Teoremas limites

Tiago M. Magalhães

Departamento de Estatística - ICE-UFJF

Juiz de Fora, 14 de janeiro de 2026

Roteiro

Roteiro

Motivação

Os mais importantes resultados teóricos na teoria da probabilidade são os teoremas limites (Ross, 2010). Destes, os mais importantes são as **leis dos grandes números** e os **teoremas centrais do limite**.

Motivação

Os mais importantes resultados teóricos na teoria da probabilidade são os teoremas limites (Ross, 2010). Destes, os mais importantes são as **leis dos grandes números** e os **teoremas centrais do limite**.

Motivação

Usualmente, teoremas são considerados **leis de grandes números** se estiverem interessados em enunciar condições nas quais a média de uma sequência de variáveis aleatórias converge (de alguma forma) para a média esperada.

Motivação

Por outro lado, **teoremas centrais do limite** estão interessados em determinar condições nas quais a soma de um grande número de variáveis aleatórias possui uma distribuição de probabilidade que é aproximadamente normal.

Roteiro

Lei fraca dos grandes números

Seja $X_1, X_2, \ldots$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, com média finita, isto é, $\mathbb{E}(X_n) = \mu < \infty$, $n \geq 1$.

As somas parciais $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ satisfazem

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\text{p}} \mu.$$

Lei fraca dos grandes números

Seja $X_1, X_2, \ldots$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, com média finita, isto é, $\mathbb{E}(X_n) = \mu < \infty$, $n \geq 1$. As somas parciais $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ satisfazem

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\text{p}} \mu.$$

Prova: ver exercício da aula passada.

Lei fraca dos grandes números

Seja $X_1, X_2, \ldots$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, com média finita, isto é, $\mathbb{E}(X_n) = \mu < \infty$, $n \geq 1$. As somas parciais $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ satisfazem

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\text{p}} \mu.$$

Prova: ver exercício da aula passada.

Lei fraca dos grandes números

A lei fraca dos grandes números foi demonstrada por Khinchine (1929). Antes, a demonstração foi originalmente feita por Bernoulli (1713), para o caso de uma sequência de variáveis aleatórias com distribuição Bernoulli,

Lei fraca dos grandes números

A lei fraca dos grandes números foi demonstrada por Khinchine (1929). Antes, a demonstração foi originalmente feita por Bernoulli (1713), para o caso de uma sequência de variáveis aleatórias com distribuição Bernoulli, para estas condições,

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\text{p}} p.$$

Lei fraca dos grandes números

A lei fraca dos grandes números foi demonstrada por Khinchine (1929). Antes, a demonstração foi originalmente feita por Bernoulli (1713), para o caso de uma sequência de variáveis aleatórias com distribuição Bernoulli, para estas condições,

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\mathrm{p}} p.$$

Lei fraca dos grandes números

Seja $X_1, X_2, \ldots$ uma sequência de variáveis aleatórias e consideremos $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Se

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{Var}(S_n)}{n^2} = 0,$$

Lei fraca dos grandes números

Seja $X_1, X_2, \ldots$ uma sequência de variáveis aleatórias e consideremos $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Se

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{Var}(S_n)}{n^2} = 0,$$

então

$$\frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{n} \xrightarrow{\mathrm{p}} 0.$$

Lei fraca dos grandes números

Seja $X_1, X_2, \ldots$ uma sequência de variáveis aleatórias e consideremos $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Se

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{Var}(S_n)}{n^2} = 0,$$

então

$$\frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{n} \xrightarrow{\mathrm{p}} 0.$$

Este caso, mais geral, foi demonstrado por Chebyshev (1867).

Lei fraca dos grandes números

Seja $X_1, X_2, \dots$ uma sequência de variáveis aleatórias e consideremos $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Se

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{Var}(S_n)}{n^2} = 0,$$

então

$$\frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{n} \xrightarrow{\mathrm{p}} 0.$$

Este caso, mais geral, foi demonstrado por Chebyshev (1867).

Roteiro

Lei forte dos grandes números

A lei forte dos grandes números é provavelmente o resultado mais famoso na teoria da probabilidade (Ross, 2010). Ela diz que a média de uma sequência de variáveis aleatórias independentes com mesma distribuição converge, com probabilidade 1, para a média daquela distribuição.

Lei forte dos grandes números

A lei forte dos grandes números é provavelmente o resultado mais famoso na teoria da probabilidade (Ross, 2010). Ela diz que a média de uma sequência de variáveis aleatórias independentes com mesma distribuição converge, com probabilidade 1, para a média daquela distribuição.

Lei forte dos grandes números

Seja $X_1, X_2, \ldots$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, com média finita, ou seja, $\mathbb{E}(X_n) = \mu < \infty$, $n \geq 1$.

As somas parciais $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ satisfazem

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\text{qc}} \mu.$$

Lei forte dos grandes números

Seja $X_1, X_2, \ldots$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, com média finita, ou seja, $\mathbb{E}(X_n) = \mu < \infty$, $n \geq 1$. As somas parciais $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ satisfazem

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\text{qc}} \mu.$$

Lei forte dos grandes números

A lei forte dos grandes números foi demonstrada por Kolmogorov (1933).

Antes, a demonstração foi originalmente feita por Borel (1909), para o caso de uma sequência de variáveis aleatórias com distribuição Bernoulli,

Lei forte dos grandes números

A lei forte dos grandes números foi demonstrada por Kolmogorov (1933).

Antes, a demonstração foi originalmente feita por Borel (1909), para o caso de uma sequência de variáveis aleatórias com distribuição Bernoulli, para estas condições,

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\text{qc}} p.$$

Lei forte dos grandes números

A lei forte dos grandes números foi demonstrada por Kolmogorov (1933). Antes, a demonstração foi originalmente feita por Borel (1909), para o caso de uma sequência de variáveis aleatórias com distribuição Bernoulli, para estas condições,

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\text{qc}} p.$$

Roteiro

1 Motivação

2 Lei fraca dos grandes números

3 Lei forte dos grandes números

4 Teorema central do limite

5 Limites de binomiais para Poisson

6 Referências bibliográficas

Teorema central do limite

O teorema central do limite é um dos resultados mais extraordinários na teoria da probabilidade (Ross, 2010). Em linhas gerais, ele diz que a soma de um grande número de variáveis aleatórias independentes tem uma distribuição que é aproximadamente normal.

Teorema central do limite

O teorema central do limite é um dos resultados mais extraordinários na teoria da probabilidade (Ross, 2010). Em linhas gerais, ele diz que a soma de um grande número de variáveis aleatórias independentes tem uma distribuição que é aproximadamente normal.

Teorema central do limite

Com isso, ele não somente fornece um método simples para o cálculo de probabilidades aproximadas para somas de variáveis aleatórias independentes, mas também ajuda a explicar o extraordinário fato de que frequências empíricas de muitas populações naturais exibem curvas na forma de um sino (isto é, normais).

Teorema central do limite

Seja $X_1, X_2, \ldots$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com média μ e variância σ^2. Seja $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, então

$$\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathrm{d}} \mathrm{N}(0,1).$$

Teorema central do limite

Seja $X_1, X_2, \ldots$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com média μ e variância σ^2. Seja $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, então

$$\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathrm{d}} \mathrm{N}(0, 1).$$

Teorema central do limite

Prova. Seja

$$Z_n = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i}{\sigma\sqrt{n}}.$$

A função geradora de momentos de Z_n, $M_{Z_n}(t)$, é dada por

$$\begin{aligned} M_{Z_n}(t) &= \mathbb{E}(e^{tZ_n}) = \mathbb{E}\left(\exp\{tZ_n\}\right) = \mathbb{E}\left(\exp\left\{t\frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i}{\sigma\sqrt{n}}\right\}\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\exp\left\{\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}(Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n)\right\}\right). \end{aligned}$$

Teorema central do limite

Prova. Seja

$$Z_n = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i}{\sigma\sqrt{n}}.$$

A função geradora de momentos de Z_n, $M_{Z_n}(t)$, é dada por

$$\begin{aligned} M_{Z_n}(t) &= \mathbb{E}(e^{tZ_n}) = \mathbb{E}\left(\exp\left\{tZ_n\right\}\right) = \mathbb{E}\left(\exp\left\{t\frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i}{\sigma\sqrt{n}}\right\}\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\exp\left\{\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}(Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n)\right\}\right). \end{aligned}$$

Teorema central do limite

Dando prosseguimento, nós temos que

$$
\begin{aligned}
M_{Z_n}(t) &= \mathbb{E}\left(\exp\left\{\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}Y_1\right\}\times\cdots\times\exp\left\{\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}Y_n\right\}\right)\\
&\overset{\text{Ind.}}{=} \mathbb{E}\left(\exp\left\{\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}Y_1\right\}\right)\times\cdots\times\mathbb{E}\left(\exp\left\{\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}Y_n\right\}\right) \qquad (1)\\
&\overset{\text{I.D.}}{=} \left[\mathbb{E}\left(\exp\left\{\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}Y_1\right\}\right)\right]^n = \left[M_{Y_1}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right]^n.
\end{aligned}
$$

Ou seja, a FGM da VA Z_n, avaliada no ponto t, pode ser escrita como uma função da FGM da VA $Y_1 = X_1 - \mu$, avaliada no ponto $t/\sigma\sqrt{n}$.

Dando prosseguimento, nós temos que

$$\begin{aligned}
M_{Z_n}(t) &= \mathbb{E}\left(\exp\left\{\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}Y_1\right\}\times\cdots\times\exp\left\{\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}Y_n\right\}\right)\\
&\overset{\text{Ind.}}{=} \mathbb{E}\left(\exp\left\{\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}Y_1\right\}\right)\times\cdots\times\mathbb{E}\left(\exp\left\{\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}Y_n\right\}\right)\\
&\overset{\text{I.D.}}{=} \left[\mathbb{E}\left(\exp\left\{\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}Y_1\right\}\right)\right]^n = \left[M_{Y_1}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right]^n.
\end{aligned} \tag{1}$$

Ou seja, a FGM da VA Z_n, avaliada no ponto t, pode ser escrita como uma função da FGM da VA $Y_1 = X_1 - \mu$, avaliada no ponto $t/\sigma\sqrt{n}$.

Teorema central do limite

Antes de nós continuarmos, nós iremos discutir algumas propriedades da FGM de $Y_1 = X_1 - \mu$ e, por simplicidade, avaliada no ponto t. Usando série de Taylor (1715) até o primeiro termo e em torno de $t = 0$,

Teorema central do limite

Antes de nós continuarmos, nós iremos discutir algumas propriedades da FGM de $Y_1 = X_1 - \mu$ e, por simplicidade, avaliada no ponto t. Usando série de Taylor (1715) até o primeiro termo e em torno de $t = 0$, nós temos que

$$M_{Y_1}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{M_{Y_1}^{(n)}(0)}{n!} t^n = M_{Y_1}^{(0)}(0) + t\, M_{Y_1}^{(1)}(0) + \frac{t^2}{2} M_{Y_1}^{(2)}(s), \qquad (2)$$

Teorema central do limite

Antes de nós continuarmos, nós iremos discutir algumas propriedades da FGM de $Y_1 = X_1 - \mu$ e, por simplicidade, avaliada no ponto t. Usando série de Taylor (1715) até o primeiro termo e em torno de $t = 0$, nós temos que

$$M_{Y_1}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{M_{Y_1}^{(n)}(0)}{n!} t^n = M_{Y_1}^{(0)}(0) + t\, M_{Y_1}^{(1)}(0) + \frac{t^2}{2} M_{Y_1}^{(2)}(s), \qquad (2)$$

em que $0 < s < t$ e $M_{Y_1}^{(n)}(\cdot)$ é a n-ésima derivada de $M_{Y_1}(\cdot)$.

Teorema central do limite

Antes de nós continuarmos, nós iremos discutir algumas propriedades da FGM de $Y_1 = X_1 - \mu$ e, por simplicidade, avaliada no ponto t. Usando série de Taylor (1715) até o primeiro termo e em torno de $t = 0$, nós temos que

$$M_{Y_1}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{M_{Y_1}^{(n)}(0)}{n!} t^n = M_{Y_1}^{(0)}(0) + t\, M_{Y_1}^{(1)}(0) + \frac{t^2}{2} M_{Y_1}^{(2)}(s), \qquad (2)$$

em que $0 < s < t$ e $M_{Y_1}^{(n)}(\cdot)$ é a n-ésima derivada de $M_{Y_1}(\cdot)$.

Teorema central do limite

Notem que, pelas propriedades da FGM, nós temos que

$$M_{Y_1}^{(0)}(0) = M_{Y_1}(0) = 1,$$

$$M_{Y_1}^{(1)}(0) = \mathbb{E}(Y_1) = \mathbb{E}(X_1 - \mu) = 0,$$

$$M_{Y_1}^{(2)}(0) = \mathbb{E}(Y_1^2) = \mathbb{E}[(X_1 - \mu)^2] = \sigma^2.$$

Notem que, pelas propriedades da FGM, nós temos que

$$M_{Y_1}^{(0)}(0) = M_{Y_1}(0) = 1,$$

$$M_{Y_1}^{(1)}(0) = \mathbb{E}(Y_1) = \mathbb{E}(X_1 - \mu) = 0,$$

$$M_{Y_1}^{(2)}(0) = \mathbb{E}(Y_1^2) = \mathbb{E}[(X_1 - \mu)^2] = \sigma^2.$$

Teorema central do limite

Usando os dois primeiros resultados anteriores, nós podemos simplificar (2),

da seguinte forma

$$M_{Y_1}(t) = 1 + \frac{t^2}{2} M_{Y_1}^{(2)}(s).$$

Teorema central do limite

Usando os dois primeiros resultados anteriores, nós podemos simplificar (2), da seguinte forma

$$M_{Y_1}(t) = 1 + \frac{t^2}{2} M_{Y_1}^{(2)}(s).$$

Somando e subtraindo $\sigma^2 t^2/2$ na equação acima,

$$\begin{aligned} M_{Y_1}(t) &= 1 + \frac{\sigma^2 t^2}{2} - \frac{\sigma^2 t^2}{2} + \frac{t^2}{2} M_{Y_1}^{(2)}(s) \qquad (3) \\ &= 1 + \frac{\sigma^2 t^2}{2} + \left[M_{Y_1}^{(2)}(s) - \sigma^2 \right] \frac{t^2}{2}. \end{aligned}$$

Usando os dois primeiros resultados anteriores, nós podemos simplificar (2), da seguinte forma

$$M_{Y_1}(t) = 1 + \frac{t^2}{2} M_{Y_1}^{(2)}(s).$$

Somando e subtraindo $\sigma^2 t^2/2$ na equação acima,

$$\begin{aligned} M_{Y_1}(t) &= 1 + \frac{\sigma^2 t^2}{2} - \frac{\sigma^2 t^2}{2} + \frac{t^2}{2} M_{Y_1}^{(2)}(s) \qquad (3) \\ &= 1 + \frac{\sigma^2 t^2}{2} + \left[M_{Y_1}^{(2)}(s) - \sigma^2 \right] \frac{t^2}{2}. \end{aligned}$$

Teorema central do limite

A equação (3) é a FGM de Y_1. Como visto anteriormente, a FGM de Z_n é uma função da FGM de Y_1, avaliada em $t/\sigma\sqrt{n}$.

Teorema central do limite

A equação (3) é a FGM de Y_1. Como visto anteriormente, a FGM de Z_n é uma função da FGM de Y_1, avaliada em $t/\sigma\sqrt{n}$. Substituindo (3), avaliando no ponto $t/\sigma\sqrt{n}$, em (1),

Teorema central do limite

A equação (3) é a FGM de Y_1. Como visto anteriormente, a FGM de Z_n é uma função da FGM de Y_1, avaliada em $t/\sigma\sqrt{n}$. Substituindo (3), avaliando no ponto $t/\sigma\sqrt{n}$, em (1), nós temos que

$$M_{Z_n}(t) = \left\{1 + \frac{t^2}{2n} + \left[M_{Y_1}^{(2)}(s) - \sigma^2\right]\frac{t^2}{2n\sigma^2}\right\}^n, \tag{4}$$

Teorema central do limite

A equação (3) é a FGM de Y_1. Como visto anteriormente, a FGM de Z_n é uma função da FGM de Y_1, avaliada em $t/\sigma\sqrt{n}$. Substituindo (3), avaliando no ponto $t/\sigma\sqrt{n}$, em (1), nós temos que

$$M_{Z_n}(t) = \left\{1 + \frac{t^2}{2n} + \left[M_{Y_1}^{(2)}(s) - \sigma^2\right]\frac{t^2}{2n\sigma^2}\right\}^n, \tag{4}$$

em que $0 < s < t/\sigma\sqrt{n}$ e $-h\sigma\sqrt{n} < t < h\sigma\sqrt{n}$.

A equação (3) é a FGM de Y_1. Como visto anteriormente, a FGM de Z_n é uma função da FGM de Y_1, avaliada em $t/\sigma\sqrt{n}$. Substituindo (3), avaliando no ponto $t/\sigma\sqrt{n}$, em (1), nós temos que

$$M_{Z_n}(t) = \left\{1 + \frac{t^2}{2n} + \left[M_{Y_1}^{(2)}(s) - \sigma^2\right]\frac{t^2}{2n\sigma^2}\right\}^n, \tag{4}$$

em que $0 < s < t/\sigma\sqrt{n}$ e $-h\sigma\sqrt{n} < t < h\sigma\sqrt{n}$.

Teorema central do limite

Para $n \to \infty$ segue-se que $s \to 0$ e como $M_{Y_1}^{(2)}$ é contínua na origem,

$$\lim_{s \to 0} \left[M_{Y_1}^{(2)}(s) - \sigma^2 \right] = 0. \quad (5)$$

Teorema central do limite

Para $n \to \infty$ segue-se que $s \to 0$ e como $M_{Y_1}^{(2)}$ é contínua na origem,

$$\lim_{s \to 0} \left[M_{Y_1}^{(2)}(s) - \sigma^2 \right] = 0. \tag{5}$$

Lembrando o seguinte resultado do cálculo,

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{a_n}{n} \right)^n = e^a, \tag{6}$$

quando $a_n \to a$.

Teorema central do limite

Para $n \to \infty$ segue-se que $s \to 0$ e como $M_{Y_1}^{(2)}$ é contínua na origem,

$$\lim_{s \to 0} \left[M_{Y_1}^{(2)}(s) - \sigma^2 \right] = 0. \tag{5}$$

Lembrando o seguinte resultado do cálculo,

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{a_n}{n} \right)^n = e^a, \tag{6}$$

quando $a_n \to a$.

Teorema central do limite

Por (5) e (6), nós concluímos a partir de (4) que

$$\lim_{n\to\infty} M_{Z_n}(t) = e^{t^2/2},$$

ou seja, quando $n \to \infty$, o limite da FGM de Z_n é a FGM de uma VA com distribuição normal padrão.

Teorema central do limite

Por (5) e (6), nós concluímos a partir de (4) que

$$\lim_{n\to\infty} M_{Z_n}(t) = e^{t^2/2},$$

ou seja, quando $n \to \infty$, o limite da FGM de Z_n é a FGM de uma VA com distribuição normal padrão.

Ufa!!!

Teorema central do limite

Por (5) e (6), nós concluímos a partir de (4) que

$$\lim_{n\to\infty} M_{Z_n}(t) = e^{t^2/2},$$

ou seja, quando $n \to \infty$, o limite da FGM de Z_n é a FGM de uma VA com distribuição normal padrão.

Ufa!!!

Teorema central do limite

O teorema central do limite foi demonstrado por Lyapunov (1901). Antes, a demonstração foi originalmente feita por de Moivre (1733), para o caso de uma sequência de variáveis aleatórias com distribuição Bernoulli, com $p = 1/2$.

Teorema central do limite

O teorema central do limite foi demonstrado por Lyapunov (1901). Antes, a demonstração foi originalmente feita por de Moivre (1733), para o caso de uma sequência de variáveis aleatórias com distribuição Bernoulli, com $p = 1/2$. Laplace (1812) estendeu este caso para um p arbitrário,

Teorema central do limite

O teorema central do limite foi demonstrado por Lyapunov (1901). Antes, a demonstração foi originalmente feita por de Moivre (1733), para o caso de uma sequência de variáveis aleatórias com distribuição Bernoulli, com $p = 1/2$. Laplace (1812) estendeu este caso para um p arbitrário, nestas condições,

$$\frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \xrightarrow{\mathrm{d}} \mathrm{N}(0, 1).$$

Teorema central do limite

O teorema central do limite foi demonstrado por Lyapunov (1901). Antes, a demonstração foi originalmente feita por de Moivre (1733), para o caso de uma sequência de variáveis aleatórias com distribuição Bernoulli, com $p = 1/2$. Laplace (1812) estendeu este caso para um p arbitrário, nestas condições,

$$\frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \xrightarrow{\mathrm{d}} \mathrm{N}(0, 1).$$

Teorema central do limite

Seja $X_1, X_2, \ldots$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes, com $\mathbb{E}(X_i) = \mu_i$ e $\mathrm{Var}(X_i) = \sigma_i^2$. Se (a) as variáveis aleatórias X_i forem limitadas uniformemente, isto é, para algum M, $\mathbb{P}(|X_i| < M) = 1$, para todo i,

Teorema central do limite

Seja $X_1, X_2, \ldots$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes, com $\mathbb{E}(X_i) = \mu_i$ e $\mathrm{Var}(X_i) = \sigma_i^2$. Se (a) as variáveis aleatórias X_i forem limitadas uniformemente, isto é, para algum M, $\mathbb{P}(|X_i| < M) = 1$, para todo i, e (b) $\sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i^2 = \infty$,

Teorema central do limite

Seja $X_1, X_2, \ldots$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes, com $\mathbb{E}(X_i) = \mu_i$ e $\text{Var}(X_i) = \sigma_i^2$. Se (a) as variáveis aleatórias X_i forem limitadas uniformemente, isto é, para algum M, $\mathbb{P}(|X_i| < M) = 1$, para todo i, e (b) $\sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i^2 = \infty$, então

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu_i)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2}} \xrightarrow{\mathrm{d}} \mathrm{N}(0, 1).$$

Teorema central do limite

Seja $X_1, X_2, \ldots$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes, com $\mathbb{E}(X_i) = \mu_i$ e $\text{Var}(X_i) = \sigma_i^2$. Se (a) as variáveis aleatórias X_i forem limitadas uniformemente, isto é, para algum M, $\mathbb{P}(|X_i| < M) = 1$, para todo i, e (b) $\sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i^2 = \infty$, então

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu_i)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2}} \xrightarrow{\mathrm{d}} \mathrm{N}(0, 1).$$

Resultado demonstrado por Lindeberg (1922).

Teorema central do limite

Seja $X_1, X_2, \ldots$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes, com $\mathbb{E}(X_i) = \mu_i$ e $\mathrm{Var}(X_i) = \sigma_i^2$. Se (a) as variáveis aleatórias X_i forem limitadas uniformemente, isto é, para algum M, $\mathbb{P}(|X_i| < M) = 1$, para todo i, e (b) $\sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i^2 = \infty$, então

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu_i)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2}} \xrightarrow{\mathrm{d}} \mathrm{N}(0, 1).$$

Resultado demonstrado por Lindeberg (1922).

Roteiro

Limites de binomiais para Poisson

Se $X_n \sim \text{binomial}(n, p_n)$, $n \geq 1$ e $\lim_{n\to\infty} np_n = \lambda > 0$, então

$$X_n \xrightarrow{\mathrm{d}} \text{Poisson}(\lambda).$$

Limites de binomiais para Poisson

Se $X_n \sim \text{binomial}(n, p_n)$, $n \geq 1$ e $\lim\limits_{n \to \infty} np_n = \lambda > 0$, então

$$X_n \xrightarrow{\text{d}} \text{Poisson}(\lambda).$$

Roteiro

1. Motivação
2. Lei fraca dos grandes números
3. Lei forte dos grandes números
4. Teorema central do limite
5. Limites de binomiais para Poisson
6. Referências bibliográficas

Referências bibliográficas I

Bernoulli, J. (1713). *Ars conjectandi*. Basel: Thurneysen Brothers.

Borel, M. E. (1909). Les probabilités dénombrables et leurs applications arithmétiques. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo 27*(1), 247–271.

Chebyshev, P. (1867). Des valeurs moyennes. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées 2e série 12*, 177–184.

de Moivre, A. (1733). Approximatio ad summam terminorum binomii $(a+b)^n$ in seriem expansi.

Referências bibliográficas II

Khinchine, A. Y. (1929). Sur la loi des grands nombres. *Comptes rendus de l'Académie des Sciences 189*, 477–479.

Kolmogorov, A. N. (1933). *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*. Berlin: Springer.

Laplace, P.-S. (1812). *Théorie analytique des probabilités*. Paris: Courcier.

Lindeberg, J. W. (1922). Eine neue herleitung des exponentialgesetzes in der wahrscheinlichkeitsrechnung. *Mathematische Zeitschrif 15*, 211–225.

Referências bibliográficas III

Lyapunov, A. M. (1901). Nouvelle forme du théorème sur la limite de probabilité. *Mémoires de l'Académie Impériale des Sciences de St.-Pétersbourg VIIe Série, Classe Physico-Mathématique 12*, 1–24.

Ross, S. (2010). *Probabilidade: um curso moderno com aplicações* (8 ed.). Porto Alegre: Bookman.

Taylor, B. (1715). *Methodus Incrementorum Directa et Inversa*. Londini: Typis Pearsonianis prostant apud Gul. Innys ad Insignia Principis in Coemeterio Paulino.

Obrigado!

✉ tiago.magalhaes@ufjf.br

🖱 ufjf.br/tiago_magalhaes

🌍 Departamento de Estatística, Sala 319

$\uparrow\uparrow\downarrow\downarrow\leftarrow\rightarrow\leftarrow\rightarrow$ B A