um ponto zero absoluto.

Agora vamos verificar se \mathcal{G} tem a lei de transformação correta frente a mudanças de representação do sistema. O \mathcal{G} era definido dentro de um dado esquema de representação. Dentro deste esquema os observáveis $\hat{\mathcal{A}}$ eram representados por operadores \mathcal{A} . A simetria troca os $\hat{\mathcal{A}}$ por $\hat{\mathcal{A}}'$ os quais seriam representados por operadores \mathcal{A}' .

$$\begin{array}{ccc} \hat{\mathcal{A}} & \xrightarrow{\text{representação}} & \mathcal{A} \\ \text{simetria} \downarrow & & \downarrow \\ \hat{\mathcal{A}}' & \xrightarrow{\text{representação}} & \mathcal{A}' = \mathcal{U}_s \mathcal{A} \mathcal{U}_s^{-1} \end{array} \quad \text{efeito da simetria sobre os operadores} \quad (2.3.13)$$

Agora, seja $\mathcal{M}: H \rightarrow H'$ um mapeamento unitário ou anti-unitário que descreve uma Mudança de representação do sistema quântico. Nesta nova representação o esquema (2.3.13) fica da seguinte forma:

$$\begin{array}{ccc}
\hat{\mathcal{A}} & \xrightarrow{\text{nova representação}} & \mathcal{M}\mathcal{A}\mathcal{M}^{-1} \\
\text{simetria} \downarrow & & \downarrow \text{efeito da simetria sobre os operadores} \\
\hat{\mathcal{A}}' & \xrightarrow{\text{nova representação}} & \mathcal{M}\mathcal{U}_s\mathcal{A}\mathcal{U}_s^{-1}\mathcal{M}^{-1}
\end{array}
\quad (2.3.14)$$

Novamente vamos querer escrever a relação entre antigo operador (antes da aplicação da simetria) e novo operador (depois da aplicação da simetria) como conjugação com um operador da forma $(\mathbf{1} - is\tilde{\mathcal{G}})$:

$$\begin{aligned}
(\mathbf{1} - is\tilde{\mathcal{G}})\mathcal{M}\mathcal{A}\mathcal{M}^{-1}(\mathbf{1} - is\tilde{\mathcal{G}})^{-1} &= \mathcal{M}\mathcal{U}_s\mathcal{A}\mathcal{U}_s^{-1}\mathcal{M}^{-1} = \\
&= \mathcal{M}(\mathbf{1} - is\mathcal{G})\mathcal{A}(\mathbf{1} + is\mathcal{G})\mathcal{M}^{-1}
\end{aligned}
\quad (2.3.15)$$

Inserindo a identidade no lado direito obtemos

$$\begin{aligned}
(\mathbf{1} - is\tilde{\mathcal{G}})\underline{\underline{\mathcal{M}\mathcal{A}\mathcal{M}^{-1}}}(\mathbf{1} - is\tilde{\mathcal{G}})^{-1} &= \mathcal{M}\mathcal{U}_s\mathcal{A}\mathcal{U}_s^{-1}\mathcal{M}^{-1} = \\
&= \mathcal{M}(\mathbf{1} - is\mathcal{G})\mathcal{M}^{-1}\underline{\underline{\mathcal{M}\mathcal{A}\mathcal{M}^{-1}}}\mathcal{M}(\mathbf{1} + is\mathcal{G})\mathcal{M}^{-1}
\end{aligned}
\quad (2.3.16)$$

Então o operador $\mathcal{M}\mathcal{A}\mathcal{M}^{-1}$ que representa o observável $\hat{\mathcal{A}}$ na nova representação precisa ser conjugado com o operador unitário

$$\mathbf{1} - is\mathcal{G}\mathcal{M}^{-1} \quad (2.3.17)$$

para obter o operador do observável gerado pela simetria. Então podemos ler qual é o gerador da simetria na nova representação:

$$\tilde{\mathcal{G}} = \begin{cases} \mathcal{M}\mathcal{G}\mathcal{M}^{-1} & \text{se } \mathcal{M} \text{ for unitário} \\ -\mathcal{M}\mathcal{G}\mathcal{M}^{-1} & \text{se } \mathcal{M} \text{ for anti-unitário} \end{cases} \quad (2.3.18)$$

Isto coincide com a lei de transformação de operadores que representam observáveis somente no caso de transformações unitárias. No caso de uma mudança anti-unitária os geradores comportam-se de forma errada. Isto significa que geralmente não será possível medir experimentalmente o sinal + ou - de um gerador. A determinação do sinal de um gerador será possível somente após adotar alguma convenção que remova a liberdade de mudanças anti-unitárias na representação. Tendo em vista a equação (2.3.18), vamos chamar os observáveis que são representados por geradores de simetrias de *pseudo-observáveis*.

Finalmente podemos discutir a possibilidade de medir uma grandeza física no laboratório que corresponde a um gerador. Uma grandeza observável era uma coleção de perguntas simples junto com rótulos de algum espaço-valor. Veremos se podemos identificar as perguntas. Se com um estado puro $\hat{\phi}$ uma pergunta do observável que corresponde ao gerador \mathcal{G} recebe reproduzivelmente a resposta “sim” sabemos que o vetor $|\phi\rangle$ que representa este estado é auto-estado do operador \mathcal{G} .

$$\mathcal{G}|\phi\rangle = g|\phi\rangle \quad (2.3.19)$$

Para saber como podemos reconhecer este auto-estado no laboratório vamos submetê-lo à ação da simetria. O correspondente vetor de estado sofre a seguinte modificação (para s infinitesimal):

$$|\varphi\rangle \mapsto (\mathbf{1} - is\mathcal{G})|\varphi\rangle = (1 - isg)|\varphi\rangle \quad (2.3.20)$$

Esta mudança é apenas um fator de fase global. Então o estado ficou simplesmente inalterado! Com isto encontramos a receita como reconhecer as perguntas do pseudo-observável $\hat{\mathcal{G}}$ que é representado pelo operador \mathcal{G} : uma pergunta pertence ao conjunto de perguntas do pseudo-observável $\hat{\mathcal{G}}$ se os estados puros que recebem reproduzivelmente a resposta “sim” foram todos invariantes sob a ação da simetria.

Podemos concluir imediatamente que o espectro dos geradores da simetria de translação é necessariamente contínuo. As grandezas correspondentes aos geradores de translação são chamadas de momentos lineares. O fato que o espectro destas grandezas é contínuo significa que os auto-estados são estados generalizados (estados de Dirac – normalizáveis no sentido de função- δ). É claro que um estado tem que ser espacialmente homogêneo para poder ser invariante sob translações. Estes seriam estados com o sistema quântico distribuído uniformemente em todo o universo. Obviamente este tipo de estado só pode ser uma idealização. Na prática podemos, no entanto, chegar bastante próximo neste caso ideal de tal forma que a linguagem de estados generalizados pode ser bem apropriada para os estados reais no laboratório. Estes estados reais que seriam aproximadamente auto-estados dos momentos seriam estados homogêneos em regiões que são grandes em comparação com as distâncias de translação envolvidas.

Uma vez resolvida a identificação experimental das perguntas simples do $\hat{\mathcal{G}}$, podemos ver como os auto-valores do gerador podem ser medidos experimentalmente. Vamos, para ser mais intuitivo, estudar logo o caso de simetrias não infinitesimais. A simetria finita (isto é, não-infinitesimal) pode ser obtida repetindo infinitamente uma simetria infinitesimal. Por exemplo, uma rotação em torno do eixo- z pelo ângulo α pode ser escrita como

$$\mathcal{R}_{z,\alpha} = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\mathcal{R}_{z,\alpha/n} \mathcal{R}_{z,\alpha/n} \mathcal{R}_{z,\alpha/n} \dots \mathcal{R}_{z,\alpha/n}}_{n \text{ vezes}} \quad (2.3.21)$$

Esta é a idéia da função exponencial. Com uma escolha apropriada do parâmetro s isto significa que o operador \mathcal{U}_s para s finito tem a forma

$$\mathcal{U}_s = \exp\{-is\mathcal{G}\} \quad (2.3.22)$$

Suponhamos que conseguimos localizar no laboratório duas máquinas de preparação que preparem dois estados puros $\hat{\varphi}_1$ e $\hat{\varphi}_2$ mutuamente excludentes que são invariantes sob a ação da simetria. Imagine que conseguimos também dois medidores que façam as perguntas $[\hat{\varphi}_1] = \text{”seu estado é } \hat{\varphi}_1\text{?”}$ e $[\hat{\varphi}_2] = \text{”seu estado é } \hat{\varphi}_2\text{?”}$. Agora podemos procurar um estado $\hat{\psi}$ no laboratório tal que

$$\begin{aligned} \Pr([\hat{\varphi}_1]; \hat{\psi}) &\neq 0, & \Pr([\hat{\varphi}_2]; \hat{\psi}) &\neq 0 \\ \Pr([\hat{\varphi}_1]; \hat{\psi}) + \Pr([\hat{\varphi}_2]; \hat{\psi}) &= 1 \end{aligned} \quad (2.3.23)$$

Então sabemos que os vetores $|\varphi_1\rangle$, $|\varphi_2\rangle$ e $|\psi\rangle$ que representam os respectivos estados cumprem uma equação

$$|\psi\rangle = |\varphi_1\rangle a + |\varphi_2\rangle b \quad \text{com } a \neq 0, b \neq 0 \quad (2.3.24)$$

Vamos agora submeter o aparato que prepara o estado $\hat{\psi}$ à simetria. O estado resultante vamos chamar de $\hat{\psi}_s$. Com este estado vamos medir algum observável arbitrário $\hat{\mathcal{A}}$. Este observável pode ser qualquer, somente não deve ser um que é invariante sob a ação da simetria. Vamos calcular como se comportam os valores esperados com o estado $\hat{\psi}_s$:

$$\begin{aligned} \langle \hat{\mathcal{A}} \rangle_{\hat{\psi}_s} &= (\mathcal{U}_s(|\varphi_1\rangle a + |\varphi_2\rangle b), \hat{\mathcal{A}} \mathcal{U}_s(|\varphi_1\rangle a + |\varphi_2\rangle b)) = \\ &= |a|^2 \langle \hat{\mathcal{A}} \rangle_{\varphi_1} + |b|^2 \langle \hat{\mathcal{A}} \rangle_{\varphi_2} + 2 \operatorname{Re} \left[e^{is(g_2 - g_1)} a^* b \langle \varphi_1 | \hat{\mathcal{A}} | \varphi_2 \rangle \right] \end{aligned} \quad (2.3.25)$$

onde g_1 e g_2 são os auto-valores de \mathcal{G} com os correspondentes auto-vetores $|\varphi_1\rangle$ e $|\varphi_2\rangle$. Desde que escolhermos o observável $\hat{\mathcal{A}}$ de forma suficientemente geral tal que $\langle \varphi_1 | \hat{\mathcal{A}} | \varphi_2 \rangle \neq 0$ obtemos valores esperados que oscilam em relação ao parâmetro s da simetria:

$$\langle \hat{\mathcal{A}} \rangle_{\hat{\psi}_s} = \text{const.} + A \cos((g_2 - g_1)s + \Phi) \quad (2.3.26)$$

onde $A = |a^* b \langle \varphi_1 | \hat{\mathcal{A}} | \varphi_2 \rangle|$ e Φ é o argumento do número complexo $a^* b \langle \varphi_1 | \hat{\mathcal{A}} | \varphi_2 \rangle$. Deste tipo de experiência podemos obter o módulo de $g_2 - g_1$. Obtemos apenas o módulo porque a constante de fase Φ não tem um valor conhecido. Vimos então que módulos de diferenças de autovalores de geradores podem, em princípio, ser medidos experimentalmente. Segundo as considerações gerais sobre a não-unicidade e a lei de transformação dos geradores não podemos esperar mais do que isto.

Que tipo de experiência acabamos de descrever? - Uma experiência de interferometria. Veremos exemplos: 1) o sistema é uma partícula e o grupo de simetria consiste de translações. A superposição de dois auto-estados de momento linear é uma superposição de duas ondas planas. Este estado mostra franjas de interferência. Deslocando este tipo de estado em relação a um detector resulta em oscilações das probabilidades de detecção. 2) O grupo de simetria é formado por deslocamentos temporais das medidas. Neste caso o pseudo-observável que corresponde ao gerador é a energia se o parâmetro s for o tempo deslocado. A frequência $g_2 - g_1$ é a frequência de Bohr.

É também interessante ver o exemplo de rotações por volta do eixo- z . O pseudo-observável $\hat{\mathcal{J}}_z$ correspondente ao gerador é a componente z do momento angular. Se usarmos o ângulo (medido como quociente de comprimento de arco de círculo e raio) como parâmetro s é evidente que diferenças de autovalores de momento angular só podem ser números inteiros. A quantização do momento angular é uma mera questão de geometria: pois com uma rotação de $s = 2\pi$ todos os valores esperados devem voltar aos valores originais. Então, neste caso a função da fórmula (2.3.26) deve ter periodicidade de 2π e consequentemente $g_2 - g_1 = n$ com n inteiro.

O leitor dever estranhar que aqui o momento angular não sai na unidade $\text{kg m}^2 \text{s}^{-1}$. Pode-se definir o gerador de uma simetria alternativamente pela seguinte fórmula:

$$\mathcal{U}_s = \mathbf{1} - \frac{i}{\hbar} \mathcal{G}_{(qz)} s \quad \text{com } s = \text{infinitesimal} \quad (2.3.27)$$

e o novo gerador $\mathcal{G}_{(qz)}$ se relaciona com o nosso linearmente: $\mathcal{G}_{(qz)} = \hbar \mathcal{G}$. Este fator da constante de Planck cancela logo no uso do gerador na fórmula modificada (2.3.27) e do nosso ponto de vista, onde montamos toda teoria quântica a partir de simetrias, tal constante não tem nenhum papel na teoria quântica. Colocamos um índice (qz) neste gerador modificado para indicar que este gerador seria usado por alguém que monta a teoria quântica com a ajuda da quantização. As grandezas momento linear, momento angular e energia têm definições clássicas. Estas definições correspondem a determinados procedimentos de medição. As experiências de interferometria que descrevemos acima fornecem uma forma totalmente diferente de medir estas grandezas. Isto significa que no fundo se trata de novas grandezas. Mas estas novas grandezas descrevem exatamente a mesma estrutura no conjunto de objetos para os quais elas são definidas que as grandezas clássicas antigas. Consequentemente eles podem ser mapeados bijectiva e linearmente com ajuda de uma constante fundamental: $\hat{\mathcal{G}}_{(qz)} = \hbar \mathcal{G}$.

Para nós, que pretendemos ficar totalmente dentro do mundo quântico sem fazer a conexão com grandezas clássicas, não há necessidade de carregar um \hbar nas fórmulas. Nossos momentos angulares têm autovalores numéricos, nossos momentos lineares têm autovalores (generalizados) no espaço dual de vetores de translação, ou seja, uma componente de momento linear se mede em m^{-1} e nossas energias se medem em s^{-1} .

Geralmente uma simetria cinemática tem uma interpretação simples e conhecida, como rotação ou translação, apenas em relação a um pequeno número de observáveis. A mesma simetria que para os observáveis $\hat{\mathcal{A}}_1, \hat{\mathcal{A}}_2, \dots, \hat{\mathcal{A}}_k$ significa “carregar o aparato um metro ao lado” pode significar para outros observáveis $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \dots$ mudanças complicadas, que envolvem até construções de outros aparatos de medida. Sendo assim surge a seguinte pergunta: a ação da simetria sobre os observáveis $\hat{\mathcal{A}}_1, \hat{\mathcal{A}}_2, \dots, \hat{\mathcal{A}}_k$ determina a simetria de forma única, ou precisa saber também o que acontece com os $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \dots$? Claro que a resposta para este tipo de pergunta depende do conjunto de observáveis $\hat{\mathcal{A}}_1, \hat{\mathcal{A}}_2, \dots, \hat{\mathcal{A}}_k$. A seguinte propriedade de conjuntos de operadores fornece um critério para esta questão:

Definição: Seja S um conjunto de operadores auto-adjuntos ou unitários. Vamos chamar S de *irredutível* se os únicos operadores auto-adjuntos ou unitários que comutam com todos os operadores de S são os múltiplos da identidade.

Analogamente vamos chamar um conjunto de observáveis de irredutível se o correspondente conjunto de operadores que representam estes observáveis for irredutível. Para simetrias cinemáticas que podem ser representados por um operador unitário podemos formular o seguinte teorema:

Se uma simetria unitária é conhecida para um conjunto irredutível de observáveis ela é totalmente determinada.

Demonstração: Seja S o conjunto de operadores que representam o conjunto irredutível de observáveis para os quais a dada simetria é conhecida. Supostamente esta simetria pode ser representada por um operador unitário:

$$\mathcal{A}' = \mathcal{U}\mathcal{A}\mathcal{U}^{-1}, \quad \mathcal{A}' \text{ conhecido para todo } \mathcal{A} \in S \quad (2.3.28)$$

Agora vamos supor que exista uma segunda simetria unitária que coincida com esta para todo $\mathcal{A} \in S$. Então teríamos para todo $\mathcal{A} \in S$:

$$\mathcal{U}\mathcal{A}\mathcal{U}^{-1} = \tilde{\mathcal{U}}\mathcal{A}\tilde{\mathcal{U}}^{-1} \quad (2.3.29)$$

onde $\tilde{\mathcal{U}}$ é o operador unitário que representa a segunda simetria. Multiplicando com \mathcal{U}^{-1} pela esquerda e com $\tilde{\mathcal{U}}$ pela direita obtemos $\mathcal{A}(\mathcal{U}^{-1}\tilde{\mathcal{U}}) = (\mathcal{U}^{-1}\tilde{\mathcal{U}})\mathcal{A}$. Como o conjunto S era supostamente irredutível segue que $\mathcal{U}^{-1}\tilde{\mathcal{U}} = b\mathbf{1}$. Mas o operador $\mathcal{U}^{-1}\tilde{\mathcal{U}}$ é unitário então o número b é necessariamente uma fase, $b = \exp\{ic\}$, $c \in \mathbb{R}$. Com $\mathcal{U}^{-1}\tilde{\mathcal{U}} = b\mathbf{1}$ segue $\tilde{\mathcal{U}} = b\mathcal{U}$. Se estes operadores unitários diferem somente por um fator de fase eles descrevem a mesma simetria. •

Esta demonstração funciona também para duas simetrias anti-unitárias. Se \mathcal{U} e $\tilde{\mathcal{U}}$ forem ambos anti-unitários então $\mathcal{U}^{-1}\tilde{\mathcal{U}}$ seria novamente unitário. Mas um conjunto irredutível em geral não é suficiente para poder distinguir uma simetria unitária de uma anti-unitária. Exemplo:

$$S \stackrel{\text{def.}}{=} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathcal{U} = \mathbf{1}, \quad \tilde{\mathcal{U}} = \mathcal{K} \quad \text{com} \quad \mathcal{K} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^* \\ b^* \end{pmatrix}$$

Exercício 2.3.1: Mostre que o conjunto $S \stackrel{\text{def.}}{=} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

não é irredutível.

Exercício 2.3.2: Mostre que o conjunto $S \stackrel{\text{def.}}{=} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ é irredutível.

Exercício 2.3.3. Vimos que $S_z \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{1}{2}|\uparrow\rangle\langle\uparrow| - \frac{1}{2}|\downarrow\rangle\langle\downarrow|$ é gerador de rotações por volta do eixo-z para o sistema de spin do átomo de prata. Mostre que

$$S_x \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{1}{2}|\uparrow\rangle\langle\downarrow| + \frac{1}{2}|\downarrow\rangle\langle\uparrow|$$

$$S_y \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{-i}{2}|\uparrow\rangle\langle\downarrow| + \frac{+i}{2}|\downarrow\rangle\langle\uparrow|$$

são os geradores de rotações por volta dos respectivos eixos x e y e o gerador de rotação por volta de um vetor normalizado \hat{u} é dado por

$$S_u = u_x S_x + u_y S_y + u_z S_z$$