Métodos de convergência

Tiago M. Magalhães

Departamento de Estatística - ICE-UFJF

Juiz de Fora, 07 de janeiro de 2026

Roteiro

Roteiro

Motivação

Muitos métodos estatísticos exigem a experimentação por inúmeras repetições do mesmo modelo probabilístico. A descrição formal desta situação se dá, muitas vezes, pela consideração de sequências de variáveis aleatórias independentes.

Motivação

Muitos métodos estatísticos exigem a experimentação por inúmeras repetições do mesmo modelo probabilístico. A descrição formal desta situação se dá, muitas vezes, pela consideração de sequências de variáveis aleatórias independentes. Isto motiva o estudo do comportamento assintótico das sequências de variáveis aleatórias ou de funções destas.

Motivação

Muitos métodos estatísticos exigem a experimentação por inúmeras repetições do mesmo modelo probabilístico. A descrição formal desta situação se dá, muitas vezes, pela consideração de sequências de variáveis aleatórias independentes. Isto motiva o estudo do comportamento assintótico das sequências de variáveis aleatórias ou de funções destas.

Roteiro

Lema de Borel-Cantelli (Borel, 1909; Cantelli, 1917)

Seja $A_1, A_2, \ldots$ uma sequência de eventos em $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Definamos o evento $A_{iv} = \{A_n \text{ ocorre infinitas vezes}\}$.

1. Se $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(A_n\right) < \infty$, então $\mathbb{P}\left(A_{iv}\right) = 0$.

Lema de Borel-Cantelli (Borel, 1909; Cantelli, 1917)

Seja $A_1, A_2, \ldots$ uma sequência de eventos em $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Definamos o evento $A_{iv} = \{A_n \text{ ocorre infinitas vezes}\}$.

1. Se $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) < \infty$, então $\mathbb{P}(A_{iv}) = 0$.
2. Se $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = \infty$ e $A_1, A_2, \ldots$ são eventos independentes, então $\mathbb{P}(A_{iv}) = 1$.

Lema de Borel-Cantelli (Borel, 1909; Cantelli, 1917)

Seja $A_1, A_2, \ldots$ uma sequência de eventos em $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Definamos o evento $A_{iv} = \{A_n \text{ ocorre infinitas vezes}\}$.

1. Se $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(A_n\right) < \infty$, então $\mathbb{P}\left(A_{iv}\right) = 0$.
2. Se $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(A_n\right) = \infty$ e $A_1, A_2, \ldots$ são eventos independentes, então $\mathbb{P}\left(A_{iv}\right) = 1$.

Lema de Borel-Cantelli

Exemplo. Seja o evento A: um apostador ganhar na mega-sena. Nós sabemos que, a probabilidade de um apostador ganhar na mega-sena utilizando 6 dezenas é igual a

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{\binom{60}{6}} = \frac{1}{50.063.860} = 1{,}99 \times 10^{-8}.$$

Lema de Borel-Cantelli

Exemplo. Seja o evento A: um apostador ganhar na mega-sena. Nós sabemos que, a probabilidade de um apostador ganhar na mega-sena utilizando 6 dezenas é igual a

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{\binom{60}{6}} = \frac{1}{50.063.860} = 1{,}99 \times 10^{-8}.$$

Lema de Borel-Cantelli

Assumindo independência entre cada sorteio e definindo A_n como acertar as seis dezenas no n-ésimo sorteio, nós temos que, $\mathbb{P}(A_n) = 1{,}99 \times 10^{-8} > 0$, $\forall n \geq 1$.

Portanto, pela parte 2 do Lema de Borel-Cantelli nós concluímos que, com probabilidade 1, um apostador ganhará na mega-sena um número infinito de vezes, se $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = \infty$.

Lema de Borel-Cantelli

Assumindo independência entre cada sorteio e definindo A_n como acertar as seis dezenas no n-ésimo sorteio, nós temos que, $\mathbb{P}(A_n) = 1{,}99 \times 10^{-8} > 0$, $\forall n \geq 1$.

Portanto, pela parte 2 do Lema de Borel-Cantelli nós concluímos que, com probabilidade 1, um apostador ganhará na mega-sena um número infinito de vezes, se $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(A_n\right) = \infty$.

Lema de Borel-Cantelli

Este exemplo, assim como o clássico “macaco escritor” (James, 1981), nos mostra que, por mais que um evento seja raríssimo, se o experimento for repetido um número grande de vezes, ele irá ocorrer e infinitas vezes.

Roteiro

Convergência em distribuição

A sequência de variáveis aleatórias X_n converge em distribuição para a variável aleatória X se

$$\lim_{n \to \infty} F_{X_n}(x) = F_X(x),$$

para todo x tal que F_X seja contínua em x.

Convergência em distribuição

A sequência de variáveis aleatórias X_n converge em distribuição para a variável aleatória X se

$$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x),$$

para todo x tal que F_X seja contínua em x. Notação: $X_n \xrightarrow{\mathrm{d}} X$.

Convergência em distribuição

A sequência de variáveis aleatórias X_n converge em distribuição para a variável aleatória X se

$$\lim_{n \to \infty} F_{X_n}(x) = F_X(x),$$

para todo x tal que F_X seja contínua em x. Notação: $X_n \xrightarrow{\mathrm{d}} X$.

Convergência em distribuição

Sejam a e b dois números reais com $a < b$. Suponhamos que a e b são pontos onde F_X é contínua.

Convergência em distribuição

Sejam a e b dois números reais com $a < b$. Suponhamos que a e b são pontos onde F_X é contínua. Então, nós temos

$$\mathbb{P}(a < X_n \leq b) = F_{X_n}(b) - F_{X_n}(a)$$

se $X_n \xrightarrow{\mathrm{d}} X$, então $F_{X_n}(a) \to F_X(a)$ e $F_{X_n}(b) \to F_X(b)$.

Convergência em distribuição

Sejam a e b dois números reais com $a < b$. Suponhamos que a e b são pontos onde F_X é contínua. Então, nós temos

$$\mathbb{P}(a < X_n \leq b) = F_{X_n}(b) - F_{X_n}(a)$$

se $X_n \xrightarrow{\mathrm{d}} X$, então $F_{X_n}(a) \to F_X(a)$ e $F_{X_n}(b) \to F_X(b)$. Passando ao limite a equação acima, nós temos

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(a < X_n \leq b) = F_X(b) - F_X(a) = \mathbb{P}(a < X \leq b).$$

Convergência em distribuição

Sejam a e b dois números reais com $a < b$. Suponhamos que a e b são pontos onde F_X é contínua. Então, nós temos

$$\mathbb{P}(a < X_n \leq b) = F_{X_n}(b) - F_{X_n}(a)$$

se $X_n \xrightarrow{\mathrm{d}} X$, então $F_{X_n}(a) \to F_X(a)$ e $F_{X_n}(b) \to F_X(b)$. Passando ao limite a equação acima, nós temos

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(a < X_n \leq b) = F_X(b) - F_X(a) = \mathbb{P}(a < X \leq b).$$

Teorema

Seja $X_1, X_2, \ldots$ uma sequência de variáveis aleatórias cuja funções geradoras de momentos $M_{X_1}, M_{X_2}, \ldots$ existem. X_n converge em distribuição para uma variável aleatória X se, e somente se,

$$\lim_{n\to\infty} M_{X_n}(t) = M_X(t),$$

para todo $t \in \mathbb{R}$, em que $M_X(t)$ é a função geradora de momentos de X.

Teorema

Seja $X_1, X_2, \ldots$ uma sequência de variáveis aleatórias cuja funções geradoras de momentos $M_{X_1}, M_{X_2}, \ldots$ existem. X_n converge em distribuição para uma variável aleatória X se, e somente se,

$$\lim_{n \to \infty} M_{X_n}(t) = M_X(t),$$

para todo $t \in \mathbb{R}$, em que $M_X(t)$ é a função geradora de momentos de X.

Convergência em distribuição

Exemplo. Seja X_n uma sequência de variáveis aleatórias independentes com distribuição uniforme em $(0, b)$, $b > 0$. Defina $Y_n = \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ e $Y = b$. Nós vamos verificar que $Y_n \xrightarrow{\mathrm{d}} Y$.

Convergência em distribuição

Exemplo. Seja X_n uma sequência de variáveis aleatórias independentes com distribuição uniforme em $(0, b)$, $b > 0$. Defina $Y_n = \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ e $Y = b$. Nós vamos verificar que $Y_n \xrightarrow{\mathrm{d}} Y$. Nós sabemos que

$$
\begin{aligned}
F_{Y_n}(y) &= \mathbb{P}(\max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\} \leq y) \\
&= \mathbb{P}(X_1 \leq y, X_2 \leq y, \ldots, X_n \leq y) \\
&\overset{\text{Ind.}}{=} \mathbb{P}(X_1 \leq y) \times \mathbb{P}(X_2 \leq y) \times \cdots \times \mathbb{P}(X_n \leq y) \\
&\overset{\text{I.D.}}{=} [F_{X_1}(y)]^n.
\end{aligned}
$$

Convergência em distribuição

Exemplo. Seja X_n uma sequência de variáveis aleatórias independentes com distribuição uniforme em $(0, b)$, $b > 0$. Defina $Y_n = \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ e $Y = b$. Nós vamos verificar que $Y_n \xrightarrow{\mathrm{d}} Y$. Nós sabemos que

$$
\begin{aligned}
F_{Y_n}(y) &= \mathbb{P}(\max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\} \leq y) \\
&= \mathbb{P}(X_1 \leq y, X_2 \leq y, \ldots, X_n \leq y) \\
&\overset{\text{Ind.}}{=} \mathbb{P}(X_1 \leq y) \times \mathbb{P}(X_2 \leq y) \times \cdots \times \mathbb{P}(X_n \leq y) \\
&\overset{\text{I.D.}}{=} [F_{X_1}(y)]^n.
\end{aligned}
$$

Convergência em distribuição

Dessa forma, a partir da função distribuição acumulada de X_1, nós temos que

$$F_{Y_n}(y) = \begin{cases} 0, & \text{se } y < 0; \\ \left(\dfrac{y}{b}\right)^n, & \text{se } 0 \leq y < b; \\ 1, & \text{se } y \geq b. \end{cases}$$

Convergência em distribuição

Dessa forma, a partir da função distribuição acumulada de X_1, nós temos que

$$F_{Y_n}(y) = \begin{cases} 0, & \text{se } y < 0; \\ \left(\dfrac{y}{b}\right)^n, & \text{se } 0 \leq y < b; \\ 1, & \text{se } y \geq b. \end{cases}$$

Convergência em distribuição

Passando ao limite, para n indo ao infinito, vem

$$\lim_{n \to \infty} F_{Y_n}(y) = \begin{cases} 0, & \text{se } y < b; \\ 1, & \text{se } y \geq b; \end{cases}$$

Convergência em distribuição

Passando ao limite, para n indo ao infinito, vem

$$\lim_{n\to\infty} F_{Y_n}(y) = \begin{cases} 0, & \text{se } y < b; \\ 1, & \text{se } y \geq b; \end{cases}$$

que corresponde à função distribuição acumulada de Y e, portanto, $Y_n \xrightarrow{\mathrm{d}} Y$.

Passando ao limite, para n indo ao infinito, vem

$$\lim_{n\to\infty} F_{Y_n}(y) = \begin{cases} 0, & \text{se } y < b; \\ 1, & \text{se } y \geq b; \end{cases}$$

que corresponde à função distribuição acumulada de Y e, portanto, $Y_n \xrightarrow{\mathrm{d}} Y$.

Convergência em probabilidade

A sequência de variáveis aleatórias X_n converge em probabilidade para a variável aleatória X se para todo $\epsilon > 0$ tem-se

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}\left(|X_n - X| \geq \varepsilon\right) = 0.$$

Convergência em probabilidade

A sequência de variáveis aleatórias X_n converge em probabilidade para a variável aleatória X se para todo $\epsilon > 0$ tem-se

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(|X_n - X| \geq \varepsilon\right) = 0.$$

Nós indicaremos que X_n converge em probabilidade para X com a notação $X_n \xrightarrow{\text{p}} X$.

Convergência em probabilidade

A sequência de variáveis aleatórias X_n converge em probabilidade para a variável aleatória X se para todo $\epsilon > 0$ tem-se

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}\left(|X_n - X| \geq \varepsilon\right) = 0.$$

Nós indicaremos que X_n converge em probabilidade para X com a notação $X_n \xrightarrow{\text{p}} X$. Essa convergência também é denominada de convergência fraca.

Convergência em probabilidade

A sequência de variáveis aleatórias X_n converge em probabilidade para a variável aleatória X se para todo $\epsilon > 0$ tem-se

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(|X_n - X| \geq \varepsilon\right) = 0.$$

Nós indicaremos que X_n converge em probabilidade para X com a notação $X_n \xrightarrow{\mathrm{p}} X$. Essa convergência também é denominada de convergência fraca.

Convergência em probabilidade

Considere uma sequência numérica $\{a_n\}$. Dizer-se que $a_n \to a$ é dizer que dado $\epsilon > 0$ pode-se determinar n_0 tal que para todo $n \geq n_0$ tem-se:

$$|a_n - a| \leq \epsilon.$$

Convergência em probabilidade

Considere uma sequência numérica $\{a_n\}$. Dizer-se que $a_n \to a$ é dizer que dado $\epsilon > 0$ pode-se determinar n_0 tal que para todo $n \geq n_0$ tem-se:

$$|a_n - a| \leq \epsilon.$$

Convergência em probabilidade

Quando se realiza uma sequência de experimentos aleatórios e se associa uma variável aleatória X_n, $n \geq 1$, a cada um deles, então para cada $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots)$, que representa uma realização do experimento, fica definida a sequência $X_n(\omega)$, $n \geq 1$.

Convergência em probabilidade

Aqui pode acontecer que para um resultado ω do experimento $|X_n(\omega) - X(\omega)| > \epsilon$ para algum $n > n_0$.

O que $X_n \xrightarrow{\text{p}} X$ garante é que a probabilidade de esse evento ocorrer é muito pequena e tende para zero.

Convergência em probabilidade

Aqui pode acontecer que para um resultado ω do experimento $|X_n(\omega) - X(\omega)| > \epsilon$ para algum $n > n_0$.

O que $X_n \xrightarrow{\text{p}} X$ garante é que a probabilidade de esse evento ocorrer é muito pequena e tende para zero.

Assim, $X_n \xrightarrow{\text{p}} X$ significa que se n for suficientemente grande, então a probabilidade que X_n difira de X por mais que ϵ é muito pequena.

Convergência em probabilidade

Aqui pode acontecer que para um resultado ω do experimento $|X_n(\omega) - X(\omega)| > \epsilon$ para algum $n > n_0$.

O que $X_n \xrightarrow{\text{p}} X$ garante é que a probabilidade de esse evento ocorrer é muito pequena e tende para zero.

Assim, $X_n \xrightarrow{\text{p}} X$ significa que se n for suficientemente grande, então a probabilidade que X_n difira de X por mais que ϵ é muito pequena.

Convergência em probabilidade

Exemplo. Seja $X_n \sim$ Bernoulli (p_n) com $p_n = (1/2)^n$, $n = 1, 2, \ldots$ Nós temos para $\epsilon > 0$:

$$\mathbb{P}(|X_n| \geq \epsilon) \overset{*}{=} \mathbb{P}(X_n \geq \epsilon) \overset{**}{\leq} \frac{\mathbb{E}(X_n)}{\epsilon} = \frac{(1/2)^n}{\epsilon} = \frac{1}{2^n \epsilon}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|X_n| \geq \epsilon) = 0.$$

Convergência em probabilidade

Exemplo. Seja $X_n \sim$ Bernoulli (p_n) com $p_n = (1/2)^n$, $n = 1, 2, \ldots$ Nós temos para $\epsilon > 0$:

$$\mathbb{P}(|X_n| \geq \epsilon) \stackrel{*}{=} \mathbb{P}(X_n \geq \epsilon) \stackrel{**}{\leq} \frac{\mathbb{E}(X_n)}{\epsilon} = \frac{(1/2)^n}{\epsilon} = \frac{1}{2^n \epsilon}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(|X_n| \geq \epsilon) = 0.$$

Portanto, $X_n \xrightarrow{\mathrm{p}} 0$.

Convergência em probabilidade

Exemplo. Seja $X_n \sim$ Bernoulli (p_n) com $p_n = (1/2)^n$, $n = 1, 2, \ldots$ Nós temos para $\epsilon > 0$:

$$\mathbb{P}(|X_n| \geq \epsilon) \overset{*}{=} \mathbb{P}(X_n \geq \epsilon) \overset{**}{\leq} \frac{\mathbb{E}(X_n)}{\epsilon} = \frac{(1/2)^n}{\epsilon} = \frac{1}{2^n \epsilon}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|X_n| \geq \epsilon) = 0.$$

Portanto, $X_n \xrightarrow{\mathrm{p}} 0$. Lembrando que $\mathbb{P}(|X_n - 0| \geq \epsilon) = \mathbb{P}(|X_n| \geq \epsilon)$.

Convergência em probabilidade

Exemplo. Seja $X_n \sim$ Bernoulli (p_n) com $p_n = (1/2)^n$, $n = 1, 2, \ldots$ Nós temos para $\epsilon > 0$:

$$\mathbb{P}(|X_n| \geq \epsilon) \overset{*}{=} \mathbb{P}(X_n \geq \epsilon) \overset{**}{\leq} \frac{\mathbb{E}(X_n)}{\epsilon} = \frac{(1/2)^n}{\epsilon} = \frac{1}{2^n \epsilon}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|X_n| \geq \epsilon) = 0.$$

Portanto, $X_n \xrightarrow{\text{p}} 0$. Lembrando que $\mathbb{P}(|X_n - 0| \geq \epsilon) = \mathbb{P}(|X_n| \geq \epsilon)$.

$*$: X_n somente assume valores positivos.

Convergência em probabilidade

Exemplo. Seja $X_n \sim$ Bernoulli (p_n) com $p_n = (1/2)^n$, $n = 1, 2, \ldots$ Nós temos para $\epsilon > 0$:

$$\mathbb{P}(|X_n| \geq \epsilon) \overset{*}{=} \mathbb{P}(X_n \geq \epsilon) \overset{**}{\leq} \frac{\mathbb{E}(X_n)}{\epsilon} = \frac{(1/2)^n}{\epsilon} = \frac{1}{2^n \epsilon}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|X_n| \geq \epsilon) = 0.$$

Portanto, $X_n \xrightarrow{\text{p}} 0$. Lembrando que $\mathbb{P}(|X_n - 0| \geq \epsilon) = \mathbb{P}(|X_n| \geq \epsilon)$.

$*$: X_n somente assume valores positivos.

$**$: Desigualdade de Markov.

Convergência em probabilidade

Exemplo. Seja $X_n \sim$ Bernoulli (p_n) com $p_n = (1/2)^n$, $n = 1, 2, \ldots$ Nós temos para $\epsilon > 0$:

$$\mathbb{P}(|X_n| \geq \epsilon) \stackrel{*}{=} \mathbb{P}(X_n \geq \epsilon) \stackrel{**}{\leq} \frac{\mathbb{E}(X_n)}{\epsilon} = \frac{(1/2)^n}{\epsilon} = \frac{1}{2^n \epsilon}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(|X_n| \geq \epsilon) = 0.$$

Portanto, $X_n \xrightarrow{\text{p}} 0$. Lembrando que $\mathbb{P}(|X_n - 0| \geq \epsilon) = \mathbb{P}(|X_n| \geq \epsilon)$.

$*$: X_n somente assume valores positivos.

$**$: Desigualdade de Markov.

Convergência quase certa

Seja (X_n) uma sequência de variáveis aleatórias e seja X uma variável aleatória. Considere o evento

$$C = [X_n \to X] = \{\omega \in \Omega : X_n(\omega) \to X(\omega)\}.$$

Convergência quase certa

Seja (X_n) uma sequência de variáveis aleatórias e seja X uma variável aleatória. Considere o evento

$$C = [X_n \to X] = \{\omega \in \Omega : X_n(\omega) \to X(\omega)\}.$$

X_n converge para X quase certamente quando $\mathbb{P}(C) = 1$.

Convergência quase certa

Seja (X_n) uma sequência de variáveis aleatórias e seja X uma variável aleatória. Considere o evento

$$C = [X_n \to X] = \{\omega \in \Omega : X_n(\omega) \to X(\omega)\}.$$

X_n converge para X quase certamente quando $\mathbb{P}(C) = 1$. Notação: $X_n \xrightarrow{\text{qc}} X$.

Convergência quase certa

Seja (X_n) uma sequência de variáveis aleatórias e seja X uma variável aleatória. Considere o evento

$$C = [X_n \to X] = \{\omega \in \Omega : X_n(\omega) \to X(\omega)\}.$$

X_n converge para X quase certamente quando $\mathbb{P}(C) = 1$. Notação: $X_n \xrightarrow{\text{qc}} X$. Essa convergência também é denominada de convergência em quase toda parte ou convergência forte.

Convergência quase certa

Seja (X_n) uma sequência de variáveis aleatórias e seja X uma variável aleatória. Considere o evento

$$C = [X_n \to X] = \{\omega \in \Omega : X_n(\omega) \to X(\omega)\}.$$

X_n converge para X quase certamente quando $\mathbb{P}(C) = 1$. Notação: $X_n \xrightarrow{\text{qc}} X$. Essa convergência também é denominada de convergência em quase toda parte ou convergência forte.

Convergência quase certa

A convergência quase certa permite que alguns pontos de Ω escapem do critério de convergência, entretanto, o conjunto desses pontos precisa ser negligenciável em termos probabilísticos, isto é, sua probabilidade deve ser zero.

Relações entre os tipos de convergência

1. $X_n \xrightarrow{\text{qc}} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{\text{p}} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{\text{d}} X$;

Relações entre os tipos de convergência

1. $X_n \xrightarrow{\text{qc}} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{\text{p}} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{\text{d}} X$;
2. Se c é uma constante, $X_n \xrightarrow{\text{d}} c \Rightarrow X_n \xrightarrow{\text{p}} c$.

Relações entre os tipos de convergência

1. $X_n \xrightarrow{\text{qc}} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{\text{p}} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{\text{d}} X$;
2. Se c é uma constante, $X_n \xrightarrow{\text{d}} c \Rightarrow X_n \xrightarrow{\text{p}} c$.

Unicidade do limite

1. Se $X_n \xrightarrow{\text{qc}} X$ e $X_n \xrightarrow{\text{qc}} Y$, então $\mathbb{P}\left(X = Y\right) = 1$;

Unicidade do limite

1. Se $X_n \xrightarrow{\text{qc}} X$ e $X_n \xrightarrow{\text{qc}} Y$, então $\mathbb{P}\left(X = Y\right) = 1$;
2. Se $X_n \xrightarrow{\text{p}} X$ e $X_n \xrightarrow{\text{p}} Y$, então $\mathbb{P}\left(X = Y\right) = 1$;

Unicidade do limite

1. Se $X_n \xrightarrow{\text{qc}} X$ e $X_n \xrightarrow{\text{qc}} Y$, então $\mathbb{P}\left(X = Y\right) = 1$;
2. Se $X_n \xrightarrow{\text{p}} X$ e $X_n \xrightarrow{\text{p}} Y$, então $\mathbb{P}\left(X = Y\right) = 1$;
3. Se $X_n \xrightarrow{\text{d}} X$ e $X_n \xrightarrow{\text{d}} Y$, então $F_X(x) = F_Y(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Unicidade do limite

1. Se $X_n \xrightarrow{\text{qc}} X$ e $X_n \xrightarrow{\text{qc}} Y$, então $\mathbb{P}\left(X = Y\right) = 1$;
2. Se $X_n \xrightarrow{\text{p}} X$ e $X_n \xrightarrow{\text{p}} Y$, então $\mathbb{P}\left(X = Y\right) = 1$;
3. Se $X_n \xrightarrow{\text{d}} X$ e $X_n \xrightarrow{\text{d}} Y$, então $F_X(x) = F_Y(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Preservação da convergência por uma função contínua

Se $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua, nós temos que

1. Se $X_n \xrightarrow{\text{qc}} X \Rightarrow g(X_n) \xrightarrow{\text{qc}} g(X)$;

Preservação da convergência por uma função contínua

Se $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua, nós temos que

1. Se $X_n \xrightarrow{\text{qc}} X \Rightarrow g\left(X_n\right) \xrightarrow{\text{qc}} g\left(X\right)$;
2. Se $X_n \xrightarrow{\text{p}} X \Rightarrow g\left(X_n\right) \xrightarrow{\text{p}} g\left(X\right)$;

Preservação da convergência por uma função contínua

Se $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua, nós temos que

1. Se $X_n \xrightarrow{\text{qc}} X \Rightarrow g(X_n) \xrightarrow{\text{qc}} g(X)$;
2. Se $X_n \xrightarrow{\text{p}} X \Rightarrow g(X_n) \xrightarrow{\text{p}} g(X)$;
3. Se $X_n \xrightarrow{\text{d}} X \Rightarrow g(X_n) \xrightarrow{\text{d}} g(X)$.

Preservação da convergência por uma função contínua

Se $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua, nós temos que

1. Se $X_n \xrightarrow{\text{qc}} X \Rightarrow g(X_n) \xrightarrow{\text{qc}} g(X)$;
2. Se $X_n \xrightarrow{\text{p}} X \Rightarrow g(X_n) \xrightarrow{\text{p}} g(X)$;
3. Se $X_n \xrightarrow{\text{d}} X \Rightarrow g(X_n) \xrightarrow{\text{d}} g(X)$.

Convergência de somas de sequências

1. Se $X_n \xrightarrow{\text{qc}} X$ e $Y_n \xrightarrow{\text{qc}} Y$, então $X_n + Y_n \xrightarrow{\text{qc}} X + Y$;

Convergência de somas de sequências

1. Se $X_n \xrightarrow{\text{qc}} X$ e $Y_n \xrightarrow{\text{qc}} Y$, então $X_n + Y_n \xrightarrow{\text{qc}} X + Y$;
2. Se $X_n \xrightarrow{\text{p}} X$ e $Y_n \xrightarrow{\text{p}} Y$, então $X_n + Y_n \xrightarrow{\text{p}} X + Y$;

Convergência de somas de sequências

1. Se $X_n \xrightarrow{\text{qc}} X$ e $Y_n \xrightarrow{\text{qc}} Y$, então $X_n + Y_n \xrightarrow{\text{qc}} X + Y$;
2. Se $X_n \xrightarrow{\text{p}} X$ e $Y_n \xrightarrow{\text{p}} Y$, então $X_n + Y_n \xrightarrow{\text{p}} X + Y$;
3. Se $X_n \xrightarrow{\text{d}} X$ e $Y_n \xrightarrow{\text{d}} Y$, com X_n e Y_n independentes $\forall n$ e X e Y independentes, então $X_n + Y_n \xrightarrow{\text{d}} X + Y$.

Convergência de somas de sequências

1. Se $X_n \xrightarrow{\text{qc}} X$ e $Y_n \xrightarrow{\text{qc}} Y$, então $X_n + Y_n \xrightarrow{\text{qc}} X + Y$;
2. Se $X_n \xrightarrow{\text{p}} X$ e $Y_n \xrightarrow{\text{p}} Y$, então $X_n + Y_n \xrightarrow{\text{p}} X + Y$;
3. Se $X_n \xrightarrow{\text{d}} X$ e $Y_n \xrightarrow{\text{d}} Y$, com X_n e Y_n independentes $\forall n$ e X e Y independentes, então $X_n + Y_n \xrightarrow{\text{d}} X + Y$.

Teorema de Slutsky (1925)

Se $X_n \xrightarrow{\mathrm{d}} X$ e $Y_n \xrightarrow{\mathrm{d}} c$, em que c é uma constante, então

1. $X_n \pm Y_n \xrightarrow{\mathrm{d}} X \pm c$;

Teorema de Slutsky (1925)

Se $X_n \xrightarrow{\mathrm{d}} X$ e $Y_n \xrightarrow{\mathrm{d}} c$, em que c é uma constante, então

1. $X_n \pm Y_n \xrightarrow{\mathrm{d}} X \pm c$;
2. $X_n Y_n \xrightarrow{\mathrm{d}} cX$;

Teorema de Slutsky (1925)

Se $X_n \xrightarrow{\mathrm{d}} X$ e $Y_n \xrightarrow{\mathrm{d}} c$, em que c é uma constante, então

1. $X_n \pm Y_n \xrightarrow{\mathrm{d}} X \pm c$;
2. $X_n Y_n \xrightarrow{\mathrm{d}} cX$;
3. $X_n / Y_n \xrightarrow{\mathrm{d}} X / c$, se $c \neq 0$.

Teorema de Slutsky (1925)

Se $X_n \xrightarrow{\mathrm{d}} X$ e $Y_n \xrightarrow{\mathrm{d}} c$, em que c é uma constante, então

1. $X_n \pm Y_n \xrightarrow{\mathrm{d}} X \pm c$;
2. $X_n Y_n \xrightarrow{\mathrm{d}} cX$;
3. $X_n / Y_n \xrightarrow{\mathrm{d}} X/c$, se $c \neq 0$.

Método Delta (Dorfman, 1938)

Sejam $Y_1, Y_2, \ldots$ variáveis aleatórias tais que

$$\sqrt{n}\,(Y_n - \mu) \xrightarrow{\mathrm{d}} \mathrm{N}(0, \sigma^2),$$

em que $\mu \in \mathbb{R}$ e $\sigma^2 > 0$ parâmetros conhecidos.

Método Delta (Dorfman, 1938)

Sejam $Y_1, Y_2, \ldots$ variáveis aleatórias tais que

$$\sqrt{n}\,(Y_n - \mu) \xrightarrow{\mathrm{d}} \mathsf{N}(0, \sigma^2),$$

em que $\mu \in \mathbb{R}$ e $\sigma^2 > 0$ parâmetros conhecidos. Se g é uma função derivável no ponto μ, então

$$\sqrt{n}\left[g\left(Y_n\right) - g\left(\mu\right)\right] \xrightarrow{\mathrm{d}} \mathsf{N}\left(0,\, \sigma^2\left[g'\left(\mu\right)\right]^2\right).$$

Método Delta (Dorfman, 1938)

Sejam $Y_1, Y_2, \ldots$ variáveis aleatórias tais que

$$\sqrt{n}\,(Y_n - \mu) \xrightarrow{\mathrm{d}} \mathsf{N}(0, \sigma^2),$$

em que $\mu \in \mathbb{R}$ e $\sigma^2 > 0$ parâmetros conhecidos. Se g é uma função derivável no ponto μ, então

$$\sqrt{n}\,[g\,(Y_n) - g\,(\mu)] \xrightarrow{\mathrm{d}} \mathsf{N}\left(0,\, \sigma^2\left[g'\,(\mu)\right]^2\right).$$

Roteiro

1 Motivação

2 Lema de Borel-Cantelli

3 Métodos de convergência

4 Considerações finais

5 Referências bibliográficas

Considerações finais

Os métodos de convergência costumam ser omitidos em livros básicos de probabilidade, mas uma base sólida em Estatística não sera possível sem eles. Como sugestão de bibliografia, nós temos os livros de Dantas (2020), Magalhães (2015) e Vasconcellos (2021), contendo este importante conteúdo e que foram utilizados para montagem desta aula.

Roteiro

Referências bibliográficas I

Borel, M. E. (1909). Les probabilités dénombrables et leurs applications arithmétiques. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo 27*(1), 247–271.

Cantelli, F. P. (1917). Sulla probabilità come limite della frequenza. *Atti della Accademia Nazionale dei Lincei 26*(1), 39–45.

Dantas, C. A. B. (2020). *Probabilidade: um curso introdutório* (3 ed.). São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo.

Referências bibliográficas II

Dorfman, R. (1938). A note on the δ-method for finding variance formulae. *The Biometric Bulletin 1*, 129–137.

James, B. R. (1981). *Probabilidade: um curso em nível intermediário*. Rio de Janeiro: CNPq-IMPA Projeto Euclides.

Magalhães, M. N. (2015). *Probabilidade e variáveis aleatórias* (3 ed.). São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo.

Slutsky, E. E. (1925). Über stochastische asymptoten und grenzwerte. *Metron 5*(3), 3–89.

Referências bibliográficas III

Vasconcellos, K. L. P. (2021). *Fundamentos para a estatística de convergência de variáveis aleatórias*. Rio de Janeiro: SBM.

Obrigado!

✉ tiago.magalhaes@ufjf.br

ufjf.br/tiago_magalhaes

Departamento de Estatística, Sala 319