

# Conceitos iniciais

Tiago M. Magalhães

Departamento de Estatística - ICE-UFJF

Juiz de Fora, 18 de março de 2026



# Roteiro

- 1 Operações
- 2 Resultados matriciais
- 3 Estimação
- 4 Referências bibliográficas



# Roteiro

- 1 Operações
- 2 Resultados matriciais
- 3 Estimação
- 4 Referências bibliográficas



# Somatórios

Sejam  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ ,  $n$  números quaisquer. Então,

$$\sum_{i=1}^n Y_i = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n, \quad (1)$$



# Somatórios

Sejam  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ ,  $n$  números quaisquer. Então,

$$\sum_{i=1}^n Y_i = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n, \quad (1)$$

em que  $\sum$  é denominado operador soma.



# Somatórios

Sejam  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ ,  $n$  números quaisquer. Então,

$$\sum_{i=1}^n Y_i = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n, \quad (1)$$

em que  $\sum$  é denominado operador soma.



# Somatórios

De (1), nós temos as seguintes propriedades:

- $\sum_{i=1}^n a = na;$



# Somatórios

De (1), nós temos as seguintes propriedades:

- $\sum_{i=1}^n a = na$ ;
- $\sum_{i=1}^n (Y_i + Z_i) = \sum_{i=1}^n Y_i + \sum_{i=1}^n Z_i$ ;



# Somatórios

De (1), nós temos as seguintes propriedades:

- $\sum_{i=1}^n a = na$ ;
- $\sum_{i=1}^n (Y_i + Z_i) = \sum_{i=1}^n Y_i + \sum_{i=1}^n Z_i$ ;
- $\sum_{i=1}^n (b + cZ_i) = nb + c \sum_{i=1}^n Z_i$ ;



# Somatórios

De (1), nós temos as seguintes propriedades:

- $\sum_{i=1}^n a = na$ ;
- $\sum_{i=1}^n (Y_i + Z_i) = \sum_{i=1}^n Y_i + \sum_{i=1}^n Z_i$ ;
- $\sum_{i=1}^n (b + cZ_i) = nb + c \sum_{i=1}^n Z_i$ ;

em que  $a, b, c$  são constantes e  $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$  são números quaisquer.



# Somatórios

De (1), nós temos as seguintes propriedades:

- $\sum_{i=1}^n a = na$ ;
- $\sum_{i=1}^n (Y_i + Z_i) = \sum_{i=1}^n Y_i + \sum_{i=1}^n Z_i$ ;
- $\sum_{i=1}^n (b + cZ_i) = nb + c \sum_{i=1}^n Z_i$ ;

em que  $a, b, c$  são constantes e  $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$  são números quaisquer.



# Produtórios

Sejam  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ ,  $n$  números quaisquer. Então,

$$\prod_{i=1}^n Y_i = Y_1 \times Y_2 \times \cdots \times Y_n, \quad (2)$$



# Produtórios

Sejam  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ ,  $n$  números quaisquer. Então,

$$\prod_{i=1}^n Y_i = Y_1 \times Y_2 \times \dots \times Y_n, \quad (2)$$

em que  $\prod$  é denominado operador produto.



# Produtórios

Sejam  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ ,  $n$  números quaisquer. Então,

$$\prod_{i=1}^n Y_i = Y_1 \times Y_2 \times \dots \times Y_n, \quad (2)$$

em que  $\prod$  é denominado operador produto.



# Produtórios

De (2), nós temos as seguintes propriedades:

- $\prod_{i=1}^n a = a^n$ ;



# Produtórios

De (2), nós temos as seguintes propriedades:

- $\prod_{i=1}^n a = a^n$ ;
- $\prod_{i=1}^n (Y_i \times Z_i) = \prod_{i=1}^n Y_i \times \prod_{i=1}^n Z_i$ ;



# Produtórios

De (2), nós temos as seguintes propriedades:

- $\prod_{i=1}^n a = a^n$ ;
- $\prod_{i=1}^n (Y_i \times Z_i) = \prod_{i=1}^n Y_i \times \prod_{i=1}^n Z_i$ ;
- $\prod_{i=1}^n (bZ_i) = b^n \times \prod_{i=1}^n Z_i$ ;



# Produtórios

De (2), nós temos as seguintes propriedades:

- $\prod_{i=1}^n a = a^n$ ;
- $\prod_{i=1}^n (Y_i \times Z_i) = \prod_{i=1}^n Y_i \times \prod_{i=1}^n Z_i$ ;
- $\prod_{i=1}^n (bZ_i) = b^n \times \prod_{i=1}^n Z_i$ ;

em que  $a, b$  são constantes e  $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$  são números quaisquer.



# Produtórios

De (2), nós temos as seguintes propriedades:

- $\prod_{i=1}^n a = a^n$ ;
- $\prod_{i=1}^n (Y_i \times Z_i) = \prod_{i=1}^n Y_i \times \prod_{i=1}^n Z_i$ ;
- $\prod_{i=1}^n (bZ_i) = b^n \times \prod_{i=1}^n Z_i$ ;

em que  $a, b$  são constantes e  $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$  são números quaisquer.



# Roteiro

- 1 Operações
- 2 Resultados matriciais**
- 3 Estimação
- 4 Referências bibliográficas









# Equações lineares

em que  $\mathbf{A}$  é uma matriz de coeficientes  $n \times p$ ,  $\mathbf{x}$  é um vetor  $p \times 1$



# Equações lineares

em que  $\mathbf{A}$  é uma matriz de coeficientes  $n \times p$ ,  $\mathbf{x}$  é um vetor  $p \times 1$  e  $\mathbf{y}$  é vetor  $n \times 1$ ,



# Equações lineares

em que  $\mathbf{A}$  é uma matriz de coeficientes  $n \times p$ ,  $\mathbf{x}$  é um vetor  $p \times 1$  e  $\mathbf{y}$  é vetor  $n \times 1$ , isto é,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}, \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$



# Equações lineares

em que  $\mathbf{A}$  é uma matriz de coeficientes  $n \times p$ ,  $\mathbf{x}$  é um vetor  $p \times 1$  e  $\mathbf{y}$  é vetor  $n \times 1$ , isto é,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}, \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$



# Raízes características

As raízes características de uma matriz  $\mathbf{A}$ ,  $n \times n$ , são as soluções em  $\lambda$  da equação

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_n) = 0,$$



# Raízes características

As raízes características de uma matriz  $\mathbf{A}$ ,  $n \times n$ , são as soluções em  $\lambda$  da equação

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_n) = 0,$$

em que  $\mathbf{I}_n$  é a matriz identidade de ordem  $n$ .



# Raízes características

As raízes características de uma matriz  $\mathbf{A}$ ,  $n \times n$ , são as soluções em  $\lambda$  da equação

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_n) = 0,$$

em que  $\mathbf{I}_n$  é a matriz identidade de ordem  $n$ . Este determinante é um polinômio de grau  $n$  em  $\lambda$  e a equação terá  $n$  soluções.



# Raízes características

As raízes características de uma matriz  $\mathbf{A}$ ,  $n \times n$ , são as soluções em  $\lambda$  da equação

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_n) = 0,$$

em que  $\mathbf{I}_n$  é a matriz identidade de ordem  $n$ . Este determinante é um polinômio de grau  $n$  em  $\lambda$  e a equação terá  $n$  soluções. Se  $\lambda_j$  é raiz característica de  $\mathbf{A}$ , a solução em  $\mathbf{x}$  da equação  $(\mathbf{A} - \lambda_j \mathbf{I}_n)\mathbf{x} = 0$  é o vetor característico correspondente,  $\mathbf{x}_j$ .



# Raízes características

As raízes características de uma matriz  $\mathbf{A}$ ,  $n \times n$ , são as soluções em  $\lambda$  da equação

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_n) = 0,$$

em que  $\mathbf{I}_n$  é a matriz identidade de ordem  $n$ . Este determinante é um polinômio de grau  $n$  em  $\lambda$  e a equação terá  $n$  soluções. Se  $\lambda_j$  é raiz característica de  $\mathbf{A}$ , a solução em  $\mathbf{x}$  da equação  $(\mathbf{A} - \lambda_j \mathbf{I}_n)\mathbf{x} = 0$  é o vetor característico correspondente,  $\mathbf{x}_j$ .



# Raízes características

Resultados:

- O produto das raízes características de  $\mathbf{A}$  é  $\det(\mathbf{A})$ ;



# Raízes características

Resultados:

- O produto das raízes características de  $\mathbf{A}$  é  $\det(\mathbf{A})$ ;
- A soma das raízes características de  $\mathbf{A}$  é o traço de  $\mathbf{A}$ ;



# Raízes características

Resultados:

- O produto das raízes características de  $\mathbf{A}$  é  $\det(\mathbf{A})$ ;
- A soma das raízes características de  $\mathbf{A}$  é o traço de  $\mathbf{A}$ ;
- Se o posto de  $\mathbf{A}$  é igual a  $r$ ,  $r(\mathbf{A}) = r$ , zero é raiz da equação com multiplicidade  $n - r$ .



# Raízes características

Resultados:

- O produto das raízes características de  $\mathbf{A}$  é  $\det(\mathbf{A})$ ;
- A soma das raízes características de  $\mathbf{A}$  é o traço de  $\mathbf{A}$ ;
- Se o posto de  $\mathbf{A}$  é igual a  $r$ ,  $r(\mathbf{A}) = r$ , zero é raiz da equação com multiplicidade  $n - r$ .



# Formas quadráticas

A função  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  de  $n$  variáveis reais  $x_1, x_2, \dots, x_n$  é uma forma quadrática se

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x},$$



# Formas quadráticas

A função  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  de  $n$  variáveis reais  $x_1, x_2, \dots, x_n$  é uma forma quadrática se

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x},$$

em que  $\mathbf{x} = (x_1 x_2 \cdots x_n)^T$



# Formas quadráticas

A função  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  de  $n$  variáveis reais  $x_1, x_2, \dots, x_n$  é uma forma quadrática se

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x},$$

em que  $\mathbf{x} = (x_1 x_2 \cdots x_n)^T$  e  $\mathbf{A} = (a_{ij})$ , uma matriz simétrica  $n \times n$ , é dita matriz da forma quadrática.



# Formas quadráticas

A função  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  de  $n$  variáveis reais  $x_1, x_2, \dots, x_n$  é uma forma quadrática se

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j = \mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x},$$

em que  $\mathbf{x} = (x_1 x_2 \cdots x_n)^\top$  e  $\mathbf{A} = (a_{ij})$ , uma matriz simétrica  $n \times n$ , é dita matriz da forma quadrática.



# Formas quadráticas

Nós podemos classificar as formas quadráticas em:

- 1  $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$  é positiva definida se  $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} > 0$ , para todo  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ ;



# Formas quadráticas

Nós podemos classificar as formas quadráticas em:

- ①  $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$  é positiva definida se  $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} > 0$ , para todo  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ ;
- ②  $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$  é positiva semidefinida se  $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \geq 0$ , para pelo menos um  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ ;



# Formas quadráticas

Nós podemos classificar as formas quadráticas em:

- ①  $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$  é positiva definida se  $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} > 0$ , para todo  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ ;
- ②  $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$  é positiva semidefinida se  $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \geq 0$ , para pelo menos um  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ ;
- ③  $\mathbf{A}$  é dita não negativa se for positiva definida ou positiva semidefinida;



# Formas quadráticas

Nós podemos classificar as formas quadráticas em:

- ①  $\mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x}$  é positiva definida se  $\mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x} > 0$ , para todo  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ ;
- ②  $\mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x}$  é positiva semidefinida se  $\mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x} \geq 0$ , para pelo menos um  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ ;
- ③  $\mathbf{A}$  é dita não negativa se for positiva definida ou positiva semidefinida;
- ④  $\mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x}$  é não negativa definida se  $-\mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x}$  é positiva definida



# Formas quadráticas

Nós podemos classificar as formas quadráticas em:

- ①  $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$  é positiva definida se  $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} > 0$ , para todo  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ ;
- ②  $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$  é positiva semidefinida se  $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \geq 0$ , para pelo menos um  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ ;
- ③  $\mathbf{A}$  é dita não negativa se for positiva definida ou positiva semidefinida;
- ④  $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$  é não negativa definida se  $-\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$  é positiva definida e é negativa semidefinida se  $-\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$  é positiva semidefinida.



# Formas quadráticas

Nós podemos classificar as formas quadráticas em:

- ①  $\mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x}$  é positiva definida se  $\mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x} > 0$ , para todo  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ ;
- ②  $\mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x}$  é positiva semidefinida se  $\mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x} \geq 0$ , para pelo menos um  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ ;
- ③  $\mathbf{A}$  é dita não negativa se for positiva definida ou positiva semidefinida;
- ④  $\mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x}$  é não negativa definida se  $-\mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x}$  é positiva definida e é negativa semidefinida se  $-\mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x}$  é positiva semidefinida.



# Formas quadráticas

**Exemplo.** Seja  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^\top$  um vetor aleatório  $n$ -dimensional com matriz de covariâncias  $\Sigma$ . A matriz  $\Sigma$  é não negativa definida,



# Formas quadráticas

**Exemplo.** Seja  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^\top$  um vetor aleatório  $n$ -dimensional com matriz de covariâncias  $\Sigma$ . A matriz  $\Sigma$  é não negativa definida, pois, se  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)^\top$  vetor não aleatório

$$\text{Var}(a_1X_1 + \dots + a_nX_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j \text{Cov}(X_i, X_j) = \mathbf{a}^\top \Sigma \mathbf{a} \geq 0, \quad \forall \mathbf{a} \neq \mathbf{0}.$$



# Formas quadráticas

**Exemplo.** Seja  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^\top$  um vetor aleatório  $n$ -dimensional com matriz de covariâncias  $\Sigma$ . A matriz  $\Sigma$  é não negativa definida, pois, se  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)^\top$  vetor não aleatório

$$\text{Var}(a_1X_1 + \dots + a_nX_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j \text{Cov}(X_i, X_j) = \mathbf{a}^\top \Sigma \mathbf{a} \geq 0, \quad \forall \mathbf{a} \neq \mathbf{0}.$$

**Observação:** A matriz  $\Sigma$  será positiva definida se somente se não existir relações lineares entre as variáveis aleatórias  $X_1, \dots, X_n$ .



# Formas quadráticas

**Exemplo.** Seja  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^\top$  um vetor aleatório  $n$ -dimensional com matriz de covariâncias  $\Sigma$ . A matriz  $\Sigma$  é não negativa definida, pois, se  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)^\top$  vetor não aleatório

$$\text{Var}(a_1X_1 + \dots + a_nX_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j \text{Cov}(X_i, X_j) = \mathbf{a}^\top \Sigma \mathbf{a} \geq 0, \quad \forall \mathbf{a} \neq \mathbf{0}.$$

**Observação:** A matriz  $\Sigma$  será positiva definida se somente se não existir relações lineares entres as variáveis aleatórias  $X_1, \dots, X_n$ .



# Formas quadráticas

**Transformações.** Seja  $\mathbf{y} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{x}$  uma transformação de  $\mathbf{x}$ ,



# Formas quadráticas

**Transformações.** Seja  $\mathbf{y} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{x}$  uma transformação de  $\mathbf{x}$ , em que  $\mathbf{B}$  é uma matriz não singular, isto é  $\mathbf{x} = \mathbf{B}\mathbf{y}$ .



# Formas quadráticas

**Transformações.** Seja  $\mathbf{y} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{x}$  uma transformação de  $\mathbf{x}$ , em que  $\mathbf{B}$  é uma matriz não singular, isto é  $\mathbf{x} = \mathbf{B}\mathbf{y}$ . Então

$$Q = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{y}^T \mathbf{B}^T \mathbf{A} \mathbf{B} \mathbf{y} = \mathbf{y}^T \mathbf{C} \mathbf{y}, \quad (3)$$



# Formas quadráticas

**Transformações.** Seja  $\mathbf{y} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{x}$  uma transformação de  $\mathbf{x}$ , em que  $\mathbf{B}$  é uma matriz não singular, isto é  $\mathbf{x} = \mathbf{B}\mathbf{y}$ . Então

$$Q = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{y}^T \mathbf{B}^T \mathbf{A} \mathbf{B} \mathbf{y} = \mathbf{y}^T \mathbf{C} \mathbf{y}, \quad (3)$$

em que  $\mathbf{C} = \mathbf{B}^T \mathbf{A} \mathbf{B}$ , é a forma quadrática nas novas variáveis.



# Formas quadráticas

**Transformações.** Seja  $\mathbf{y} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{x}$  uma transformação de  $\mathbf{x}$ , em que  $\mathbf{B}$  é uma matriz não singular, isto é  $\mathbf{x} = \mathbf{B}\mathbf{y}$ . Então

$$Q = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{y}^T \mathbf{B}^T \mathbf{A} \mathbf{B} \mathbf{y} = \mathbf{y}^T \mathbf{C} \mathbf{y}, \quad (3)$$

em que  $\mathbf{C} = \mathbf{B}^T \mathbf{A} \mathbf{B}$ , é a forma quadrática nas novas variáveis.



# Formas quadráticas

**Resultados.** De (3), nós temos os seguintes resultados



# Formas quadráticas

**Resultados.** De (3), nós temos os seguintes resultados

① Existe uma matriz diagonal  $\mathbf{D}$   $n \times n$  tal que

$$Q = \mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{y}^\top \mathbf{B}^\top \mathbf{A} \mathbf{B} \mathbf{y} = \mathbf{y}^\top \mathbf{D} \mathbf{y} = d_1 y_1^2 + \cdots + d_n y_n^2,$$



# Formas quadráticas

**Resultados.** De (3), nós temos os seguintes resultados

- ① Existe uma matriz diagonal  $\mathbf{D}$   $n \times n$  tal que

$$Q = \mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{y}^\top \mathbf{B}^\top \mathbf{A} \mathbf{B} \mathbf{y} = \mathbf{y}^\top \mathbf{D} \mathbf{y} = d_1 y_1^2 + \cdots + d_n y_n^2,$$

em que  $d_1, \dots, d_n$  são elementos da diagonal de  $\mathbf{D}$ .



# Formas quadráticas

**Resultados.** De (3), nós temos os seguintes resultados

- ① Existe uma matriz diagonal  $\mathbf{D}$   $n \times n$  tal que

$$Q = \mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{y}^\top \mathbf{B}^\top \mathbf{A} \mathbf{B} \mathbf{y} = \mathbf{y}^\top \mathbf{D} \mathbf{y} = d_1 y_1^2 + \cdots + d_n y_n^2,$$

em que  $d_1, \dots, d_n$  são elementos da diagonal de  $\mathbf{D}$ .

- ② Se  $\mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x}$  é positiva definida, existe uma transformação  $\mathbf{y} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{x}$  tal que



# Formas quadráticas

**Resultados.** De (3), nós temos os seguintes resultados

- ① Existe uma matriz diagonal  $\mathbf{D}$   $n \times n$  tal que

$$Q = \mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{y}^\top \mathbf{B}^\top \mathbf{A} \mathbf{B} \mathbf{y} = \mathbf{y}^\top \mathbf{D} \mathbf{y} = d_1 y_1^2 + \cdots + d_n y_n^2,$$

em que  $d_1, \dots, d_n$  são elementos da diagonal de  $\mathbf{D}$ .

- ② Se  $\mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x}$  é positiva definida, existe uma transformação  $\mathbf{y} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{x}$  tal que

$$\mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{y}^\top \mathbf{y} = y_1^2 + \cdots + y_n^2.$$



# Formas quadráticas

**Resultados.** De (3), nós temos os seguintes resultados

- ① Existe uma matriz diagonal  $\mathbf{D}$   $n \times n$  tal que

$$Q = \mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{y}^\top \mathbf{B}^\top \mathbf{A} \mathbf{B} \mathbf{y} = \mathbf{y}^\top \mathbf{D} \mathbf{y} = d_1 y_1^2 + \cdots + d_n y_n^2,$$

em que  $d_1, \dots, d_n$  são elementos da diagonal de  $\mathbf{D}$ .

- ② Se  $\mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x}$  é positiva definida, existe uma transformação  $\mathbf{y} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{x}$  tal que

$$\mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{y}^\top \mathbf{y} = y_1^2 + \cdots + y_n^2.$$



# Formas quadráticas

**Teorema 1.** Seja  $\mathbf{A}$ ,  $n \times n$  uma matriz positiva semi definida, então



# Formas quadráticas

**Teorema 1.** Seja  $\mathbf{A}$ ,  $n \times n$  uma matriz positiva semi definida, então

①  $r(\mathbf{A}) < n$ ;



# Formas quadráticas

**Teorema 1.** Seja  $\mathbf{A}$ ,  $n \times n$  uma matriz positiva semi definida, então

- ①  $r(\mathbf{A}) < n$ ;
- ②  $a_{ii} \geq 0$ ,  $\forall i = 1, \dots, n$  e se  $a_{jj} = 0$ , todo elemento da  $j$ -ésima linha e  $j$ -ésima coluna é zero;



# Formas quadráticas

**Teorema 1.** Seja  $\mathbf{A}$ ,  $n \times n$  uma matriz positiva semi definida, então

- ①  $r(\mathbf{A}) < n$ ;
- ②  $a_{ii} \geq 0$ ,  $\forall i = 1, \dots, n$  e se  $a_{jj} = 0$ , todo elemento da  $j$ -ésima linha e  $j$ -ésima coluna é zero;
- ③  $\mathbf{P}^T \mathbf{A} \mathbf{P}$  é positiva semi definida, para toda matriz  $n \times n$   $\mathbf{P}$ .



# Formas quadráticas

**Teorema 1.** Seja  $\mathbf{A}$ ,  $n \times n$  uma matriz positiva semi definida, então

- ①  $r(\mathbf{A}) < n$ ;
- ②  $a_{ii} \geq 0$ ,  $\forall i = 1, \dots, n$  e se  $a_{jj} = 0$ , todo elemento da  $j$ -ésima linha e  $j$ -ésima coluna é zero;
- ③  $\mathbf{P}^T \mathbf{A} \mathbf{P}$  é positiva semi definida, para toda matriz  $n \times n$   $\mathbf{P}$ .



# Formas quadráticas

**Teorema 2.** Seja  $\mathbf{A}$ ,  $n \times n$  uma matriz positiva definida, então



**Teorema 2.** Seja  $\mathbf{A}$ ,  $n \times n$  uma matriz positiva definida, então

①  $r(\mathbf{A}) = n$ ;

**Teorema 2.** Seja  $\mathbf{A}$ ,  $n \times n$  uma matriz positiva definida, então

①  $r(\mathbf{A}) = n$ ;

②  $a_{ii} \geq 0, \forall i = 1, \dots, n$ ;

# Formas quadráticas

**Teorema 2.** Seja  $\mathbf{A}$ ,  $n \times n$  uma matriz positiva definida, então

- ①  $r(\mathbf{A}) = n$ ;
- ②  $a_{ii} \geq 0, \forall i = 1, \dots, n$ ;
- ③  $\mathbf{P}^T \mathbf{A} \mathbf{P}$  é positiva definida, para qualquer matriz  $n \times n$   $\mathbf{P}$  não singular.



# Formas quadráticas

**Teorema 2.** Seja  $\mathbf{A}$ ,  $n \times n$  uma matriz positiva definida, então

- ①  $r(\mathbf{A}) = n$ ;
- ②  $a_{ii} \geq 0, \forall i = 1, \dots, n$ ;
- ③  $\mathbf{P}^T \mathbf{A} \mathbf{P}$  é positiva definida, para qualquer matriz  $n \times n$   $\mathbf{P}$  não singular.



**Teorema 3.** Uma matriz  $n \times n$   $\mathbf{A}$  é positiva semi definida se e só se



# Formas quadráticas

**Teorema 3.** Uma matriz  $n \times n$  **A** é positiva semi definida se e só se

- 1 Existe **B**,  $n \times n$ ,  $r(\mathbf{B}) < n$  tal que  $\mathbf{B}^T \mathbf{B} = \mathbf{A}$ ;



# Formas quadráticas

**Teorema 3.** Uma matriz  $n \times n$   $\mathbf{A}$  é positiva semi definida se e só se

- 1 Existe  $\mathbf{B}$ ,  $n \times n$ ,  $r(\mathbf{B}) < n$  tal que  $\mathbf{B}^T \mathbf{B} = \mathbf{A}$ ;
- 2 As raízes características de  $\mathbf{A}$  são não negativas



# Formas quadráticas

**Teorema 3.** Uma matriz  $n \times n$   $\mathbf{A}$  é positiva semi definida se e só se

- ① Existe  $\mathbf{B}$ ,  $n \times n$ ,  $r(\mathbf{B}) < n$  tal que  $\mathbf{B}^T \mathbf{B} = \mathbf{A}$ ;
- ② As raízes características de  $\mathbf{A}$  são não negativas e no mínimo uma delas é igual a zero.



# Formas quadráticas

**Teorema 3.** Uma matriz  $n \times n$   $\mathbf{A}$  é positiva semi definida se e só se

- ① Existe  $\mathbf{B}$ ,  $n \times n$ ,  $r(\mathbf{B}) < n$  tal que  $\mathbf{B}^T \mathbf{B} = \mathbf{A}$ ;
- ② As raízes características de  $\mathbf{A}$  são não negativas e no mínimo uma delas é igual a zero.



# Formas quadráticas

**Teorema 4.** Uma matriz  $n \times n$   $\mathbf{A}$  é positiva definida se e só se



# Formas quadráticas

**Teorema 4.** Uma matriz  $n \times n$   $\mathbf{A}$  é positiva definida se e só se

- 1 Existe  $\mathbf{B}$ ,  $n \times n$ ,  $r(\mathbf{B}) = n$  tal que  $\mathbf{B}^\top \mathbf{B} = \mathbf{A}$ ;



# Formas quadráticas

**Teorema 4.** Uma matriz  $n \times n$   $\mathbf{A}$  é positiva definida se e só se

- 1 Existe  $\mathbf{B}$ ,  $n \times n$ ,  $r(\mathbf{B}) = n$  tal que  $\mathbf{B}^T \mathbf{B} = \mathbf{A}$ ;
- 2 As raízes características de  $\mathbf{A}$  são todas positivas;



# Formas quadráticas

**Teorema 4.** Uma matriz  $n \times n$   $\mathbf{A}$  é positiva definida se e só se

- 1 Existe  $\mathbf{B}$ ,  $n \times n$ ,  $r(\mathbf{B}) = n$  tal que  $\mathbf{B}^T \mathbf{B} = \mathbf{A}$ ;
- 2 As raízes características de  $\mathbf{A}$  são todas positivas;
- 3 E

$$a_{11} > 0, \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} > 0, \dots, \det(\mathbf{A}) > 0.$$



# Formas quadráticas

**Teorema 4.** Uma matriz  $n \times n$   $\mathbf{A}$  é positiva definida se e só se

- 1 Existe  $\mathbf{B}$ ,  $n \times n$ ,  $r(\mathbf{B}) = n$  tal que  $\mathbf{B}^\top \mathbf{B} = \mathbf{A}$ ;
- 2 As raízes características de  $\mathbf{A}$  são todas positivas;
- 3 E

$$a_{11} > 0, \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} > 0, \dots, \det(\mathbf{A}) > 0.$$



# Derivadas matriciais

Seja  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^\top$  e  $f(\mathbf{x})$  uma função real de  $x_1, \dots, x_n$ . A derivada de  $f(\mathbf{x})$  com respeito a  $\mathbf{x}$  é



# Derivadas matriciais

Seja  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^\top$  e  $f(\mathbf{x})$  uma função real de  $x_1, \dots, x_n$ . A derivada de  $f(\mathbf{x})$  com respeito a  $\mathbf{x}$  é

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \left( \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_1} \quad \dots \quad \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_n} \right)^\top.$$



# Derivadas matriciais

Seja  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^\top$  e  $f(\mathbf{x})$  uma função real de  $x_1, \dots, x_n$ . A derivada de  $f(\mathbf{x})$  com respeito a  $\mathbf{x}$  é

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \left( \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_1} \quad \dots \quad \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_n} \right)^\top.$$



# Derivadas matriciais

**Teorema 1.** Se  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)^\top$  é um vetor de constantes



# Derivadas matriciais

**Teorema 1.** Se  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)^\top$  é um vetor de constantes e  $f(\mathbf{x}) = \mathbf{a}^\top \mathbf{x} = \mathbf{x}^\top \mathbf{a}$  (linear),



# Derivadas matriciais

**Teorema 1.** Se  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)^\top$  é um vetor de constantes e  $f(\mathbf{x}) = \mathbf{a}^\top \mathbf{x} = \mathbf{x}^\top \mathbf{a}$  (linear), então

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{a}.$$



# Derivadas matriciais

**Teorema 1.** Se  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)^\top$  é um vetor de constantes e  $f(\mathbf{x}) = \mathbf{a}^\top \mathbf{x} = \mathbf{x}^\top \mathbf{a}$  (linear), então

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{a}.$$

Teorema 2.



# Derivadas matriciais

**Teorema 1.** Se  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)^\top$  é um vetor de constantes e  $f(\mathbf{x}) = \mathbf{a}^\top \mathbf{x} = \mathbf{x}^\top \mathbf{a}$  (linear), então

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{a}.$$

**Teorema 2.** Se  $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x}$  (forma quadrática),



# Derivadas matriciais

**Teorema 1.** Se  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)^\top$  é um vetor de constantes e  $f(\mathbf{x}) = \mathbf{a}^\top \mathbf{x} = \mathbf{x}^\top \mathbf{a}$  (linear), então

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{a}.$$

**Teorema 2.** Se  $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x}$  (forma quadrática),  $\mathbf{A}$  uma matriz de constantes,



# Derivadas matriciais

**Teorema 1.** Se  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)^\top$  é um vetor de constantes e  $f(\mathbf{x}) = \mathbf{a}^\top \mathbf{x} = \mathbf{x}^\top \mathbf{a}$  (linear), então

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{a}.$$

**Teorema 2.** Se  $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x}$  (forma quadrática),  $\mathbf{A}$  uma matriz de constantes, então

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = 2\mathbf{A}\mathbf{x}.$$



# Derivadas matriciais

**Teorema 1.** Se  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)^\top$  é um vetor de constantes e  $f(\mathbf{x}) = \mathbf{a}^\top \mathbf{x} = \mathbf{x}^\top \mathbf{a}$  (linear), então

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{a}.$$

**Teorema 2.** Se  $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x}$  (forma quadrática),  $\mathbf{A}$  uma matriz de constantes, então

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = 2\mathbf{A}\mathbf{x}.$$



# Decomposições

Uma matriz simétrica **A** pode ser fatorada em

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{D}\mathbf{L}^T,$$



# Decomposições

Uma matriz simétrica **A** pode ser fatorada em

$$\mathbf{A} = \mathbf{LDL}^T,$$

em que **L** é uma matriz diagonal inferior, **L**<sup>T</sup> é uma matriz diagonal superior e **D** é uma matriz diagonal.



# Decomposições

Uma matriz simétrica **A** pode ser fatorada em

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{D}\mathbf{L}^T,$$

em que **L** é uma matriz diagonal inferior, **L**<sup>T</sup> é uma matriz diagonal superior e **D** é uma matriz diagonal.



# Decomposições

Seja uma matriz  $\mathbf{A}$ ,  $p \times p$ , positiva definida. Então existe uma única matriz triangular superior  $\mathbf{T}$ , de posto  $p$ ,



# Decomposições

Seja uma matriz  $\mathbf{A}$ ,  $p \times p$ , positiva definida. Então existe uma única matriz triangular superior  $\mathbf{T}$ , de posto  $p$ , tal que

$$\mathbf{A} = \mathbf{T}^T \mathbf{T}$$



# Decomposições

Seja uma matriz  $\mathbf{A}$ ,  $p \times p$ , positiva definida. Então existe uma única matriz triangular superior  $\mathbf{T}$ , de posto  $p$ , tal que

$$\mathbf{A} = \mathbf{T}^T \mathbf{T}$$

e  $t_{ii} > 0$ ,  $i = 1, \dots, p$ .



# Decomposições

Seja uma matriz  $\mathbf{A}$ ,  $p \times p$ , positiva definida. Então existe uma única matriz triangular superior  $\mathbf{T}$ , de posto  $p$ , tal que

$$\mathbf{A} = \mathbf{T}^T \mathbf{T}$$

e  $t_{ii} > 0$ ,  $i = 1, \dots, p$ . Para a determinação de  $\mathbf{T}$ , ver Graybill (1983), por exemplo.



# Decomposições

Seja uma matriz  $\mathbf{A}$ ,  $p \times p$ , positiva definida. Então existe uma única matriz triangular superior  $\mathbf{T}$ , de posto  $p$ , tal que

$$\mathbf{A} = \mathbf{T}^T \mathbf{T}$$

e  $t_{ii} > 0$ ,  $i = 1, \dots, p$ . Para a determinação de  $\mathbf{T}$ , ver Graybill (1983), por exemplo.



**Decomposição de Cholesky.** Uma matriz  $\mathbf{A}$  é positiva definida se e só se existir  $\mathbf{W}$  não singular



# Decomposições

**Decomposição de Cholesky.** Uma matriz **A** é positiva definida se e só se existir **W** não singular tal que

$$A = WW^T.$$



# Decomposições

**Decomposição de Cholesky.** Uma matriz  $\mathbf{A}$  é positiva definida se e só se existir  $\mathbf{W}$  não singular tal que

$$\mathbf{A} = \mathbf{W}\mathbf{W}^T.$$



# Decomposições

**Decomposição espectral.** Qualquer matriz simétrica  $\mathbf{A}$ ,  $p \times p$ ,



# Decomposições

**Decomposição espectral.** Qualquer matriz simétrica  $\mathbf{A}$ ,  $p \times p$ , pode ser escrita como

$$\mathbf{A} = \mathbf{\Gamma} \mathbf{D} \mathbf{\Gamma}^T,$$



# Decomposições

**Decomposição espectral.** Qualquer matriz simétrica  $\mathbf{A}$ ,  $p \times p$ , pode ser escrita como

$$\mathbf{A} = \mathbf{\Gamma} \mathbf{D} \mathbf{\Gamma}^T,$$

em que  $\mathbf{D} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ ,  $\mathbf{\Gamma} = (\mathbf{x}_1 \cdots \mathbf{x}_p)$ ,  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  são as raízes características de  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_p$  são os correspondentes vetores característicos normalizados, isto é,  $\mathbf{x}_i^T \mathbf{x}_i = 1$ ,  $i = 1, \dots, p$ .



# Decomposições

**Decomposição espectral.** Qualquer matriz simétrica  $\mathbf{A}$ ,  $p \times p$ , pode ser escrita como

$$\mathbf{A} = \mathbf{\Gamma} \mathbf{D} \mathbf{\Gamma}^T,$$

em que  $\mathbf{D} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ ,  $\mathbf{\Gamma} = (\mathbf{x}_1 \ \dots \ \mathbf{x}_p)$ ,  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  são as raízes características de  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_p$  são os correspondentes vetores característicos normalizados, isto é,  $\mathbf{x}_i^T \mathbf{x}_i = 1$ ,  $i = 1, \dots, p$ .



# Decomposições

Verifica-se que

$$\mathbf{A} = \mathbf{\Gamma D \Gamma}^T = \lambda_1 \mathbf{x}_1 \mathbf{x}_1^T + \cdots + \lambda_p \mathbf{x}_p \mathbf{x}_p^T.$$



# Decomposições

Verifica-se que

$$\mathbf{A} = \mathbf{\Gamma D \Gamma}^T = \lambda_1 \mathbf{x}_1 \mathbf{x}_1^T + \cdots + \lambda_p \mathbf{x}_p \mathbf{x}_p^T.$$

**Observação:** Se  $\mathbf{x}_i$  e  $\mathbf{x}_j$  são dois vetores característicos associados as raízes características diferentes, então  $\mathbf{x}_i^T \mathbf{x}_j = 0$ .



# Decomposições

Verifica-se que

$$\mathbf{A} = \mathbf{\Gamma D \Gamma}^T = \lambda_1 \mathbf{x}_1 \mathbf{x}_1^T + \cdots + \lambda_p \mathbf{x}_p \mathbf{x}_p^T.$$

**Observação:** Se  $\mathbf{x}_i$  e  $\mathbf{x}_j$  são dois vetores característicos associados as raízes características diferentes, então  $\mathbf{x}_i^T \mathbf{x}_j = 0$ . Nós dizemos que  $\mathbf{x}_i$  e  $\mathbf{x}_j$  são ortogonais.



# Decomposições

Verifica-se que

$$\mathbf{A} = \mathbf{\Gamma D \Gamma}^\top = \lambda_1 \mathbf{x}_1 \mathbf{x}_1^\top + \cdots + \lambda_p \mathbf{x}_p \mathbf{x}_p^\top.$$

**Observação:** Se  $\mathbf{x}_i$  e  $\mathbf{x}_j$  são dois vetores característicos associados as raízes características diferentes, então  $\mathbf{x}_i^\top \mathbf{x}_j = 0$ . Nós dizemos que  $\mathbf{x}_i$  e  $\mathbf{x}_j$  são ortogonais.



# Roteiro

- 1 Operações
- 2 Resultados matriciais
- 3 Estimação
- 4 Referências bibliográficas



# Propriedades dos estimadores

Um estimador  $\hat{\theta}$  de um parâmetro desconhecido  $\theta$  é não viciado se

$$\mathbb{E}(\hat{\theta}) = \theta.$$



# Propriedades dos estimadores

Um estimador  $\hat{\theta}$  de um parâmetro desconhecido  $\theta$  é não viciado se

$$\mathbb{E}(\hat{\theta}) = \theta.$$

Um estimador  $\hat{\theta}$  é um estimador consistente de  $\theta$



# Propriedades dos estimadores

Um estimador  $\hat{\theta}$  de um parâmetro desconhecido  $\theta$  é não viciado se

$$\mathbb{E}(\hat{\theta}) = \theta.$$

Um estimador  $\hat{\theta}$  é um estimador consistente de  $\theta$  se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|\hat{\theta} - \theta| \geq \varepsilon) = 0, \text{ para qualquer } \varepsilon > 0.$$



# Propriedades dos estimadores

Um estimador  $\hat{\theta}$  de um parâmetro desconhecido  $\theta$  é não viciado se

$$\mathbb{E}(\hat{\theta}) = \theta.$$

Um estimador  $\hat{\theta}$  é um estimador consistente de  $\theta$  se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|\hat{\theta} - \theta| \geq \varepsilon) = 0, \text{ para qualquer } \varepsilon > 0.$$



# Propriedades dos estimadores

Um estimador  $\hat{\theta}$  é um estimador suficiente de  $\theta$  se a distribuição condicional das observações dado  $\hat{\theta}$  não depende do parâmetro  $\theta$ .

Um estimador  $\hat{\theta}$  é um estimador de mínima variância de  $\theta$



# Propriedades dos estimadores

Um estimador  $\hat{\theta}$  é um estimador suficiente de  $\theta$  se a distribuição condicional das observações dado  $\hat{\theta}$  não depende do parâmetro  $\theta$ .

Um estimador  $\hat{\theta}$  é um estimador de mínima variância de  $\theta$  se para qualquer outro estimador  $\theta^*$ :

$$\text{Var}(\hat{\theta}) \leq \text{Var}(\theta^*), \text{ para todo } \theta^* > 0.$$



# Propriedades dos estimadores

Um estimador  $\hat{\theta}$  é um estimador suficiente de  $\theta$  se a distribuição condicional das observações dado  $\hat{\theta}$  não depende do parâmetro  $\theta$ .

Um estimador  $\hat{\theta}$  é um estimador de mínima variância de  $\theta$  se para qualquer outro estimador  $\theta^*$ :

$$\text{Var}(\hat{\theta}) \leq \text{Var}(\theta^*), \text{ para todo } \theta^* > 0.$$



# Estimador de máxima verossimilhança

Seja  $Y$  uma variável aleatória com função densidade de probabilidade (FDP) dada por  $f(y; \theta)$ . Dada observações independentes  $Y_1, \dots, Y_n$ ,



# Estimador de máxima verossimilhança

Seja  $Y$  uma variável aleatória com função densidade de probabilidade (FDP) dada por  $f(y; \theta)$ . Dada observações independentes  $Y_1, \dots, Y_n$ , a FDP conjunta dessas observações é

$$f(y_1, \dots, y_n) = \prod_{i=1}^n f(y_i; \theta). \quad (4)$$



# Estimador de máxima verossimilhança

Seja  $Y$  uma variável aleatória com função densidade de probabilidade (FDP) dada por  $f(y; \theta)$ . Dada observações independentes  $Y_1, \dots, Y_n$ , a FDP conjunta dessas observações é

$$f(y_1, \dots, y_n) = \prod_{i=1}^n f(y_i; \theta). \quad (4)$$



# Estimador de máxima verossimilhança

Quando a FDP conjunta (4) é vista em função do parâmetro  $\theta$ , ela é denominada função de verossimilhança e escrita

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n f(y_i; \theta).$$



# Estimador de máxima verossimilhança

Quando a FDP conjunta (4) é vista em função do parâmetro  $\theta$ , ela é denominada função de verossimilhança e escrita

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n f(y_i; \theta).$$

O estimador de máxima verossimilhança (EMV) de  $\theta$ , é o valor do parâmetro desconhecido que maximiza  $L(\theta)$ .



# Estimador de máxima verossimilhança

Quando a FDP conjunta (4) é vista em função do parâmetro  $\theta$ , ela é denominada função de verossimilhança e escrita

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n f(y_i; \theta).$$

O estimador de máxima verossimilhança (EMV) de  $\theta$ , é o valor do parâmetro desconhecido que maximiza  $L(\theta)$ . Sob condições gerais, o EMV é consistente e suficiente.



# Estimador de máxima verossimilhança

Quando a FDP conjunta (4) é vista em função do parâmetro  $\theta$ , ela é denominada função de verossimilhança e escrita

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n f(y_i; \theta).$$

O estimador de máxima verossimilhança (EMV) de  $\theta$ , é o valor do parâmetro desconhecido que maximiza  $L(\theta)$ . Sob condições gerais, o EMV é consistente e suficiente.



# Estimador de mínimos quadrados

Suponha que uma observação amostral tenha a seguinte forma:

$$Y_i = f_i(\theta) + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, n,$$



# Estimador de mínimos quadrados

Suponha que uma observação amostral tenha a seguinte forma:

$$Y_i = f_i(\theta) + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

em que  $f_i(\theta)$  é uma função conhecida de  $\theta$  e  $\varepsilon_i$  é uma variável aleatória, usualmente assumida com média nula.



# Estimador de mínimos quadrados

Suponha que uma observação amostral tenha a seguinte forma:

$$Y_i = f_i(\theta) + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

em que  $f_i(\theta)$  é uma função conhecida de  $\theta$  e  $\varepsilon_i$  é uma variável aleatória, usualmente assumida com média nula.



# Estimador de mínimos quadrados

No método dos mínimos quadrados, para dada uma amostra aleatória, a soma de quadrados

$$Q = \sum_{i=1}^n [Y_i - f_i(\theta)]^2$$

# Estimador de mínimos quadrados

No método dos mínimos quadrados, para dada uma amostra aleatória, a soma de quadrados

$$Q = \sum_{i=1}^n [Y_i - f_i(\theta)]^2$$

é considerada com função do parâmetro  $\theta$ .



# Estimador de mínimos quadrados

No método dos mínimos quadrados, para dada uma amostra aleatória, a soma de quadrados

$$Q = \sum_{i=1}^n [Y_i - f_i(\theta)]^2$$

é considerada com função do parâmetro  $\theta$ . O estimador de mínimos quadrados (EMQ) de  $\theta$  é obtido minimizando  $Q$  com respeito a  $\theta$ .



# Estimador de mínimos quadrados

No método dos mínimos quadrados, para dada uma amostra aleatória, a soma de quadrados

$$Q = \sum_{i=1}^n [Y_i - f_i(\theta)]^2$$

é considerada com função do parâmetro  $\theta$ . O estimador de mínimos quadrados (EMQ) de  $\theta$  é obtido minimizando  $Q$  com respeito a  $\theta$ . Em muitos casos, o EMQ é não viesado e consistente.



# Estimador de mínimos quadrados

No método dos mínimos quadrados, para dada uma amostra aleatória, a soma de quadrados

$$Q = \sum_{i=1}^n [Y_i - f_i(\theta)]^2$$

é considerada com função do parâmetro  $\theta$ . O estimador de mínimos quadrados (EMQ) de  $\theta$  é obtido minimizando  $Q$  com respeito a  $\theta$ . Em muitos casos, o EMQ é não viesado e consistente.



# Roteiro

- 1 Operações
- 2 Resultados matriciais
- 3 Estimação
- 4 Referências bibliográficas



# Referências bibliográficas

Graybill, F. A. (1983). *Matrices with applications in Statistics* (2 ed.).  
Belmont: Wadsworth International Group.



# Obrigado!

✉ [tiago.magalhaes@ufjf.br](mailto:tiago.magalhaes@ufjf.br)

📄 [ufjf.br/tiago\\_magalhaes](http://ufjf.br/tiago_magalhaes)

🌐 Departamento de Estatística, Sala 319

