

## 2.5 Momento angular e momento linear

Os geradores das simetrias de rotação e de translação são grandezas físicas de maior importância; são eles o momento angular e linear. Agora estudaremos estas grandezas com mais detalhes. As considerações desta secção serão t m m válidas para a física quântica relativística.

As simetrias de rotação e translação são definidas em relação a algum conjunto irredutível  $S$  de observáveis e vamos supor que este conjunto seja o mesmo usado para definir a dinâmica do sistema. Para observáveis do conjunto  $S$  estas simetrias atuam da seguinte forma:

$$\mathbb{T}_{\vec{\theta}} \left[ \langle \mathcal{O}, \vec{r}_A, \vec{r}_B, \vec{r}_C, t_M \rangle \right] = \left[ \langle \mathcal{O}, \vec{r}_A + \vec{\theta}, \vec{r}_B + \vec{\theta}, \vec{r}_C + \vec{\theta}, t_M \rangle \right] \quad (2.5.1)$$

$$\mathbb{R}_R \left[ \langle \mathcal{O}, \vec{r}_A, \vec{r}_B, \vec{r}_C, t_M \rangle \right] = \left[ \langle \mathcal{O}, R\vec{r}_A, R\vec{r}_B, R\vec{r}_C, t_M \rangle \right] \quad (2.5.2)$$

onde  $\vec{\theta}$  é um vetor de translação e  $R$  uma rotação. Trataremos primeiramente das rotações:

Vamos escrever as rotações em forma matricial. Sejam  $\hat{e}_k$ ,  $k=1, 2, 3$  os três vetores ortonormais que apontam nas direção dos eixos  $x, y$  e  $z$ . Vamos empregar a convenção de Einstein, mas com os índices apenas percorrendo os valores 1, 2, 3. Um vetor posição  $\vec{r}$  seria então escrito como

$$\vec{r} = \hat{e}_k r^k \quad (2.5.3)$$

O vetor rodado  $R\vec{r}$  seria

$$R\vec{r} = \hat{e}_l R^l_k r^k \quad (2.5.4)$$

Aqui escrevemos as três matizes que representam rotações de respectivos ângulos  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  em tornos dos eixos  $x, y$  e  $z$ :

$$\begin{aligned} \left( {}_{x,\alpha} R^l_k \right) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}, \\ \left( {}_{y,\beta} R^l_k \right) &= \begin{pmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{pmatrix}, \\ \left( {}_{z,\gamma} R^l_k \right) &= \begin{pmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.5.5)$$

Precisamos do produto de quatro matrizes deste tipo. Obviamente tal tipo de produto resulta em express es desconfortavelmente grandes. Conv m nesta situa  o usar  ngulos infinitesimais. Com  ngulos infinitesimais estas rota  es ficam da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\left( {}_{x,\alpha} R_k^l \right) &= \mathbf{1} + \alpha \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \equiv \mathbf{1} + \alpha \mathbf{r}_1, \\
\left( {}_{y,\beta} R_k^l \right) &= \mathbf{1} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv \mathbf{1} + \beta \mathbf{r}_2, \\
\left( {}_{z,\gamma} R_k^l \right) &= \mathbf{1} + \gamma \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv \mathbf{1} + \gamma \mathbf{r}_3
\end{aligned} \tag{2.5.6}$$

Com estas expressões vamos agora calcular o produto  $\left( {}_{x,\alpha} R \right)^{-1} \left( {}_{y,\beta} R \right)^{-1} \left( {}_{x,\alpha} R \right) \left( {}_{y,\beta} R \right)$ . Neste produto aparecem termos proporcionais ao produto  $\alpha\beta$ . Este termos devem ser desprezados? A resposta é não. É um tanto errado de se pensar num parâmetro infinitesimal como algo pequeno. É melhor pensarmos em termos da independência linear de monômios: imagine uma igualdade entre duas séries de Taylor:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots$$

O fato que os monômios  $x^n$  são linearmente independentes permite comparar termo por termo:  $a_0 = b_0$ ,  $a_1 = b_1$ ,  $a_2 = b_2$ , .....

Se cometermos um erro com os termos de segunda ordem isto não afetará de forma alguma os termos de ordem 0 e 1. Trabalhar com parâmetros infinitesimais significa simplesmente cometer propositadamente erros de ordem 2 para simplificar, avisando que conseqüentemente os termos de ordem 2 ou superior não podem mais ser usados por que estes estão contaminados pelos erros introduzidos. Quando substituímos as matrizes (2.5.5) pelas matrizes (2.5.6) cometemos erros de ordem  $\alpha^2$ ,  $\beta^2$ ,  $\gamma^2$  e superior. Mas isto jamais vai contaminar os termos de ordem  $\alpha\beta$ . Então estes permanecem válidos. Vamos então para o cálculo:

$$\begin{aligned}
\left( {}_{x,\alpha} R \right)^{-1} \left( {}_{y,\beta} R \right)^{-1} \left( {}_{x,\alpha} R \right) \left( {}_{y,\beta} R \right) &= \\
&= (\mathbf{1} - \alpha \mathbf{r}_1) (\mathbf{1} - \beta \mathbf{r}_2) (\mathbf{1} + \alpha \mathbf{r}_1) (\mathbf{1} + \beta \mathbf{r}_2) = \\
&= \mathbf{1} + \alpha\beta [\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2] + \text{termos de ordem } \alpha^2 \text{ e } \beta^2
\end{aligned} \tag{2.5.7}$$

Então, fazer primeiramente uma rotação em torno do eixo  $y$ , depois uma em torno do eixo  $x$  e depois desfazer as duas rotações na mesma ordem não leva à identidade mas a alguma rotação. Vamos calcular o comutador das matrizes  $\mathbf{r}_1$  e  $\mathbf{r}_2$  para descobrir qual é esta rotação:

$$\begin{aligned}
[\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2] &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{r}_3
\end{aligned} \tag{2.5.8}$$

Então  $({}_{x,\alpha}R)^{-1}({}_{y,\beta}R)^{-1}({}_{x,\alpha}R)({}_{y,\beta}R)$  é uma rotação em torno do eixo  $z$  e o ângulo de rotação é o produto  $\alpha\beta$ . A mesma igualdade tem que valer para as simetrias de rotação. Isto porque o conjunto  $S$  era irredutível e para os observáveis de  $S$  estas simetrias atuam como as rotações. Então o produto dos quatro operadores unitários  $({}_{x,\alpha}\mathcal{R})^{-1}$ ,  $({}_{y,\beta}\mathcal{R})^{-1}$ ,  ${}_{x,\alpha}\mathcal{R}$ ,  ${}_{y,\beta}\mathcal{R}$  que representam as simetrias de rotação  $({}_{x,\alpha}\mathbb{R})^{-1}$ ,  $({}_{y,\beta}\mathbb{R})^{-1}$ ,  ${}_{x,\alpha}\mathbb{R}$ ,  ${}_{y,\beta}\mathbb{R}$  deve ser um operador que descreve a simetria  ${}_{z,\alpha\beta}\mathbb{R}$ .

$$({}_{x,\alpha}\mathcal{R})^{-1}({}_{y,\beta}\mathcal{R})^{-1}({}_{x,\alpha}\mathcal{R})({}_{y,\beta}\mathcal{R}) = \text{operador que descreve } {}_{z,\alpha\beta}\mathbb{R} \tag{2.5.9}$$

Escrevemos os operadores

$${}_{x,\alpha}\mathcal{R} = \exp\{-i\alpha\mathcal{J}_x\}, \quad {}_{y,\beta}\mathcal{R} = \exp\{-i\beta\mathcal{J}_y\}, \quad {}_{z,\gamma}\mathcal{R} = \exp\{-i\gamma\mathcal{J}_z\} \tag{2.5.10}$$

ou para ângulos infinitesimais

$${}_{x,\alpha}\mathcal{R} = \mathbf{1} - i\alpha\mathcal{J}_x, \quad {}_{y,\beta}\mathcal{R} = \mathbf{1} - i\beta\mathcal{J}_y, \quad {}_{z,\gamma}\mathcal{R} = \mathbf{1} - i\gamma\mathcal{J}_z \tag{2.5.11}$$

Isto define as componentes  $x$ ,  $y$  e  $z$  do momento angular. Podemos agora combinar estas fórmulas, que definem  $\mathcal{J}_x$ ,  $\mathcal{J}_y$ ,  $\mathcal{J}_z$  com a fórmula (2.5.9). Mas, temos que ter em mente que operadores unitários que diferem apenas por um fator de fase descrevem a mesma simetria. Então não podemos simplesmente concluir que  $\mathbf{1} - i\alpha\beta\mathcal{J}_z$  e  $({}_{x,\alpha}\mathcal{R})^{-1}({}_{y,\beta}\mathcal{R})^{-1}({}_{x,\alpha}\mathcal{R})({}_{y,\beta}\mathcal{R})$  são o mesmo operador. Mas podemos somente afirmar que eles devem ser proporcionais com algum fator de proporcionalidade em forma de fator de fase  $\exp\{i\Phi(\alpha,\beta)\}$  com  $\Phi(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}$ .

$$(\mathbf{1} + i\alpha\mathcal{J}_x)(\mathbf{1} + i\beta\mathcal{J}_y)(\mathbf{1} - i\alpha\mathcal{J}_x)(\mathbf{1} - i\beta\mathcal{J}_y) = e^{i\Phi(\alpha,\beta)}(\mathbf{1} - i\alpha\beta\mathcal{J}_z) \tag{2.5.12}$$

Vamos expandir  $\exp\{i\Phi(\alpha,\beta)\}$  numa série de Taylor até a ordem  $\alpha\beta$ :

$$e^{i\Phi(\alpha,\beta)} = A + B_x\alpha + B_y\beta + C_{xy}\alpha\beta + \text{ordens superiores} \tag{2.5.13}$$

Comparando termos das ordens  $\alpha^0$ ,  $\beta^0$ ,  $\alpha^1$ ,  $\beta^1$  na fórmula (2.5.12) percebemos  $A=1$ ,  $B_x=B_y=0$ . Além disso vale

$$1 = e^{i\Phi}(e^{i\Phi})^* = (1 + C_{xy}\alpha\beta + \dots)(1 + C_{xy}^*\alpha\beta + \dots) \tag{2.5.14}$$

Comparando os termos da ordem  $\alpha\beta$  na fórmula (2.5.14) obtemos  $C_{xy} = -C_{xy}^*$ .

Então  $C_{xy}$  é puramente imaginário.

$$C_{xy} = ic_{xy} \quad \text{com} \quad c_{xy} \in \mathbb{R} \quad (2.5.15)$$

Comparando agora os termos de ordem  $\alpha\beta$  na fórmula (2.5.12) obtemos a seguinte relação entre  $\mathcal{J}_x$ ,  $\mathcal{J}_y$  e  $\mathcal{J}_z$ :

$$[\mathcal{J}_x, \mathcal{J}_y] = i\mathcal{J}_z - ic_{xy}\mathbf{1} \quad (2.5.16)$$

Se tivéssemos analisado o produto  $({}_{y,\beta}R)^{-1}({}_{x,\alpha}R)^{-1}({}_{y,\beta}R)({}_{x,\alpha}R)$  obviamente teríamos chegado na seguinte relação:

$$[\mathcal{J}_y, \mathcal{J}_x] = -i\mathcal{J}_z - ic_{yx}\mathbf{1} \quad (2.5.17)$$

com alguma outra constante  $c_{yx}$ . Mas com a anti-simetria do comutador se vê imediatamente que esta nova constante não é independente da primeira e que vale  $c_{yx} = -c_{xy}$ . Todo cálculo pode ser repetido com outros pares de eixos de rotação;  $\langle z, x \rangle$  e  $\langle y, z \rangle$ . Os resultados seriam análogos. Podemos escrever estes resultados numa única fórmula:

$$[\mathcal{J}_k, \mathcal{J}_l] = i\epsilon_{klm}\delta^{nm}\mathcal{J}_m - ic_{kl}\mathbf{1} \quad (2.5.18)$$

com

$$\epsilon_{klm} \stackrel{\text{def.}}{=} \begin{cases} 1 & \text{para } k, l, m \text{ permutação par de } 1, 2, 3 \\ -1 & \text{para } k, l, m \text{ permutação ímpar de } 1, 2, 3 \\ 0 & \text{com valores repetidos dos índices} \end{cases} \quad (2.5.19)$$

A matriz  $c_{kl}$  é anti-simétrica. Então podemos escreve-la na forma  $c_{kl} = a_m\delta^{mn}\epsilon_{klm}$

Com isto a fórmula (2.5.18) toma a seguinte forma:

$$[\mathcal{J}_k, \mathcal{J}_l] = i\epsilon_{klm}\delta^{nm}(\mathcal{J}_m - a_m\mathbf{1}) \quad (2.5.20)$$

Vimos nas considerações gerais sobre geradores que estes são definidos até uma constante aditiva. Podemos agora utilizar esta liberdade para obter uma relação de comutação mais simples. Vamos redefinir os geradores:

$$\tilde{\mathcal{J}}_m = \mathcal{J}_m - a_m\mathbf{1} \quad (2.5.21)$$

O termo  $-a_m\mathbf{1}$  não muda nada no comutador:  $[\tilde{\mathcal{J}}_k, \tilde{\mathcal{J}}_l] = [\mathcal{J}_k, \mathcal{J}_l]$ . Então os novos geradores cumprem a regra de comutação:

$$[\tilde{\mathcal{J}}_k, \tilde{\mathcal{J}}_l] = i\epsilon_{klm}\delta^{nm}\tilde{\mathcal{J}}_m \quad (2.5.22)$$

Claro que não vamos escrever pelo resto da vida “cobrinhas” nos momentos angulares. Poderíamos ter chamados os geradores originais de  $\tilde{\mathcal{J}}_m$  e os novos de  $\mathcal{J}_m$ . Fazendo isto a regra de comutação dos momentos angulares é

$$\boxed{[\mathcal{J}_k, \mathcal{J}_l] = i\epsilon_{klm}\delta^{nm}\mathcal{J}_m} \quad (2.5.23)$$

Se exigirmos que os geradores de rotações cumpram esta regra mais simples no lugar da (2.5.20) perdemos a liberdade de acrescentar uma constante nos geradores. Isto é o primeiro exemplo onde a estrutura do grupo de simetria permite eliminar a indefinição aditiva dos geradores.

Investigaremos agora os geradores de translações, ou seja os momentos lineares. Vamos escrever o operador unitário para uma translação infinitesimal  $\vec{\theta} = \hat{e}_k \theta^k$  como

$$\mathcal{J}_{\vec{\theta}} = \mathbf{1} - i \theta^k \mathcal{P}_k \quad (2.5.24)$$

Os  $\mathcal{P}_k$  são as componentes do momento linear. Como  $\theta^k$  toma valores no espaço-valor de distâncias espaciais  $V_d$ , os valores do observável representado por  $\mathcal{P}_k$  toma valores no espaço dual de  $V_d$ , ou seja estes valores são medidas com uma unidade  $m^{-1}$ .

Se fizermos primeiramente uma translação  $\vec{\theta}$  e depois uma  $\vec{\theta}'$  obtemos uma translação  $\vec{\theta} + \vec{\theta}'$ . A ordem inversa resulta na mesma translação então o grupo de translações é um grupo Abelian. Consequentemente o produto de operadores unitários  $(\mathcal{J}_{\vec{\theta}'})^{-1} (\mathcal{J}_{\vec{\theta}})^{-1} \mathcal{J}_{\vec{\theta}'} \mathcal{J}_{\vec{\theta}}$  deve ser um operador unitário que descreve a simetria identidade. Novamente não podemos concluir que este operador é simplesmente a identidade, mas ele deve ser da forma  $\mathbf{1} \exp\{i \Psi(\vec{\theta}, \vec{\theta}')\}$  com  $\Psi(\vec{\theta}, \vec{\theta}') \in \mathbb{R}$ :

$$(\mathbf{1} + i \theta'^l \mathcal{P}_l)(\mathbf{1} + i \theta^k \mathcal{P}_k)(\mathbf{1} - i \theta'^l \mathcal{P}_l)(\mathbf{1} - i \theta^k \mathcal{P}_k) = e^{i \Psi(\vec{\theta}, \vec{\theta}')} \mathbf{1} \quad (2.5.25)$$

Como no caso das rotações podemos expandir o fator de fase numa série de Taylor e comparar termos ordem por ordem. Os termos de ordem  $\theta'^l \theta^k$  resultam em

$$-[\mathcal{P}_l, \mathcal{P}_k] = i d_{lk} \mathbf{1} \quad (2.5.26)$$

onde os  $d_{lk}$  são reais  $d_{lk} \in V_d^* \otimes V_d^*$  e formam uma matriz anti-simétrica. Para poder dizer mais sobre esta matriz temos que enfrentar uma tarefa árdua. Temos que combinar translações com rotações.

Se aplicarmos primeiramente o inverso de uma rotação  $R$  nos aparatos do conjunto  $S$  os vetores posição  $\vec{r}_A, \vec{r}_B, \vec{r}_C$  das marcas no chassi sofrem a seguinte mudança:

$$\vec{r} \mapsto R^{-1} \vec{r} \quad (2.5.27)$$

Depois aplicamos uma translação  $\vec{\theta}$ :

$$R^{-1} \vec{r} \mapsto R^{-1} \vec{r} + \vec{\theta} \quad (2.5.28)$$

E finalmente a rotação  $R$ :

$$R^{-1} \vec{r} + \vec{\theta} \mapsto \vec{r} + R \vec{\theta} \quad (2.5.29)$$

O resultado líquido das três operações é uma translação com um vetor de translação rodado  $R \vec{\theta}$ . Vamos especialmente considerar o caso de uma rotação infinitesimal de ângulo  $\varphi$  em torno de um eixo  $\hat{u}$ . Tal rotação pode ser descrito pelo vetor  $\varphi = \varphi \hat{u}$ . Temos

$$R \vec{\theta} = \vec{\theta} + \vec{\varphi} \times \vec{\theta} \quad (2.5.30)$$

ou em componentes:

$$R^l_k \theta^k = \theta^l + \delta^{li} \in_{ijk} \varphi^j \theta^k \quad (2.5.31)$$

Vamos supor que  $\vec{\theta}$  seja também infinitesimal. Para os operadores que representam as simetria vale então

$$\left( \mathbf{1} - i \varphi^m \mathcal{J}_m \right) \left( \mathbf{1} - i \theta^k \mathcal{P}_k \right) \left( \mathbf{1} + i \varphi^m \mathcal{J}_m \right) = e^{i \Xi(\vec{\varphi}, \vec{\theta})} \left( \mathbf{1} - i \mathcal{P}_n \left( \theta^n + \delta^{na} \in_{amk} \varphi^m \theta^k \right) \right) \quad (2.5.32)$$

Expandindo o fator de fase numa série de Taylor e comparando termos ordem por ordem obtemos:

$$[\mathcal{J}_m, \mathcal{P}_k] = i \mathcal{P}_n \delta^{na} \in_{amk} - i M_{mk} \mathbf{1} \quad (2.5.33)$$

com valores  $M_{mk}$  reais;  $M_{mk} \in V_d^*$ . Esta vez não podemos concluir simplesmente que  $M_{mk}$  é anti-simétrico por causa da anti-simetria do comutador. Contrário do caso do momento angular, temos duas grandezas diferentes no comutador. Mas de fato,  $M_{mk}$  é anti-simétrico, mas a demonstração é mais complicada. Para mostrar a anti-simetria de  $M_{mk}$  vamos formar o comutador dos dois lados da fórmula (2.5.33) com o operador  $\mathcal{J}_l$  e vamos utilizar a identidade de Jakobi, a própria (2.5.33) e os comutadores dos  $\mathcal{J}$ 's :

$$\begin{aligned} i \delta^{na} \in_{lma} [\mathcal{J}_n, \mathcal{P}_k] + i \delta^{na} \in_{alk} [\mathcal{J}_m, \mathcal{P}_n] & \stackrel{(2.5.23)}{=} \stackrel{(2.5.33)}{=} \\ & = -[\mathcal{P}_k, [\mathcal{J}_l, \mathcal{J}_m]] - [\mathcal{J}_m, [\mathcal{P}_k, \mathcal{J}_l]] \stackrel{Jakobi}{=} \\ & = [\mathcal{J}_l, [\mathcal{J}_m, \mathcal{P}_k]] \stackrel{(2.5.33)}{=} i \delta^{na} \in_{amk} [\mathcal{J}_l, \mathcal{P}_n] \end{aligned} \quad (2.5.34)$$

Então temos

$$\delta^{na} \in_{amk} [\mathcal{J}_l, \mathcal{P}_n] = \delta^{na} \in_{lma} [\mathcal{J}_n, \mathcal{P}_k] + \delta^{na} \in_{alk} [\mathcal{J}_m, \mathcal{P}_n] \quad (2.5.35)$$

Cada termo tem os índices livres  $l, m, k$ . O termo no lado esquerdo da (2.5.35) é anti-simétrico nos índices  $m, k$ . Se trocarmos  $m$  e  $k$  e somarmos isto com a (2.5.35) original obtemos 0 no lado esquerdo.

$$\begin{aligned} 0 & = \delta^{na} \in_{lma} [\mathcal{J}_n, \mathcal{P}_k] + \delta^{na} \in_{alk} [\mathcal{J}_m, \mathcal{P}_n] + \delta^{na} \in_{lka} [\mathcal{J}_n, \mathcal{P}_m] + \delta^{na} \in_{alm} [\mathcal{J}_k, \mathcal{P}_n] \\ & = \delta^{na} \in_{lma} \{ [\mathcal{J}_n, \mathcal{P}_k] + [\mathcal{J}_k, \mathcal{P}_n] \} + \delta^{na} \in_{lka} \{ [\mathcal{J}_m, \mathcal{P}_n] + [\mathcal{J}_n, \mathcal{P}_m] \} \end{aligned} \quad (2.5.36)$$

A fórmula (2.5.36) vale para qualquer triplo de valores dos índices livres  $l, m, k$ . Vamos escolher

$$l = k+1 \bmod 3, \quad m = k+2 \bmod 3 \quad (2.5.37)$$

Neste caso temos

$$\in_{lma} = +1 \delta_{ak}, \quad \in_{lka} = -1 \delta_{ak+2} \quad (2.5.38)$$

onde abreviamos “+ mod3” por “+<sub>3</sub>” para manter as expressões razoavelmente pequenas. Com esta escolha a (2.5.36) significa

$$0 = [\mathcal{J}_k, \mathcal{P}_k] - \left[ \mathcal{J}_{k+2}, \mathcal{P}_{k+2} \right] \quad (2.5.39)$$

Esta fórmula vale para  $k = 1, 2, 3$ . Então podemos substituir  $k$  por  $k+2$

$$\left[ \mathcal{J}_{k+2}, \mathcal{P}_{k+2} \right] = \left[ \mathcal{J}_{k+4}, \mathcal{P}_{k+4} \right] = \left[ \mathcal{J}_{k+1}, \mathcal{P}_{k+1} \right] \quad (2.5.40)$$

Consequentemente a (2.5.36) implica em

$$[\mathcal{J}_1, \mathcal{P}_1] = [\mathcal{J}_2, \mathcal{P}_2] = [\mathcal{J}_3, \mathcal{P}_3] \equiv \mathcal{B} \quad (2.5.41)$$

Agora vamos usar a (2.5.36) outra vez e escolher  $l = k$  e  $m = k+1$ . Neste caso temos

$$\epsilon_{lma} = +1\delta_{ak+2}, \quad \epsilon_{lka} = 0 \quad (2.5.42)$$

e a fórmula (2.5.36) implica

$$0 = \left[ \mathcal{J}_{k+2}, \mathcal{P}_k \right] + \left[ \mathcal{J}_k, \mathcal{P}_{k+2} \right] \quad (2.5.43)$$

Como esta fórmula vale para tudo  $r$  a substituição de  $r$  por  $r+1$  e usando

$$\left( r+1 \right)_{+2} = r \text{ leva a}$$

$$0 = \left[ \mathcal{J}_{k+1}, \mathcal{P}_k \right] + \left[ \mathcal{J}_k, \mathcal{P}_{k+1} \right] \quad (2.5.44)$$

Então, por enquanto podemos concluir que

$$[\mathcal{J}_l, \mathcal{P}_k] = \mathcal{A}_{lk} + \mathcal{B}\delta_{lk} \quad (2.5.45)$$

onde  $\mathcal{A}_{lk}$  é uma matriz anti-simétrica de operadores. Agora vamos inserir este resultado na (2.5.35)

$$\begin{aligned} \delta^{na} \epsilon_{amk} (\mathcal{A}_{ln} + \mathcal{B}\delta_{ln}) &= \\ &= \delta^{na} \epsilon_{lma} (\mathcal{A}_{nk} + \mathcal{B}\delta_{nk}) + \delta^{na} \epsilon_{alk} (\mathcal{A}_{mn} + \mathcal{B}\delta_{mn}) \end{aligned} \quad (2.5.46)$$

e juntar os termos com  $\mathcal{A}$  num lado e os com  $\mathcal{B}$  no outro:

$$\begin{aligned} \delta^{na} \epsilon_{amk} \mathcal{A}_{ln} + \delta^{na} \epsilon_{lma} \mathcal{A}_{kn} + \delta^{na} \epsilon_{alk} \mathcal{A}_{nm} &= \\ &= \mathcal{B} \left\{ \cancel{\epsilon_{lmk}} + \cancel{\epsilon_{lmk}} + \epsilon_{mlk} \right\} \end{aligned} \quad (2.5.47)$$

Como  $\mathcal{A}_{lk}$  é anti-simétrica podemos escrever esta matriz na forma

$$\mathcal{A}_{lk} = \alpha_j \delta^{jb} \epsilon_{blk} \quad (2.5.48)$$

Com isto o lado esquerdo da (2.5.47) fica

$$\begin{aligned}
& \alpha_j \delta^{jb} \left\{ \delta^{na} \in_{amk} \in_{bln} + \delta^{na} \in_{lma} \in_{bkn} + \delta^{na} \in_{alk} \in_{bnm} \right\} = \\
& = \alpha_j \delta^{jb} \left\{ \left( \delta_{mb} \delta_{kl} - \delta_{ml} \delta_{kb} \right) + \left( \delta_{lb} \delta_{mk} - \delta_{lk} \delta_{mb} \right) + \left( \delta_{kb} \delta_{lm} - \delta_{km} \delta_{lb} \right) \right\} \quad (2.5.49) \\
& = 0
\end{aligned}$$

Então a fórmula (2.5.47) implica  $\mathcal{B} = 0$  e  $[\mathcal{J}_m, \mathcal{P}_k]$  é anti-simétrico nos índices  $m$  e  $k$ . Consequentemente a matriz  $M_{mk}$  da fórmula (2.5.33) é anti-simétrica e podemos escrever  $M_{mk} = p_n^0 \delta^{na} \in_{amk}$  e podemos redefinir os momentos lineares da mesma forma como redefinimos os momentos angulares para obtermos relações de comutação mais simples. Então mostramos que os momentos lineares podem ser escolhidos de tal forma que valha

$$[\mathcal{J}_m, \mathcal{P}_k] = i \mathcal{P}_n \delta^{na} \in_{amk} \quad (2.5.50)$$

A exigência que os  $\mathcal{P}_k$  obedeam a regra de comutação simples (2.5.50) e não a complicada (2.5.33) remove a liberdade de somar constantes nos  $\mathcal{P}_k$ .

A última tarefa nesta secção é mostrar que o lado direito da fórmula (2.5.26) é simplesmente zero. Para mostrar isto, vamos utilizar a fórmula (2.5.50). Esta demonstração será facilitada por uma interpretação geométrica da fórmula (2.5.50).

Quando submetemos um aparato de medida a uma rotação os vetores posição  $\vec{r}_A$ ,  $\vec{r}_B$ ,  $\vec{r}_C$  das marcas no chassi sofrem a mudança

$$\vec{r}_{ABC} \mapsto R \vec{r}_{ABC} \quad (2.5.51)$$

Para as componentes da base  $\langle \hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3 \rangle$  esta mudança significa

$$r_{ABC}^l \mapsto r'_{ABC}{}^l = R^l{}_k r_{ABC}^k \quad (2.5.52)$$

Especialmente para rotações infinitesimais com vetor de rotação  $\vec{\varphi} = \hat{e}_i \varphi^i$  temos

$$r'_{ABC}{}^l = r_{ABC}^k + \delta^{li} \in_{ijk} \varphi^j r_{ABC}^k \quad (2.5.53)$$

Então a variação infinitesimal  $\delta r_{ABC}^l \equiv r'_{ABC}{}^l - r_{ABC}^l$  é

$$\delta r_{ABC}^l = \left( \delta^{li} \in_{ijk} \varphi^j \right) r_{ABC}^k \quad (2.5.54)$$

Existem aparatos que medem grandezas vetoriais. Estes formam três valores que são as componentes de um vetor. Um exemplo é a posição de uma partícula. Não sabemos ainda o que é uma partícula quântica e muito menos o que é a posição de uma partícula quântica. Mas para entender os conceitos de simetria podemos usar uma partícula clássica, como por exemplo, uma bola de bilhar. Imagine uma bola de bilhar na mesa. O medidor de posição (em duas dimensões) pode ser uma tábua com papel milimetrado na face inferior da tábua e um papel carbono. Pressionando a tábua contra a bola com o papel carbono no meio criamos uma marca no papel milimetrado. A marca determina com projeção ortogonal dois valores nas escalas dos eixos da área quadriculada. Estes



valores seriam as componentes do vetor posição  $\vec{r}_p$  da partícula.

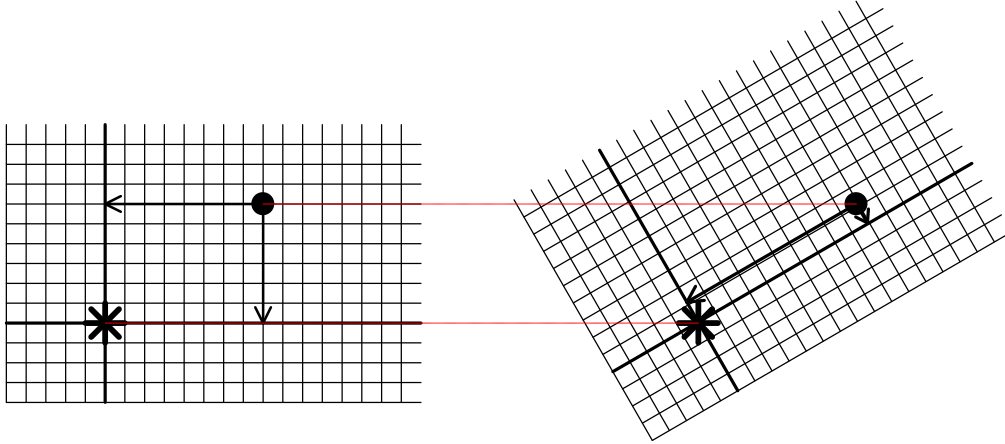


Fig. 2.5.1 Mudança das medidas de posição de uma partícula clássica numa rotação do medidor.

O que acontece com estes valores  $r_p^l$  se submetermos o aparato de medida a uma rotação  $R$ ? Estes valores sofrem a seguinte mudança:

$$r_p^l \mapsto r_p'^l = (R^{-1})^l_k r_p^k \quad (2.5.55)$$

ou para uma rotação infinitesimal

$$\delta r_p^l = -(\delta^{li} \epsilon_{ijk} \varphi^j) r_p^k \quad (2.5.56)$$

O contrário da mudança dos vetores  $\vec{r}_A$ ,  $\vec{r}_B$ ,  $\vec{r}_C$  das marcas no chassi do aparelho! Experimente!

Podemos descrever o posicionamento de um aparato de medida também com três vetores duais  $\bar{a}$ ,  $\bar{b}$ ,  $\bar{c}$  ao invés de vetores posição  $\vec{r}_A$ ,  $\vec{r}_B$ ,  $\vec{r}_C$ . Um vetor dual  $\bar{a}$  é um mapeamento linear do espaço vetorial associado ao espaço do laboratório para o conjunto dos números reais;  $\bar{a}(\vec{r}) \in \mathbb{R}$  com  $\bar{a}(\alpha \vec{r}_1 + \beta \vec{r}_2) = \alpha \bar{a}(\vec{r}_1) + \beta \bar{a}(\vec{r}_2)$ .

Podemos visualizar um vetor dual  $\bar{a}$  pelo conjunto de vetores posição que cumprem a equação  $\bar{a}(\vec{r}) = 1$ . Este é um plano fora da origem de coordenadas. As figuras 2.5.2 e

2.5.3 mostram a soma e a multiplicação com números de vetores duais com esta visualização.

Fig. 2.5.2 Soma de dois vetores duais  $\bar{q}$  e  $\bar{w}$ . A estrela simboliza a origem de coordenadas.

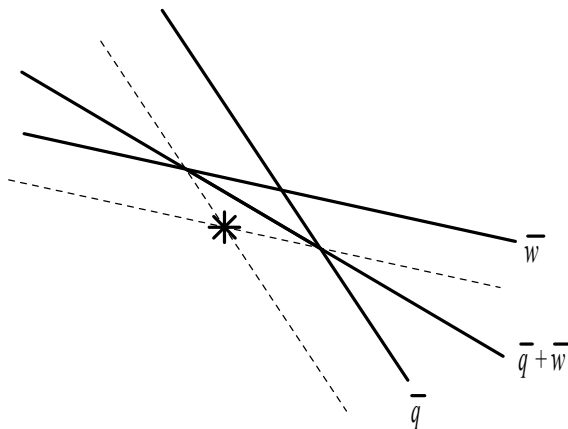
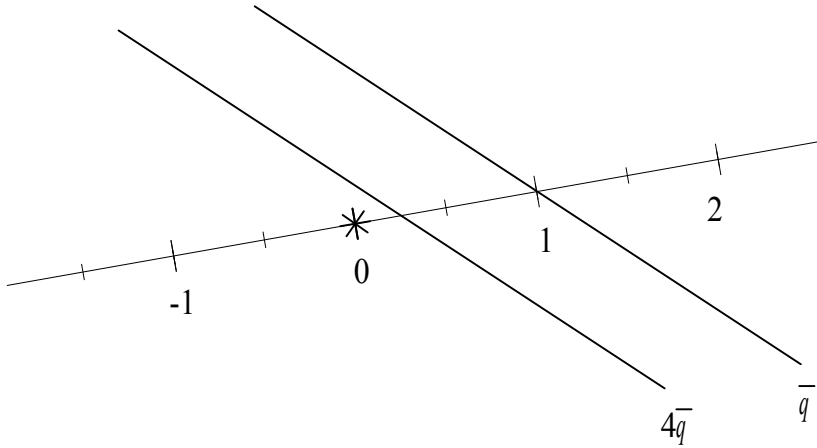


Fig. 2.5.3

Multiplicação de um  
vetor dual  $\bar{q}$  por 4.



Para descrever o posicionamento de um aparato de medida através de vetores duais escolhemos três planos no corpo do aparato que não contenham a origem de coordenadas. Os três planos definem três vetores duais  $\bar{a}$ ,  $\bar{b}$ ,  $\bar{c}$  tais que  $\bar{a}(\vec{r})=1$  para  $\vec{r}$  no primeiro plano,  $\bar{b}(\vec{r})=1$  para  $\vec{r}$  no segundo plano e  $\bar{c}(\vec{r})=1$  para  $\vec{r}$  no terceiro. Geralmente o chassi de um aparato contém naturalmente planos que podem ser usados para esta caracterização. O que acontece com estes vetores duais  $\bar{a}$ ,  $\bar{b}$ ,  $\bar{c}$  quando submetemos o aparato a uma rotação  $R$ ? Para descrever esta mudança é bom escrever os vetores duais também numa base. É prático usar uma base do espaço dual que se relacione com a base escolhida no espaço comum da seguinte forma:

$$\bar{e}^l(\hat{e}_k) = \delta_k^l \quad (2.5.57)$$

Vamos escrever  $\bar{a}$ ,  $\bar{b}$ ,  $\bar{c}$  nesta base:

$$\bar{a} = a_l \bar{e}^l \quad (2.5.58)$$

e vamos escrever o vetor dual rodado como

$$\bar{a}' = a_l \bar{R}^l_k \bar{e}^k \quad (2.5.59)$$

Como se relacionam  $\bar{R}^l_k$  e  $R^l_k$  de uma dada rotação? O número  $\bar{a}(\vec{r})$  depende somente do relacionamento geométrico do vetor  $\vec{r}$  e do plano  $\bar{a}$ . Se rodarmos ambos, este número deve ficar inalterado. Então temos

$$a_l r^l = \bar{a}(\vec{r}) = \bar{a}'(\vec{r}') = a_l \bar{R}^l_k R^k_j r^j \quad (2.5.60)$$

Isto deve valer para todo  $\vec{r}$  e  $\bar{a}$  e conseqüentemente vale

$$\bar{R}^l_k R^k_j = \delta_j^l \quad (2.5.61)$$

Então podemos escrever a mudança infinitesimal que os vetores duais  $\bar{a}$ ,  $\bar{b}$ ,  $\bar{c}$  de posicionamento do aparato sofrem numa rotação infinitesimal  $\bar{\phi}$ :

$$\delta a_k = -a_n \delta^{na} \epsilon_{ajk} \phi^j \quad (2.5.62)$$

Além de observáveis que definem vetores existem também observáveis que definem vetores duais. Tendo em vista como as alterações dos componentes dos vetores marcantes  $\vec{r}_A$ ,  $\vec{r}_B$ ,  $\vec{r}_C$  diferem das alterações dos componentes de uma grandeza vetorial ( fórmulas (2.5.54) e (2.5.56) ) podemos esperar que os três valores  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $p_3$  das componentes de algum observável vetor dual  $\bar{p}$  devem sofrer numa rotação infinitesimal  $\bar{\varphi}$  do aparato de medida a seguinte alteração

$$\delta p_k = + p_n \delta^{na} \epsilon_{ajk} \varphi^j \quad (2.5.63)$$

Vamos comparar esta lei de alteração numa rotação com o comportamento dos momentos lineares numa rotação. Com a fórmula (2.3.10) e com (2.5.50) obtemos

$$\delta \mathcal{P}_k = -i \varphi^j [\mathcal{J}_j, \mathcal{P}_k] = \mathcal{P}_n \delta^{na} \epsilon_{ajk} \varphi^j \quad (2.5.64)$$

Isto é exatamente a lei de alteração das componentes de um vetor dual. O momento linear é um vetor dual. Mais tarde veremos que os auto-estados do momento linear podem ser interpretados como ondas harmônicas planas. Se botarmos a origem numa frente de onda a próxima frente forma junto com a origem um vetor dual.

Agora estamos finalmente em condições de voltar à regra de comutação dos  $\mathcal{P}$ s (fórmula (2.5.26)):

$$[\mathcal{P}_l, \mathcal{P}_k] = -i d_{lk} \mathbf{1} \quad (2.5.26)$$

Vamos multiplicar esta equação pela esquerda com o operador  $\mathcal{R}$  que representa uma rotação e pela direita com  $\mathcal{R}^{-1}$

$$\begin{aligned} &= \mathcal{R}[\mathcal{P}_l, \mathcal{P}_k] \mathcal{R}^{-1} = -i d_{lk} \mathcal{R} \mathbf{1} \mathcal{R}^{-1} = -i d_{lk} \mathbf{1} \\ &= \mathcal{R}(\mathcal{P}_l \mathcal{R}^{-1} \mathcal{R} \mathcal{P}_k - \mathcal{P}_k \mathcal{R}^{-1} \mathcal{R} \mathcal{P}_l) \mathcal{R}^{-1} = [\mathcal{P}_i, \mathcal{P}_j] \bar{R}^i_l \bar{R}^j_k = \\ &= -i d_{ij} \mathbf{1} \bar{R}^i_l \bar{R}^j_k \end{aligned} \quad (2.5.65)$$

Então, por um lado os elementos da matriz  $(d_{lk})$  se comportam numa rotação como componentes de um tensor covariante (uma soma de bi-vetores duais) e por outro lado eles são invariantes. Sabemos que em três dimensões os únicos tensores covariantes com dois índices que não se alteram com rotações são os múltiplos da métrica. Então devemos concluir que  $d_{lk} = d \delta_{lk}$ . Mas como  $d_{lk}$  é anti-simétrico segue  $d = 0$ .

Vamos resumir os resultados desta longa secção: encontramos as regras de comutação dos geradores de rotações e translações:

$$\begin{aligned} [\mathcal{J}_k, \mathcal{J}_l] &= i \epsilon_{klm} \delta^{nm} \mathcal{J}_m \\ [\mathcal{J}_m, \mathcal{P}_k] &= i \mathcal{P}_n \delta^{na} \epsilon_{amk} \\ [\mathcal{P}_l, \mathcal{P}_k] &= 0 \end{aligned}$$

$$(2.5.66)$$