Homework 01

Instruções:

1. Este Homework (HW) poderá ser resolvido em duplas;
2. O HW precisará conter o(s) **nome(s) completo(s)** e a(s) **matrícula(s)** do(s) discente(s);
3. O HW deverá ser enviado via `Google Classroom` **até as 07h51 do dia 08/04/2026** em **um único arquivo** e em **PDF** (*Portable Document Format*);
4. **Não serão considerados** Homeworks com péssima qualidade visual ou em desacordo com as instruções anteriores.

Exercícios.

1. Sejam $Y = \alpha + \beta X + \varepsilon$, em que α e β são constantes, $\varepsilon \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ e X uma variável aleatória, com X e ε independentes. Calcule a covariância entre Y e X quando X tem distribuição:
   (a) uniforme no intervalo (a, b).
   (b) normal de média μ e variância σ^2.
   (c) exponencial λ, em que $\mathbb{E}(X) = 1/\lambda$.

2. Seja o seguinte modelo de regressão normal linear simples,

$$Y_\ell = 1 + x_{\ell 2} + \varepsilon_\ell,$$

   em que $\varepsilon_\ell \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$, $\ell = 1, 2, \ldots, n$. A partir de uma simulação de Monte Carlo, com 5.000 réplicas, estime a covariância entre $\boldsymbol{Y} = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)^\top$ e $\boldsymbol{x}_2 = (x_{12}, x_{22}, \ldots, x_{n2})^\top$, nos seguintes cenários:
   (a) $x_{\ell 2} \sim$ uniforme no intervalo $(0, 1)$.
   (b) $x_{\ell 2} \sim$ uniforme no intervalo $(1, 2)$.
   (c) $x_{\ell 2} \sim$ normal de média 0 e variância 1.

(d) $x_{\ell 2} \sim$ exponencial 1.

Para $\sigma^2 \in \{4, 12\}$ e $n \in \{10, 20, 40, 80, 160\}$. Comente os resultados obtido dentro de cada cenário e de maneira global.

Observações:

i. Para um mesmo σ^2 e n, a variável preditora $\boldsymbol{x}_2$ não se altera dentro das 5.000 réplicas.

ii. Utilizar os três últimos dígitos da matrícula (ignorando possíveis letras) como semente aleatória.

iii. Em caso de utilização de um código diferente do disponibilizado pelo professor, anexá-lo.

3. A partir da forma matricial da soma de quadrados,

$$Q = (\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta})^\top (\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta}),$$

prove que o estimador de mínimos quadrados de $\boldsymbol{\beta}$:

(a) é dado por $\widehat{\boldsymbol{\beta}} = (\boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{X})^{-1} \boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{Y}$;

(b) é não viesado;

(c) e têm a menor variância entre todos os estimadores lineares não viesados.

4. Suponha que o interesse é encontrar o estimador de mínimos quadrados de $\boldsymbol{\beta}$ no modelo de regressão linear $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$ sujeito à restrição $\boldsymbol{T}\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{c}$. Mostre que este estimador é dado por

$$\widetilde{\boldsymbol{\beta}} = \widehat{\boldsymbol{\beta}} + (\boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{X})^{-1} \boldsymbol{T}^\top [\boldsymbol{T}(\boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{X})^{-1} \boldsymbol{T}^\top]^{-1} (\boldsymbol{c} - \boldsymbol{T}\widehat{\boldsymbol{\beta}}),$$

em que $\widehat{\boldsymbol{\beta}} = (\boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{X})^{-1} \boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{Y}$.

5. Prove que os estimadores de máxima verossimilhança de β_1 e β_2, do modelo de regressão normal linear simples,

$$Y_\ell = \beta_1 + \beta_2 x_\ell + \varepsilon_\ell,$$

em que $\varepsilon_\ell \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$, $\ell = 1, 2, \ldots, n$, podem ser escritos da seguinte forma:

$$\hat{\beta}_1 = \bar{Y} - \hat{\beta}_2 \bar{x},\ \hat{\beta}_2 = \frac{\sum_{\ell=1}^{n} (x_\ell - \bar{x})(Y_\ell - \bar{Y})}{\sum_{\ell=1}^{n} (x_\ell - \bar{x})^2}.$$