2.1 A primeira lei da física quântica e o problema de representação

Teorias físicas são em geral formuladas com poucas leis básicas. Podemos resumir a parte mais importante do que aprendemos até agora na seguinte "primeira lei":

> Para um dado sistema quântico existe uma representação que representa os observáveis $\widehat{\mathscr{A}}$ por operadores essencialmente auto-adjuntos[1] $\mathscr{A}$ em um espaço de Hilbert complexo separável e os estados $\widehat{\rho}$ por operadores ρ positivos classe traço de traço 1 de modo que os valores médios obtidos com ensembles de medidas sejam dados por $Tr\left(\mathscr{A}\rho\right)$.

Um observável não é um operador! Devemos pensar num observável como um processo físico real de medidas ou uma classe de processos que ocorrem em laboratórios ou, pelo menos em princípio, possam ser realizados em laboratórios. Quanto aos estados, eles devem ser encarados como preparações físicas reais. Os valores médios com ensembles de medidas são valores escritos num caderno de laboratório.

A primeira lei diz que podemos mapear o conjunto de observáveis no conjunto de operadores auto-adjuntos e conjunto dos estados no conjunto de operadores positivos classe traço com traço 1 de tal forma que os valores anotados nos cadernos de laboratório coincidam com os valores calculados $Tr\left(\mathscr{A}\rho\right)$ no gabinete do teórico. Ocasionalmente vamos escrever uma representação formalmente como um mapeamento; $\mathscr{A} = REP\left(\widehat{\mathscr{A}}\right)$ e $\rho = REP\left(\widehat{\rho}\right)$. Com esta notação podemos escrever a condição de representação na forma

$$\overline{\widehat{\mathscr{A}}_{\widehat{\rho}}} = Tr\left(REP\left(\widehat{\mathscr{A}}\right)REP\left(\widehat{\rho}\right)\right) \tag{2.1.1}$$

Esta primeira lei é extremamente geral. Ela parece ser aplicável a qualquer subsistema do universo. Se ela é aplicável ao próprio universo é, no entanto, uma questão aberta. Por outro lado, ela não é muito específica - ela não diz como é a representação e afirma somente a existência da mesma. Em relação a estas duas características ela nos lembra a primeira e segunda lei da termodinâmica, onde aprendemos sobre a existência de funções de estado U e S com certas propriedades gerais e nenhuma indicação específica de como U e S dependem da temperatura ou do volume. A dependência específica de U e S das variáveis termodinâmicas só pode ser obtida individualmente para cada sistema. Na mecânica quântica temos a mesma situação: Para construir a representação temos que especificar o sistema. A construção da representação é, em geral, uma tarefa complicada. Ela inclui a solução da dinâmica do sistema e podemos dizer que ela contém toda a física interessante do problema.

Nesta secção não solucionaremos nenhum problema de representação, mas pensaremos um alguns aspectos gerais:

A primeira lei nos fala da existência de uma representação. Será que esta representação é única?

Suponhamos que tenhamos uma representação válida que representa os observáveis $\widehat{\mathscr{A}}$ de uma dado sistema por operadores auto-adjuntos $\mathscr{A}$ num espaço de Hilbert H e os

[1] Aqui admitimos também produtos tensoriais com espaços-valor como explicado na secção 1.4.

estados $\widehat{\rho}$ por operadores positivos ρ com $Tr(\rho)=1$ neste mesmo espaço de tal forma que todos os valores médios coincidam com os valores esperados $Tr(\mathscr{A}\rho)$.

$$\begin{aligned}
&\widehat{\mathscr{A}} \mapsto \mathscr{A} \\
&\widehat{\rho} \mapsto \rho \\
&\forall \mathscr{A}, \widehat{\rho}: \ \overline{\widehat{\mathscr{A}}}_{\widehat{\rho}} = Tr(\mathscr{A}\rho)
\end{aligned} \tag{2.1.2}$$

Seja H' um espaço de Hilbert com a mesma dimensão de H. Podemos ter também $H'=H$. Seja $\mathcal{U}: H \to H'$ uma bijeção linear que conserva o produto escalar. Se a representação (2.1.2) era válida então a seguinte representação

$$\begin{aligned}
\mathscr{A} \mapsto \mathscr{A}' &= \mathcal{U}\mathscr{A}\mathcal{U}^{-1} \\
\widehat{\rho} \mapsto \rho' &= \mathcal{U}\rho\mathcal{U}^{-1}
\end{aligned} \tag{2.1.3}$$

também é válida porque com as propriedades da operação traço sabemos que $Tr(\mathscr{A}'\rho') = Tr(\mathcal{U}\mathscr{A}\mathcal{U}^{-1}\mathcal{U}\rho\mathcal{U}^{-1}) = Tr(\mathscr{A}\rho)$. Então os valores esperados são os mesmos. Logo a solução do problema de representação não é única. Podemos sempre trocar uma representação por uma unitariamente equivalente. De fato, podemos fazer mais do que isto. $\mathcal{U}$ pode também ser anti-unitário. Anti-unitário significa

$$\begin{aligned}
&\forall(\alpha, \beta \in H): & \mathcal{U}(\alpha+\beta) &= \mathcal{U}\alpha + \mathcal{U}\beta \\
&\forall(\alpha \in H)\forall(c \in \mathbb{C}): & \mathcal{U}(\alpha c) &= (\mathcal{U}\alpha)c^* \\
&\forall(\alpha, \beta \in H): & (\alpha, \beta) &= (\mathcal{U}\beta, \mathcal{U}\alpha)
\end{aligned} \tag{2.1.4}$$

Numa conjugação com um operador anti-unitário os traço sofrem uma conjugação complexa: $Tr(\mathscr{A}'\rho') = Tr(\mathcal{U}\mathscr{A}\mathcal{U}^{-1}\mathcal{U}\rho\mathcal{U}^{-1}) = [Tr(\mathscr{A}\rho)]^*$. Mas, se concordamos de usar somente valores reais como rótulos das perguntas, esta conjugação complexa não muda nada.

Então de qualquer solução válida do problema de representação pode-se obter outra representação válida por uma conjugação unitária ou anti-unitária.