Homework 03

Instruções:

1. Este Homework (HW) poderá ser resolvido em duplas;
2. O HW precisará conter o(s) **nome(s) completo(s)** e a(s) **matrícula(s)** do(s) discente(s);
3. O HW deverá ser enviado via `Google Classroom` **até as 07h51 do dia 03/06/2026** em **um único arquivo** e em **PDF** (*Portable Document Format*);
4. **Não serão considerados** Homeworks com péssima qualidade visual ou em desacordo com as instruções anteriores.

Exercícios.

1. Considere a estatística

$$F_c = \frac{\text{QMReg}}{\text{QMRes}}. \tag{1}$$

   Prove que a estatística F_c, definida em (1), pode ser reescrita da seguinte forma:

$$F_c = \frac{n-p}{p-1} \times \frac{R^2}{1-R^2}, \tag{2}$$

   em que R^2 é o coeficiente de determinação.

2. Considere o modelo de regressão normal linear com intercepto $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$, em que $\boldsymbol{\varepsilon} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \sigma^2 \boldsymbol{I}_n)$. Sob a hipótese nula $\mathcal{H} : \beta_2 = \beta_3 = \cdots = \beta_p = 0$, prove que:

$$R^2 \sim \text{Beta}\left(\frac{p-1}{2}, \frac{n-p}{2}\right).$$

   Dica: reescreva R^2 a partir de (2).

3. Prove o teorema de Sherman-Morrison-Woodbury (Sherman and Morrison, 1950; Woodbury, 1950), considerando a matriz $\boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{X}$, de dimensão $p \times p$, e o vetor $\boldsymbol{x}^\top$ correspondente

à ℓ-ésima linha de $\boldsymbol{X}$. Isto é, prove que:

$$\left(\boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{X} - \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^\top\right)^{-1} = \left(\boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{X}\right)^{-1} + \frac{\left(\boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{X}\right)^{-1} \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^\top \left(\boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{X}\right)^{-1}}{1 - \boldsymbol{x}^\top \left(\boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{X}\right)^{-1} \boldsymbol{x}}.$$

4. Seja o ℓ-ésimo resíduo PRESS (*prediction error sum of squares*), $e_{(\ell)} = Y_\ell - \hat{Y}_{(\ell)}$, em que $\hat{Y}_{(\ell)}$ corresponde ao valor ajustado da ℓ-ésima resposta com base em todas as observações, exceto a ℓ-ésima, para $\ell = 1, 2, \ldots, n$. Para o ℓ-ésimo resíduo PRESS, prove que:

   (a) ele pode ser reescrito da seguinte forma:

   $$e_{(\ell)} = \frac{e_\ell}{1 - h_{\ell\ell}}.$$

   (b) sua variância é dada por:

   $$\mathrm{Var}(e_{(\ell)}) = \frac{\sigma^2}{1 - h_{\ell\ell}}.$$

5. Prove que o estimador da variância σ^2, desconsiderando a observação ℓ, é dado por:

$$S^2_{(\ell)} = \frac{(n-p)\mathrm{QMRes} - \frac{e_\ell^2}{1-h_{\ell\ell}}}{n-p-1}, \quad \ell = 1, 2, \ldots, n.$$

6. A partir da forma matricial da soma de quadrados ponderada,

$$Q = (\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta})^\top \boldsymbol{W}(\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta}),$$

   prove que o estimador de mínimos quadrados de $\boldsymbol{\beta}$:

   (a) é dado por $\widehat{\boldsymbol{\beta}} = (\boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{W}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{W}\boldsymbol{Y}$;

   (b) é não viesado;

   (c) e têm a menor variância entre todos os estimadores lineares não viesados.

7. Exercício retirado de Anderson et al. (2019, Cap. 10, p. 447): "Estudo de caso 1: Medindo o risco do mercado de ações".

Uma medida de risco ou volatilidade de um ação individual é o desvio padrão do retorno total (valorização do capital mais dividendos) ao longo de vários períodos. Embora o desvio padrão seja fácil de ser calculado, ele não leva em consideração até que ponto o preço de uma determinada ação varia em função de um índice de mercado padrão, como o S&P 500. Como resultado, muitos analistas financeiros preferem utilizar outra medida de risco, denominado *beta*.

Betas para estoques individuais são determinados por regressão linear simples. A variável dependente é o retorno total da ação e a variável independente é o retorno total do mercado de ações. Para este caso usaremos o índice S&P 500 como medida de retorno total do mercado de ações, e uma equação de regressão estimada será desenvolvida com base em dados mensais. O beta da ação é a inclinação da equação de regressão estimada (b_1). Os dados contidos no arquivo chamado Beta fornecem o retorno total (valorização do capital mais dividendos) ao longo de 36 meses para oito ações ordinárias amplamente negociadas e o S&P 500.

O valor de beta para o mercado de ações será sempre 1; assim, ações que tendem a subir e descer com o mercado de ações também terão um beta próximo de 1. Betas maiores que 1 indicam que a ação é mais volátil que o mercado, e betas menores que 1 indicam que a ação é menos volátil que o mercado. Por exemplo, se uma ação tiver um beta de 1,4, ela será 40% mais volátil do que o mercado, e se uma ação tiver um beta de 0,4 será 60% menos volátil que o mercado.

Relatório administrativo. Você precisa analisar as características de risco destas ações. Prepare um relatório que inclua, mas não se limite, os seguintes itens.

(a) Calcule a estatística descritiva para cada ação e o S&P 500. Comente seus resultados. Quais ações são as mais voláteis?

(b) Calcule o valor de beta para cada ação. Quais dessas ações você acha que teria o melhor desempenho em um mercado em alta? Qual você acha que manteria seu melhor valor em um mercado em baixa?

(c) Comente sobre quanto retorno das ações individuais é explicado pelo mercado.

Referências

Anderson, D. R., D. J. Sweeney, T. A. Williams, J. D. Camm, and J. J. Cochran (2019). *Estatística Aplicada a Adminstração e Economia* (8th ed.). São Paulo: Cengage.

Sherman, J. and W. J. Morrison (1950). Adjustment of an inverse matrix corresponding to a change in one element of a given matrix. *Annals of Mathematical Statistics 21*(1), 124–127.

Woodbury, M. A. (1950). Inverting modified matrices. Memorandum Report 42, Statistical Research Group, Princeton University.