UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA - *CAMPUS* Governador Valadares
ECONOMETRIA ESPACIAL
Prof. Vinícius de Azevedo Couto Firme

Econometria Espacial:

Capítulo 5 – Modelando a Dependência Espacial

Estrutura da Apresentação:

1. Introdução
2. Modelos de Dependência Espacial de Alcance Global
3. Modelos de Dependência Espacial de Alcance Local
4. Modelos de Dependência Espacial de Alcance Global e Local
5. Modelos de Dependência Espacial Geral (*General Spatial Model - GSM*)

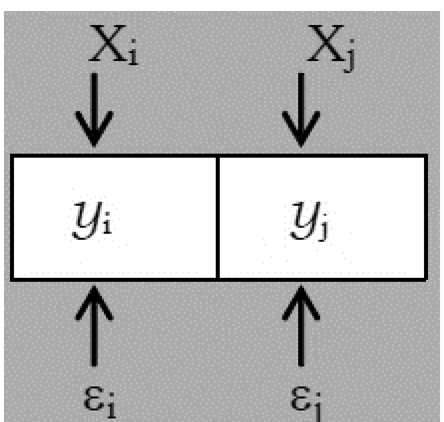
1. Introdução

- A dependência espacial pode ter alcance global (efeito se alastra para todas as regiões) ou local (efeito fica restrito às regiões mais próximas) e é captada nos modelos econométrico-espaciais por meio do uso das defasagens espaciais associadas à variável dependente (Wy), às variáveis independentes (WX) e ao termo de erro ($W\xi, W\varepsilon$).

- Considere o seguinte modelo a-espacial (onde: $k =$ nº. variáveis; $n =$ nº. observações):

$$y_{nx1} = X_{nxk}\beta_{kx1} + \varepsilon_{nx1}, \qquad \text{onde: } \varepsilon \sim Normal\ (0, \sigma^2 I_n) \qquad (1)$$

- O Modelo especificado pela Eq. 1 apresenta a seguinte interação:



Nota 1: i e j são vizinhos contíguos e não apresentam nenhum tipo de interação espacial.

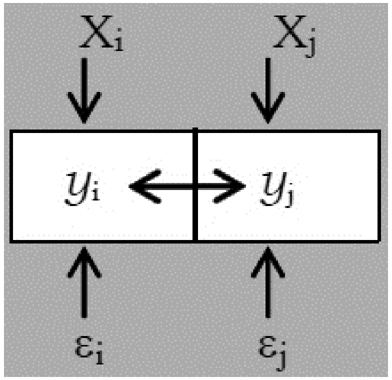
Nota 2: Este capítulo se baseou em dados *cross-section* (Painel – Cap. 14) num contexto de Equação única (Equações Simultâneas – Cap. 9).

2. Modelos de Dependência Espacial de Alcance Global

- O efeito espacial desta classe de modelos apresenta transbordamento global. Logo, um efeito gerado em y_i se refletirá em todas as outras localidades por meio do multiplicador espacial com alcance global (matriz *var-cov* plena).

2.1 O modelo de Defasagem Espacial (*Spatial Auto-Regressive* – SAR)

- Suponha o seguinte tipo de interação:



Nota: Neste caso, a variável dependente de i e j apresentam interação espacial.

Exemplo: Inovações realizadas em i, no período t-1, são difundidas (imitadas) em j, no período t, e vice-versa.

- Neste caso, o efeito espacial (versão pura: sem $X\beta$) pode ser mensurado da seguinte forma:

$$y = \rho W y + \varepsilon \tag{2}$$

2. Modelos de Dependência Espacial de Alcance Global

- Onde: $W_{nxn}y_{nx1}$ é um vetor nx1 contendo as defasagens espaciais associadas à variável dependente dos n indivíduos (efeito vizinhança); ρ é o coeficiente associado à defasagem ($-1 < \rho < 1$).

- Assume-se que há ACS(+) se $\rho > 0$ e ACS(-) se $\rho < 0$. Um $\rho \cong 0$ será não significativo, indicando a não existência de ACS (+) ou (-).

Nota: O modelo SAR apresenta problema de endogeneidade devido à simultaneidade entre y e $\mathrm{W}y$ (Solução: Cap. 6).

- Assumindo que a equação (2) também dependa de outras variáveis explicativas (X), tem-se o Modelo SAR misto (forma Estrutural):

$$y = \rho W y + X\beta + \varepsilon \tag{3}$$

2. Modelos de Dependência Espacial de Alcance Global

- É possível mostrar que a forma reduzida da Equação 3 é:

$$y = (I_n - \rho W)^{-1} X\beta + (I_n - \rho W)^{-1} \varepsilon \quad (4)$$

Nota 1: A forma reduzida, diferentemente da estrutural, não deve apresentar variáveis endógenas do lado direito.

Nota 2: Como ρ é um coeficiente e I_n é uma matriz identidade, a restrição para inverter a expressão $(I_n - \rho W)^{-1}$ envolve garantir que o somatório das linhas e colunas de W não seja infinito (a matriz normalizada nas linhas garante isso).

Nota 3: $|\rho| < 1$ garante que o efeito espacial causado por $(I_n - \rho W)^{-1}$ será amortecido com a diminuição do grau de conectividade (não é explosivo!).

Nota 4: $\rho = 1 \rightarrow$ presença de raiz unitária (o choque não é amortecido – cap. 15).

Nota 5: O termo $(I_n - \rho W)^{-1}$ acompanhando $X\beta$ e ε implica que desconsiderar o efeito espacial ($\rho W y$) geraria viés e heterocedasticidade, respectivamente.

2. Modelos de Dependência Espacial de Alcance Global

- A rigor, a Equação 3 deveria ser especificada da seguinte forma :

$$y_t = \rho W y_{t-1} + X\beta + \varepsilon_t \tag{5}$$

Nota: Difusão tecnológica via imitação não ocorre no mesmo período.

Contudo, é possível mostrar que (assumindo $X_t \cong X_{t-n}$; LESAGE, 2008):

$$y_{t-1} = \rho W y_{t-2} + X\beta + \varepsilon_{t-1} \tag{6}$$

$$y_{t-2} = \rho W y_{t-3} + X\beta + \varepsilon_{t-2} \tag{7}$$

$$(\vdots)$$

Substituindo (6) em (5): $y_t = \rho W(\rho W y_{t-2} + X\beta + \varepsilon_{t-1}) + X\beta + \varepsilon_t$ (8)

Rearranjando: $y_t = (\rho W)^2 y_{t-2} + X\beta + \rho W X\beta + \varepsilon_t + \rho W \varepsilon_{t-1}$ (9)

Substituindo (7) em (9): $y_t = (\rho W)^2(\rho W y_{t-3} + X\beta + \varepsilon_{t-2}) + X\beta + \rho W X\beta + \varepsilon_t + \rho W \varepsilon_{t-1}$ (10)

Rearranjando: $y_t = (\rho W)^3 y_{t-3} + X\beta + \rho W X\beta + (\rho W)^2 X\beta + \varepsilon_t + \rho W \varepsilon_{t-1} + (\rho W)^2 \varepsilon_{t-2}$ (11)

Reagrupando: $y_t = (\rho W)^3 y_{t-3} + X\beta[1 + \rho W + (\rho W)^2] + [\varepsilon_t + \rho W \varepsilon_{t-1} + (\rho W)^2 \varepsilon_{t-2}]$ (12)

Como: $E(\varepsilon_t) = E(\varepsilon_{t-1}) = E(\varepsilon_{t-n}) = 0$ e $(\rho W)^{n \to \infty} \cong 0$, tem-se que:

$$y_t = X\beta[1 + \rho W + (\rho W)^2 \ldots (\rho W)^{n-1}] \tag{13}$$

2. Modelos de Dependência Espacial de Alcance Global

Jogando $X\beta$ pra esquerda, tem-se: $\frac{y_t}{X\beta} = 1 + \rho W + (\rho W)^2 \dots + (\rho W)^{n-2} + (\rho W)^{n-1}$ (14)

Jogando 1 pra esquerda e evidenciando ρW: $\frac{y_t}{X\beta} - 1 = \rho W[1 + \rho W + (\rho W)^2 \dots (\rho W)^{n-2}]$ (15)

Como $(\rho W)^{n \to \infty} \cong 0$, é possível substituir (14) no lado direito de (15):

$$\frac{y_t}{X\beta} - 1 = \rho W \left[\frac{y_t}{X\beta}\right] \rightarrow \frac{X\beta}{y_t}\left(\frac{y_t}{X\beta} - 1\right) = \rho W \rightarrow 1 - \frac{X\beta}{y_t} = \rho W \rightarrow \frac{X\beta}{y_t} = (1 - \rho W) \qquad (16)$$

Colocando em função de y_t (e usando forma matricial), é possível mostrar que:

$$y_t = (I - \rho W)^{-1} X\beta \qquad (17)$$

Portanto, com base nas Equações (13) e (17), tem-se que:

$$(I - \rho W)^{-1} = \mathrm{I} + \rho W + (\rho W)^2 \dots (\rho W)^{n-1} \qquad (18)$$

2. Modelos de Dependência Espacial de Alcance Global

- Conclusões:

a) A Eq. 17 mostra que o efeito causado em y_t pode ser mensurado sem a presença explícita de y_{t-1} (comparar equações 3 e 5).

b) A Eq. 17 mostra o equilíbrio de longo prazo causado pela interação espacial entre diferentes localidades. Implicitamente, mensura-se o efeito de todas as interações passadas (t-1, ... t-n) afetando o presente (t).

c) A Eq. 18 mostra que a expressão $(I - \rho W)^{-1}$ capta o efeito total causado pela vizinhança de uma determinada região i (multiplicador espacial).

d) A Eq. 18 mostra que o efeito total em i depende de seus vizinhos diretos (ρW), dos vizinhos de seus vizinhos $[(\rho W)^2]$ e assim por diante (efeito global).

e) Como $(\rho W)^{n \to \infty} \cong 0$, o efeito vizinhança diminui à medida que a distância aumenta.

2. Modelos de Dependência Espacial de Alcance Global

A Interpretação dos coeficientes espaciais:

- No EMQO de um modelo a-espacial (Eq. 1), o coeficiente (β_k) associado a uma variável explicativa (X_k) é obtido pela seguinte derivada parcial:

$\beta_k = \frac{\partial y_i}{\partial X_{ik}}$, onde i representa uma região específica (19)

- Neste caso, não há transbordamentos, só efeitos diretos $\left[(\partial y_i/\partial X_{jk}) = 0\right]$.

- Contudo, o transbordamento espacial gera impactos diretos e indiretos. No modelo SAR da Eq. 3, tem-se que y_t é definido conforme a Eq. 17. Neste caso, a derivada parcial em relação à X_k fica:

$$\frac{\partial y_i}{\partial X_{ik}} = (I_n - \rho W)^{-1} I_n \beta_k = [I_n + \rho W + (\rho W)^2 \ldots (\rho W)^{n-1}] I_n \beta_k \qquad (20)$$

- A Eq. 20 mostra que X_{ik} causa efeitos diretos (I_n) e indiretos, gerados pelos vizinhos de i $[\rho W + (\rho W)^2 \ldots (\rho W)^{n-1}]$, sobre y_i.

2. Modelos de Dependência Espacial de Alcance Global

- Isto ocorre porque $\left[(\partial y_i/\partial X_{jk}) \neq 0\right]$. Logo, uma ΔX_k, na região j, afeta y na região i (y_i).

- Embora costume ser ignorada, a análise dos efeitos diretos e indiretos do modelo SAR envolve as seguintes derivadas parciais (LESAGE e PACE, 2009):

$$\frac{\partial y}{\partial X_k} = (I_n - \rho W)^{-1} I_n \beta_k = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_N}{\partial X_{Nk}} & \frac{\partial y_N}{\partial X_{Sk}} \\ \frac{\partial y_S}{\partial X_{Nk}} & \frac{\partial y_S}{\partial X_{Sk}} \end{bmatrix}, \text{ onde } i \text{ pode ser Sul (S) ou Norte (N)} \qquad (21)$$

- Deste modo, o efeito direto (ED) de X_k em y é a média da diagonal principal da matriz (21) e o indireto (EI) é a média dos somatórios, nas linhas ou nas colunas (tanto faz), dos elementos de fora da diagonal principal.

- Por fim, o efeito total (ET) de X_k será: $$EMT = EMD + EMI \qquad (22)$$

"…direct effects are calculated as the mean of the main diagonal elements of the nxn matrices, while indirect effects correspond to the mean of the sum of the off-diagonal elements from each row of the nxn matrices." (FISCHER e NIJKAMP, 2013, p.365).

2. Modelos de Dependência Espacial de Alcance Global

Problemas causados pela inobservância de $\rho W y$, quando esta é relevante:

- Imagine que o verdadeiro MGD é: $y = \rho W y + X\beta + \varepsilon$ (23)
- Logo, caso opte-se por uma modelo a-espacial, do tipo: $y = X\beta + \varepsilon$ (24)
- EMQO para β será: $\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'y$ (25)

Nota: Substituindo (24) em (25) e assumindo que $\mathrm{E}(\varepsilon) = 0$, tem-se que: $\hat{\beta} = \beta$.

- Contudo, o estimador (25) aplicado a um MGD do tipo (23) gerará viés. Pois:

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'[\rho W y + X\beta + \varepsilon] = \rho(X'X)^{-1}X'Wy + (X'X)^{-1}X'X\beta + (X'X)^{-1}X'\varepsilon \quad (26)$$

Assumindo que $\mathrm{E}(\varepsilon) = 0$, tem-se que: $\mathrm{E}(\hat{\beta}) = \beta + \rho(X'X)^{-1}E(X'Wy)$ (27)

- Só não há viés por <u>omissão de variável relevante</u> se: 1) $\rho = 0$; 2) $E(X'Wy) = 0$.

<u>Nota</u>: $E(X'Wy) = 0$ seria um modelo a-espacial, sem transbordamento: $(\partial y_i / \partial X_{jk}) = 0$ (ver Eq. 19).

2. Modelos de Dependência Espacial de Alcance Global

- Como o resíduo do SAR misto (ε) contém o termo $(I_n - \rho W)^{-1}$ (ver Eq. 4), o cálculo da variância será:

$$E(\varepsilon'\varepsilon) = \sigma^2[(I_n - \rho W)'(I_n - \rho W)]^{-1} \qquad (28)$$

- Note que a expressão (28) produzirá variância distinta do que se espera de um termo de erro bem comportado, $\varepsilon \sim Normal\ (0, \sigma^2 I_n)$.

- Neste caso, a não observância da ACS (quando esta é relevante) produzirá resíduos heterocedásticos e não independentes.

<u>EXERCÍCIO</u>:

Calcular matriz $\frac{\partial y_i}{\partial X_{ik}}$ (Eq. 21), ET, EI e ED (Eq. 22) e $E(\varepsilon'\varepsilon)$ (Eq. 28), com:

$$\beta_k = 0.2;\ \rho = 0.3;\ \sigma_\varepsilon = 0.8;\ W = \begin{vmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

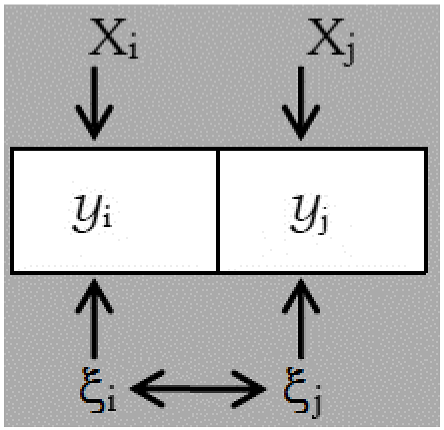
R.: $\frac{\partial y_i}{\partial X_{ik}} = \begin{vmatrix} 0.220 & 0.033 & 0.033 \\ 0.066 & 0.210 & 0.010 \\ 0.066 & 0.010 & 0.210 \end{vmatrix}; ED = 0.213; EI = 0.073; ET = 0.286; E(\varepsilon'\varepsilon) = \begin{vmatrix} 0.808 & 0.348 & 0.348 \\ 0.348 & 0.776 & 0.136 \\ 0.348 & 0.136 & 0.776 \end{vmatrix}$

Dica: note que $ED \cong \beta_k$ e $ET \cong \left[\frac{1}{1-\rho}\right] \beta_k$.

2. Modelos de Dependência Espacial de Alcance Global

2.2 O modelo de Erro Espacial (*Spatial Error Model* – SEM)

- Suponha o seguinte tipo de interação auto-regressiva espacial:



Nota: Neste caso, o erro de i e j apresentam interação espacial.

Exemplo: Praga Agrícola iniciada em i, no período t-1, se espalha para j, no período t, e vice-versa.

- Neste caso, a praga agrícola não está relacionada com X_i (ex: Insumos de produção: capital, trabalho e área plantada) mas afeta y_i (produção agrícola).

- Este tipo de efeito espacial pode ser mensurado como se segue:

$y = X\beta + \xi$ onde $\xi = \lambda W\xi + \varepsilon$ (29)

2. Modelos de Dependência Espacial de Alcance Global

- Colocando ξ em evidência, é possível calcular a forma reduzida da Eq. 29:

$$y = X\beta + (I_n - \lambda W)^{-1}\varepsilon \tag{30}$$

Nota 1: A restrição para inverter a expressão $(I_n - \lambda W)^{-1}$ envolve garantir que $\sum_i \sum_j W < \infty$ (a matriz normalizada nas linhas garante isso).

Nota 2: $|\lambda| < 1$ garante que o efeito espacial será não é explosivo.

Nota 3: O termo $(I_n - \lambda W)^{-1}$, junto ao ε, implica que desconsiderar este efeito espacial, quando ele for relevante, geraria ineficiência (devido à heterocedasticidade e dependência espacial), mas não viés.

- Analogamente à Eq. 18, é possível mostrar que:

$$(I - \lambda W)^{-1} = \mathrm{I} + \lambda W + (\lambda W)^2 \ldots (\lambda W)^{n-1} \tag{31}$$

- Logo, $(I - \lambda W)^{-1}$ representa um multiplicador espacial com alcance global (característica comum aos modelos SAR e SEM).

2. Modelos de Dependência Espacial de Alcance Global

- Em síntese, um choque em "i" afeta seus vizinhos e os vizinhos dos vizinhos e assim por diante. Eventualmente, ele volta a afetar "i" com efeito amortecido. O efeito total envolve o choque inicial em "i" mais o efeito re-alimentador proveniente das outras regiões (vizinhas) afetadas pelo choque inicial.

- Como o modelo SEM implica multiplicar o termo $(I_n - \lambda W)^{-1}$ aos resíduos, ε (ver Eq. 30), o cálculo da variância será (**nota**: matriz plena, diferente de $\sigma^2 I_n$):

$$E(\xi'\xi) = \sigma^2[(I_n - \lambda W)'(I_n - \lambda W)]^{-1} \quad (32)$$

Nota: Lembrar que: a) $\xi = (I - \lambda W)^{-1}\varepsilon$ (Eq. 30); b) $\mathrm{E}(\varepsilon'\varepsilon) = \sigma^2$.

Logo, a variância associada ao β estimado será [**nota**: diferente de $\sigma^2(X'X)^{-1}$]:

$$Var(\hat{\beta}) = E(\xi'\xi)(X'X)^{-1} = \sigma^2[(I_n - \lambda W)'(I_n - \lambda W)]^{-1}(X'X)^{-1} \quad (33)$$

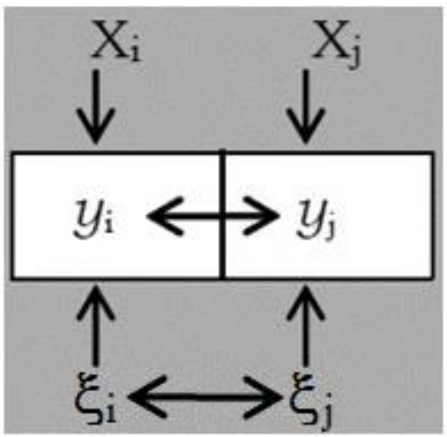
- <u>Conclusão</u>: A Eq. (32) contém erros com dependência espacial e heterocedásticos. Neste caso, a não observância deste efeito espacial produzirá modelos ineficientes (estatísticas t e F pouco confiáveis).

2. Modelos de Dependência Espacial de Alcance Global

- Apesar disso, a interpretação dos $\hat{\beta}$ (ver Eq. 19) não é afetada (não há viés).

2.3 O Modelo de Defasagem com Erro (*Spatial Autoregressive Confused* – SAC)*

- Suponha o seguinte tipo de interação espacial:



Nota: Neste caso, o erro e a variável dependente de i e j apresentam interação espacial.

Exemplo: Difusão tecnológica (imitação) e praga agrícola iniciada em i, no período t-1, se espalha para j, no período t, e vice-versa.

- Este tipo de efeito espacial pode se mensurado como se segue:

$$y = \rho W_1 y + X\beta + \xi \quad \text{onde} \quad \xi = \lambda W_2 \xi + \varepsilon \tag{34}$$

*Modelo distorcido autoregressivo espacial (tradução própria).

2. Modelos de Dependência Espacial de Alcance Global

- O modelo SAC requer que $|\rho| < 1$ e $|\lambda| < 1$ (modelo não explosivo). Além disso, W_1 e W_2 (Eq. 34) podem ser distintas.

- A forma reduzida da Eq. 34 envolve o seguinte cálculo:

$$\xi = \lambda W_2 \xi + \varepsilon \rightarrow \xi - \lambda W_2 \xi = \varepsilon \rightarrow \xi = (I - \lambda W_2)^{-1} \varepsilon \qquad (35)$$

$$y = \rho W_1 y + X\beta + \xi \rightarrow y - \rho W_1 y = X\beta + \xi \rightarrow y = (I - \rho W_1)^{-1} X\beta + (I - \rho W_1)^{-1} \xi \qquad (36)$$

Substituindo (35) em (36):

$$y = (I - \rho W_1)^{-1} X\beta + (I - \rho W_1)^{-1} (I - \lambda W_2)^{-1} \varepsilon \qquad (37)$$

- Portanto, não considerar estes efeitos espaciais (caso da Eq. 1) causaria viés (termo associado a $X\beta$) e ineficiência (termos associados a ε).

- A variância do erro do modelo SAC é:

$$E(\xi'\xi) = \sigma^2 \{[(I - \rho W_1)'(I - \lambda W_2)]'[(I - \rho W_1)'(I - \lambda W_2)]\}^{-1} \qquad (38)$$

Nota: Lembrar que: a) $\xi = [(I - \rho W_1)'(I - \lambda W_2)]^{-1} \varepsilon$ (Eq. 37); b) $\mathrm{E}(\varepsilon'\varepsilon) = \sigma^2$.

- A Eq. (38) revela que desconsiderar a dependência espacial do modelo SAC produziria erros com dependência espacial e heterocedásticos.

2. Modelos de Dependência Espacial de Alcance Global

- A forma estrutural do modelo SAC (usada nas estimações) envolve substituir (35) em (34):

$$y = \rho W_1 y + X\beta + (I - \lambda W_2)^{-1}\varepsilon \quad (39)$$

Multiplicando todos os elementos da Eq. 39 por $(I - \lambda W_2)$:

$$y\,(I - \lambda W_2) = \rho W_1 y (I - \lambda W_2) + X\beta(I - \lambda W_2) + \varepsilon \quad (40)$$

Colocando em função de y e sumindo com os parênteses (distributiva):

$$y = \rho W_1 y + \lambda W_2 y - \lambda\rho W_2 W_1 y + X\beta - \lambda W_2 X\beta + \varepsilon \quad (41)$$

- A fim de se evitar problemas de redundâncias e circularidades associadas às matrizes W_1 e W_2, deve-se garantir que $W_1 * W_2$=0.

Nota: Estes problemas geralmente ocorrem quando W_1 é uma matriz de contiguidade de primeira ordem e W_2 é uma matriz de segunda ordem que inclui os vizinhos de primeira ordem. Neste caso, há redundância entre W_1 e W_2.

- Se $W_1 * W_2$=0, a Eq. 41 apresentará dependência espacial bi-paramétrica (termos: $\rho W_1 y$ e $\lambda W_2 y$) com restrição aos β parâmetros (termo teórico: $\lambda W_2 X\beta$):

$$y = \rho W_1 y + \lambda W_2 y + X\beta - \lambda W_2 X\beta + \varepsilon \quad (42)$$

2. Modelos de Dependência Espacial de Alcance Global

- O modelo bi-paramétrico sem restrição aos β parâmetros é:

$$y = \rho W_1 y + \lambda W_2 y + X\beta + \varepsilon \quad (43)$$

Nota: Neste caso, seria possível mensurar o efeito causado por ρ e λ sobre a variável dependente defasada (como não é possível estimar o termo $\lambda W_2 X\beta$, é a Eq. 43 que usamos na estimação do SAC).

- A forma reduzida da Eq. 43 é:

$$y - \rho W_1 y - \lambda W_2 y = X\beta + \varepsilon \rightarrow y = (I - \rho W_1 - \lambda W_2)^{-1} X\beta + (I - \rho W_1 - \lambda W_2)^{-1}\varepsilon \quad (44)$$

Nota: Mais uma vez, é possível notar que desconsiderar o efeito gerado por Wy e Wξ geraria estimativas enviesadas e ineficientes.

- Caso opte-se por usar $W_1 = W_2 = W$, a Eq. 41 seria reescrita como:

$$y = (\rho + \lambda) Wy - \lambda\rho W^2 y + X\beta - \lambda WX\beta + \varepsilon \quad (45)$$

Nota: A Eq. 43 revela que, ao considerar $W_1 = W_2$, não é possível dissociar o efeito gerado por ρ e λ associado à variável dependente defasada (Wy).

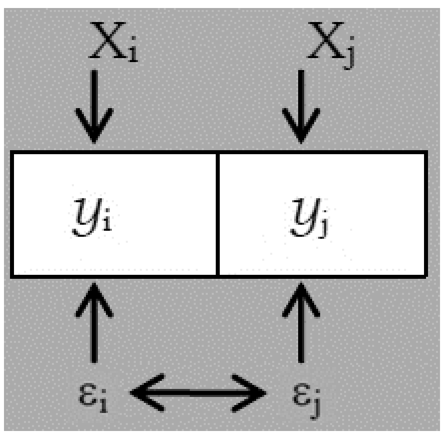
- A análise dos coeficientes de um modelo SAC, com $W_1 \neq W_2$, é semelhante à do modelo SAR (ver Eq. 21 e 22).

3. Modelos de Dependência Espacial de Alcance Local

- Nesta classe de modelos, um choque em "i" espalha-se apenas para os seus vizinhos mais próximos (primeira e segunda ordem) – alcance local.

3.1 Modelo de Erro com Média Móvel Espacial (*Spatial Moving Average* – SMA)

- Suponha o seguinte tipo de interação auto-regressiva espacial:



Nota: Neste caso, o erro de i apresenta interação espacial com seus vizinhos mais próximos (j).

Exemplo: Poluição gerada por i, no período t-1, afeta seus vizinhos mais próximos (j), no período t, e vice-versa.

- Este tipo de efeito espacial pode se mensurado como se segue:

$y = X\beta + \xi$ onde $\xi = \gamma W\varepsilon + \varepsilon$ (46)

3. Modelos de Dependência Espacial de Alcance Local

Nota: observe a sutil diferença entre as Eq. 46 e Eq. 29.

- A forma reduzida da Eq. 46 envolve o seguinte cálculo:

$$y = X\beta + \gamma W\varepsilon + \varepsilon \quad \rightarrow \quad y = X\beta + (I + \gamma W)\varepsilon \qquad (47)$$

➢ A Eq. 47 não apresenta nenhum multiplicador espacial [ex: $(I_n - \lambda W)^{-1}$]. Portanto, o impacto é local (e não global).

- Neste caso, a variância do termo de erro será:

$$E(\xi'\xi) = \sigma^2[(I_n + \gamma W)'(I_n + \gamma W)] = \sigma^2[I_n + \gamma(W + W') + \gamma^2 W'W] \qquad (48)$$

Nota: Lembrar que: a) $\xi = (I + \gamma W)\varepsilon$ (Eq. 47); b) $\mathrm{E}(\varepsilon'\varepsilon) = \sigma^2$.

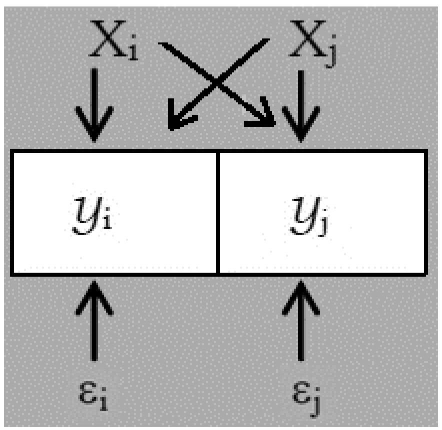
- A Eq. 48 mostra que a matriz VAR-COV não é plena (nem todos os valores são ≠ 0). Na realidade, os elementos não nulos fora da diagonal principal correspondem apenas aos vizinhos de primeira (W) e segunda ordem ($W'W$).

- Ignorar o efeito de $\gamma W\varepsilon$ produz estimativas ineficientes (heterocedasticidade), porém não há viés. Logo, a análise dos β não é afetada.

3. Modelos de Dependência Espacial de Alcance Local

3.2 Modelo Regressivo Cruzado Espacial (*Spatial Lag of X* - SLX)*

- Suponha o seguinte tipo de interação auto-regressiva espacial:



Nota: Neste caso, a variável explicativa da região i (X_i) apresenta interação espacial com a variável dependente de seus j vizinhos mais próximos (y_j).

Exemplo: Investimento em Educação na região i, no período t-1, afeta o PIB da região i (y_i) em t-1, mas também pode afetar o PIB de seus j vizinhos mais próximos (y_j), no período t, e vice-versa.

- Este tipo de efeito espacial pode se mensurado como se segue:

$$y = X\beta + WX\tau + \varepsilon \tag{49}$$

*Também conhecido como Modelo de Transbordamento Espacial.

3. Modelos de Dependência Espacial de Alcance Local

Nota 1: Diferentemente de ρ, λ, γ (escalares), o termo τ representa um vetor $(k_{-1}\ x\ 1)$. Contendo os coeficientes que acompanham as k variáveis explicativas defasadas espacialmente (exceto a constante: k-1).

Nota 2: Nem toda variável explicativa precisa ser defasada espacialmente. Logo, o vetor τ pode conter zeros.

Nota 3: A forma reduzida da expressão 49 é igual a estrutural. Logo, não há nenhum multiplicador espacial [ex: $(I_n - \tau W)^{-1}$]. Impacto é local (e não global). O efeito de τWX fica restrito à vizinhança definida pela matriz W.

Nota 4: Como X tende a ter alta correlação com WX, pode haver multicolinearidade. Este problema é sério em pequenas e médias amostras. <u>Solução</u>: a) excluir variáveis com elevada correlação; b) usar grandes amostras.

Nota 5: O efeito total de uma ΔX_k em y, no SLX, é (FISCHER e NIJKAMP, 2013, p. 364): $(\partial y\ /\ \partial X_k) = I_n\beta_k + W\tau_k$.

3. Modelos de Dependência Espacial de Alcance Local

- Ignorar WX, quando este é relevante, tende a gerar modelos enviesados (omissão de variável relevante).

O EMQO para um modelo a-espacial é:
$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'y \tag{50}$$

Substituindo (49) em (50):
$$\hat{\beta} = [(X'X)^{-1}X'][X\beta + WX\tau + \varepsilon] \tag{51}$$

Aplicando-se a regra distributiva:
$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'X\beta + (X'X)^{-1}X'WX\tau + (X'X)^{-1}X'\varepsilon \tag{52}$$

Como $(X'X)^{-1}X'X = I$ e $\mathrm{E}(\varepsilon) = 0$, tem-se que:
$$\hat{\beta} = \beta + (X'X)^{-1}E(X'WX\tau) \tag{53}$$

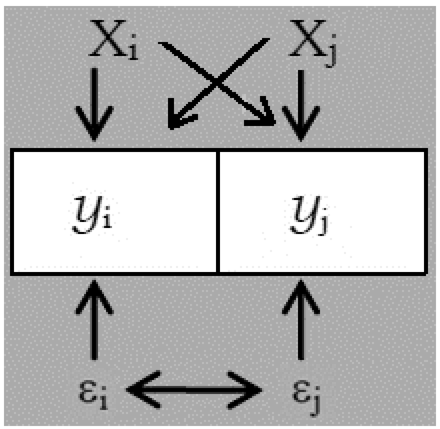
- Logo, o EMQO não será enviesado apenas se: a) $\tau = 0$; b) $E(X'WX) = 0$.

Nota 1: $E(X'WX) = 0$ ocorre apenas quando não há relação entre X e WX.
Nota 2: Como $y = f(X)$, é provável que $\mathrm{W}y = f(WX)$. Logo, não incluir Wy na Eq. (49), quando $E(Wy, WX) \neq 0$, geraria viés por omissão de variável relevante.

3. Modelos de Dependência Espacial de Alcance Local

3.3 Modelo Regressivo Cruzado com erro de Média Móvel Espacial (SLXMA)

- Suponha o seguinte tipo de interação auto-regressiva espacial:



Nota: Neste caso, a variável explicativa da região i (X_i) afeta y_j de seus vizinhos próximos. Além disso, há interação espacial entre o erro de i (ε_i) e de seus j vizinhos próximos e vice-versa.

Exemplo: Investimento em Educação na região i (X_i), pode afetar o PIB de seus j vizinhos mais próximos (y_j) e vice-versa. Além disso, a poluição de i se espalha para seus j vizinhos mais próximos.

- Este tipo de efeito espacial pode se mensurado como se segue:

$y = X\beta + WX\tau + \xi$ onde $\xi = \gamma W\varepsilon + \varepsilon$ (54)

3. Modelos de Dependência Espacial de Alcance Local

- A forma reduzida da Eq. 54 é:

$$y = X\beta + WX\tau + \gamma W\varepsilon + \varepsilon \quad \text{ou} \quad y = X\beta + WX\tau + (I + \gamma W)\varepsilon \tag{55}$$

Nota 1: A Eq. 55 não apresenta multiplicador espacial [ex: $(I_n - \lambda W)^{-1}$]. Os termos WX e $W\varepsilon$ indicam efeitos locais causados pelos vizinhos mais próximos.

Nota 2: Como não há problema de identificação de parâmetros (ver SAC, Eq. 45), pode-se usar a mesma matriz para defasar X e ε ($W_1 \neq W_2$ também é permitido).

- Ignorar WX, quando relevante, gera viés nos $\hat{\beta}$ devido à omissão de variável relevante. Para tanto, basta haver correlação entre WX e X (ver Eq. 53).

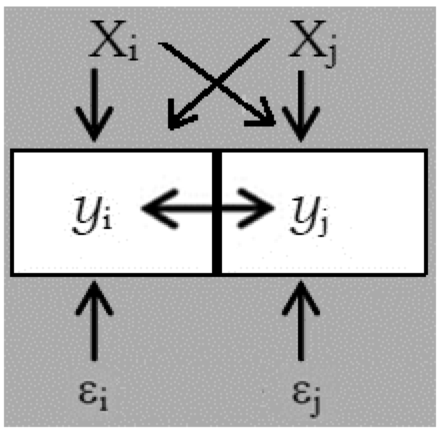
- Ignorar $W\varepsilon$, quando relevante, gera ineficiência no EMQO.

- Logo, estimar a Eq. 55 via modelo a-espacial geraria estimativas enviesadas (pequenas amostras), inconsistentes (grande amostras) e ineficientes.

4. Modelos de Dependência Espacial de Alcance Global e Local

4.1 Modelo de Durbin Espacial (Spatial Durbin Model - SDM)*

- Suponha o seguinte tipo de interação auto-regressiva espacial:



Nota: Neste caso, a variável explicativa de i (X_i) afeta os y_j mais próximos (efeito local). Além disso, há interação espacial entre a variável dependente de i e j (efeito global).

Exemplo: Investimento em Educação na região i (X_i), afeta o PIB de seus j vizinhos mais próximos (y_j) e vice-versa (local). Além disso, inovações geradas em i são copiadas por seus j vizinhos (global).

- Este tipo de efeito espacial pode se mensurado como se segue:

$$y = \rho W y + X\beta + WX\tau + \varepsilon \qquad (56)$$

*Também denominado Modelo de transbordamento (ou regressivo cruzado) com defasagem espacial.

4. Modelos de Dependência Espacial de Alcance Global e Local

- A forma reduzida da Eq. 56 é:

$$y = (I - \rho W)^{-1} X\beta + (I - \rho W)^{-1} WX\tau + (I - \rho W)^{-1} \varepsilon \qquad (57)$$

- A Eq. 57 mostra que há um multiplicador espacial [$(I - \rho W)^{-1}$] afetando $\hat{\beta}$ e o termo de erro (ε). Portanto, ignorar Wy geraria viés e tornaria os erros heterocedásticos e não independentes (*i.e.*: correlacionados espacialmente).

- Como τ é um vetor (não é escalar), o multiplicador espacial [$(I - \rho W)^{-1}$] afetará todos os coeficientes associados às variáveis explicativas defasadas ($WX\tau$). Portanto, ignorar Wy geraria um vetor τ com coeficientes enviesados.

- Ignorar WX também causaria viés associado aos $\hat{\beta}$ (ver Eq. 53).

Nota 1: A inclusão de X e WX pode gerar multicolinearidade. <u>Solução</u>: a) excluir variáveis com elevada correlação; b) usar grandes amostras.

- O efeito total de uma ΔX_k em y, no SDM, é (FISCHER e NIJKAMP, 2013, p. 364):

$$(\partial y \,/\, \partial X_k) = (I - \rho W)^{-1} (I_n \beta_k + W\tau_k) \qquad (58)$$

4. Modelos de Dependência Espacial de Alcance Global e Local

- O Modelo de Durbin (com WX e Wy) surge automaticamente quando há uma variável explicativa (Ex.: z), com dependência espacial ($z = \rho Wz + \mu$, com $\rho \neq 0$), correlacionada com outra explicativa do modelo $[\mathrm{E}(z, x) \neq 0]$.

- Imagine que quiséssemos estimar o β da seguinte equação:

$y = \alpha z + \beta x + \varepsilon$ (59)

Como: $z = \rho Wz + \mu \rightarrow z = (I - \rho W)^{-1}\mu$ (60)

Substituindo (60) em (59):

$y = \alpha[(I - \rho W)^{-1}\mu] + \beta x + \varepsilon \rightarrow y = \alpha\mu(I - \rho W)^{-1} + \beta x + \varepsilon$ (61)

- Se z não depender de x (Eq. 60), μ será bem comportado: $\mathrm{E}(\mu) = 0$. Neste caso, o valor esperado da Eq. 61 é: $\mathrm{E}(y) = \beta x$.

- Caso z apresente relação com x, de modo que: $z = \rho Wz + \delta x + \mu$ (62)

Sua forma reduzida será: $z = (I - \rho W)^{-1}\delta x + (I - \rho W)^{-1}\mu$ (63)

4. Modelos de Dependência Espacial de Alcance Global e Local

Substituindo (63) em (59):

$$y = \alpha[(I - \rho W)^{-1}\delta x + (I - \rho W)^{-1}\mu] + \beta x + \varepsilon \quad (64)$$

Multiplicando α pelos termos entre chaves:

$$y = (I - \rho W)^{-1}\alpha\delta x + (I - \rho W)^{-1}\alpha\mu + \beta x + \varepsilon \quad (65)$$

Multiplicando os dois lados da equação por $(I - \rho W)$:

$$y(I - \rho W) = \alpha\delta x + \alpha\mu + \beta x(I - \rho W) + \varepsilon(I - \rho W) \quad (66)$$

Aplicando distributiva sobre os termos entre parênteses e reorganizando:

$$y = \rho W y + (\alpha\delta + \beta)x - (\rho\beta)Wx + [\varepsilon(I - \rho W) + \alpha\mu] \quad (67)$$

Assumindo que o último termo representa um erro composto ξ:

$$y = \rho W y + (\alpha\delta + \beta)x + (-\rho\beta)Wx + \xi \rightarrow y = \pi_1 W y + \pi_2 x + \pi_3 W x + \xi \quad (68)$$

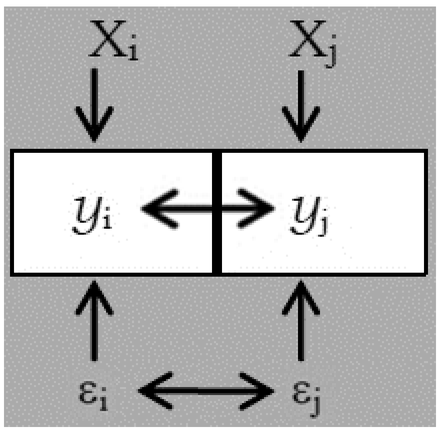
Nota: Este modelo segue a *hipótese do fator comum* (não linear): $\pi_1 * \pi_2 = -\pi_3$.

- Logo, se houver uma variável relacionada c/x que apresente dependência espacial, ou seja $z = f(x, Wz)$, deve-se considerar a inclusão de Wx e Wy, pois o modelo SDM surge automaticamente (Eq. 68).

4. Modelos de Dependência Espacial de Alcance Global e Local

4.2 Modelo de Defasagem com Erro de Média Móvel Espacial (SARMA)

- Suponha o seguinte tipo de interação auto-regressiva espacial:



Nota: Neste caso, há interação espacial entre a variável dependente de i e j (global). Além disso, ε_i afeta o erro de seus j vizinhos mais próximos (local).

Exemplo: Inovações geradas em i são copiadas por seus j vizinhos (global). Enquanto isso, a poluição de i se espalha para seus j vizinhos mais próximos (local).

- Este tipo de efeito espacial pode se mensurado como se segue:

$$y = \rho W_1 y + X\beta + \xi \qquad \text{onde} \qquad \xi = \gamma W_2 \varepsilon + \varepsilon \tag{69}$$

4. Modelos de Dependência Espacial de Alcance Global e Local

- Novamente, assume-se que $|\rho| < 1$. Assim, a forma reduzida de (69) é:

$$y = (I - \rho W_1)^{-1} X\beta + (I - \rho W_1)^{-1}(I + \gamma W_2)\varepsilon \quad (70)$$

- Ignorar o efeito de $W_1 y$ e $W_2 \varepsilon$, quando relevante, tende a gera viés (nos $\hat{\beta}$) e ineficiência (no termo de erro, ε).

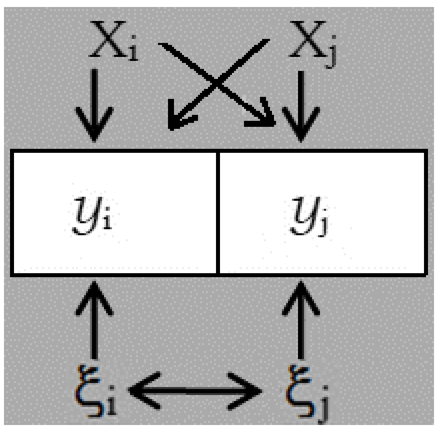
- O efeito marginal de uma variação de X_k em y, no SARMA, é o mesmo do SAR (rever Eq. 21), ou seja:

$$(\partial y \;/\; \partial X_k) = (I - \rho W)^{-1} I_n \beta_k \quad (71)$$

4. Modelos de Dependência Espacial de Alcance Global e Local

4.3 Modelo Durbin com erro Espacial (*Spatial Durbin Error Model* - SDEM)

- Suponha o seguinte tipo de interação auto-regressiva espacial:



Nota: Neste caso, a variável explicativa de i (X_i) afeta os y_j mais próximos (efeito local). Além disso, ξ_i afeta o erro de seus j vizinhos e vice-versa (global).

Exemplo: Investimento em Educação na região i (X_i), afeta o PIB de seus j vizinhos mais próximos (y_j) e vice-versa (local). Enquanto isso, uma praga agrícola iniciada em i se espalha para j e vice-versa (global).

- Este tipo de efeito espacial pode se mensurado como se segue:

$y = X\beta + WX\tau + \xi$ onde $\xi = \lambda W\xi + \varepsilon$ (72)

4. Modelos de Dependência Espacial de Alcance Global e Local

- Assume-se que $|\lambda| < 1$. Assim, a forma reduzida de (72) é:

$$y = X\beta + WX\tau + (I - \lambda W)^{-1}\varepsilon \quad (73)$$

Nota 1: É possível notar que há um multiplicador espacial global associado o termo de erro $[(I - \lambda W)^{-1}\varepsilon]$.

Nota 2: Há um transbordamento das variáveis explicativas para seus W vizinhos mais próximos (efeito local).

Nota 3: Como não há problema de identificação de parâmetros, não há necessidade de usar $W_1 \neq W_2$ (podem ser iguais!).

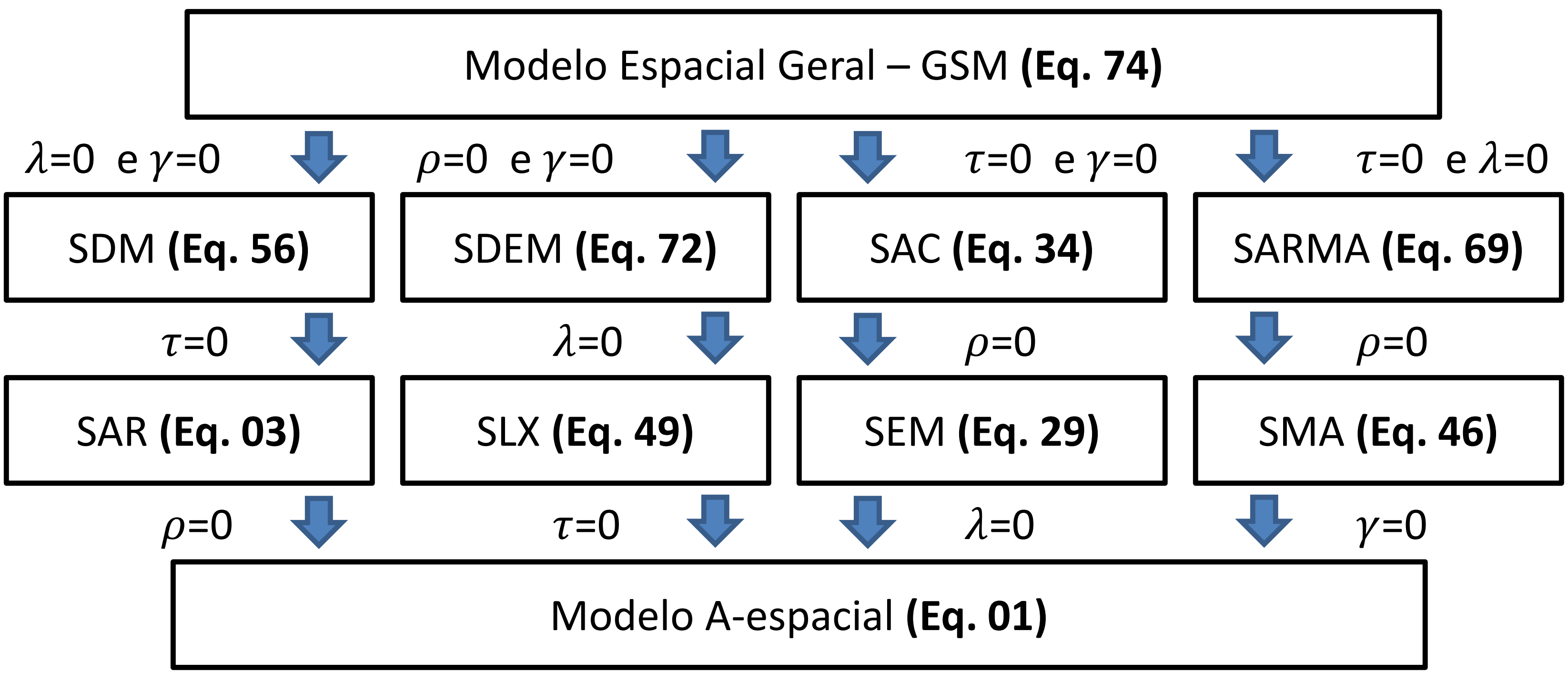
- Ignorar o efeito de WX e $W\xi$, quando relevante, tende a gerar viés (omissão de variável relevante – ver Eq. 53) e ineficiência (no termo de erro, ε).

5. Modelo de Dependência Espacial Geral (*General Spatial Model* - GSM)

- Esta especificação inclui todas as dependências espaciais anteriores. Isto é, Wy,WX e $W\xi$ ou $W\varepsilon$ [sendo: $\varepsilon \sim Normal(0, \sigma^2 I)$]. Formalmente:

$$y = \rho W_1 y + X\beta + W_1 X\tau + \xi, \text{ onde: } \quad \xi = \lambda W_2 \xi + \varepsilon \text{ ou } \quad \xi = \gamma W_1 \varepsilon + \varepsilon \qquad (74)$$

Figura 1. Aninhamento dos Modelos Espaciais.



5. Modelo de Dependência Espacial Geral (*General Spatial Model* - GSM)

Nota: Este capítulo não trata da heterogeneidade espacial (Cap. 11). Como ambos os fenômenos espaciais são imbricados, é possível que a ACS permaneça caso a heterogeneidade não seja controlada (e vice-versa).

Quadro-Resumo: Características dos Modelos Econométrico-Espaciais.

Modelo	Defasagem	Alcance	Implicações
Defasagem (SAR)	Wy	Global	Viés
Erro (SEM)	$W\xi$	Global	Ineficiência
Defasagem com Erro (SAC)	$Wy; W\xi$	Global	Viés e Ineficiência
Erro c/média móvel (SMA)	$W\varepsilon$	Local	Ineficiência
Regressivo Cruzado (SLX)	WX	Local	Viés
Regressivo c/erro de média móvel (SLXMA)	$WX; W\varepsilon$	Local	Viés e Ineficiência
Durbin (SDM)	$Wy; WX$	Global e Local	Viés
Defasagem c/erro de média móvel (SARMA)	$Wy; W\varepsilon$	Global e Local	Viés e Ineficiência
Durbin com erro (SDEM)	$WX; W\xi$	Global e Local	Viés e Ineficiência
Geral Espacial (GSM)	$Wy; WX; W\xi$ ou $W\varepsilon$	Global e Local	Viés e Ineficiência

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA - *CAMPUS* Governador Valadares
ECONOMETRIA ESPACIAL
Prof. Vinícius de Azevedo Couto Firme

Referência

1. ALMEIDA, E. *Econometria Espacial Aplicada.* 1ª ed. Alínea, 2012.
2. FISCHER, M.; NIJKAMP, P. *Handbook of Regional Science*. 1ª ed. Springer 2013.
3. LESAGE J.; PACE R. *Introduction to spatial econometrics*. 1ª ed. Taylor-Francis, 2009.