

Convoluções

Tiago M. Magalhães

Departamento de Estatística - ICE-UFJF

Juiz de Fora, 05 de novembro de 2025



Roteiro

- 1 Motivação
- 2 Convoluções
- 3 Exemplos
- 4 Bibliografia



Roteiro

- 1 Motivação
- 2 Convoluções
- 3 Exemplos
- 4 Bibliografia



Motivação

Como nós vimos anteriormente, podem haver situações em que nós estamos interessados nas distribuições de probabilidades de funções de vetores aleatórios.



Motivação

De maneira geral, o método jacobiano é a forma para encontrar essas distribuições de probabilidades.

Porém, existem situações em que o procedimento pode ser simplificado.



Motivação

De maneira geral, o método jacobiano é a forma para encontrar essas distribuições de probabilidades.

Porém, existem situações em que o procedimento pode ser simplificado.



Motivação

Uma dessas situações ocorre quando o vetor aleatório é bidimensional, as duas variáveis aleatórias que o compõe são independentes e a função é uma das quatro operações aritméticas fundamentais (adição, subtração, multiplicação e divisão).



Motivação

Dada essas condições, nós podemos encontrar a distribuição de probabilidades dessa função pelo **método das convoluções**.



Roteiro

- 1 Motivação
- 2 Convoluções**
- 3 Exemplos
- 4 Bibliografia



Convoluções

Suponham que X e Y sejam variáveis aleatórias independentes, contínuas, com FDP f_X e f_Y , respectivamente. Sejam

$$Z_1 = X + Y,$$

$$Z_2 = X - Y,$$

$$Z_3 = X \times Y,$$

$$Z_4 = X/Y.$$



Convoluções

Suponham que X e Y sejam variáveis aleatórias independentes, contínuas, com FDP f_X e f_Y , respectivamente. Sejam

$$Z_1 = X + Y,$$

$$Z_2 = X - Y,$$

$$Z_3 = X \times Y,$$

$$Z_4 = X/Y.$$



Convoluções

As respectivas FDPs dessas funções são dadas por

$$\begin{aligned}g_{Z_1}(z_1) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) f_Y(z_1 - t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z_1 - t) f_Y(t) dt, \\g_{Z_2}(z_2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) f_Y(z_2 + t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z_2 + t) f_Y(t) dt, \quad (1) \\g_{Z_3}(z_3) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) f_Y(z_3/t) \left| \frac{1}{t} \right| dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z_3/t) f_Y(t) \left| \frac{1}{t} \right| dt, \\g_{Z_4}(z_4) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) f_Y(z_4 \times t) |t| dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z_4 \times t) f_Y(t) |t| dt.\end{aligned}$$



Roteiro

- 1 Motivação
- 2 Convoluções
- 3 Exemplos**
- 4 Bibliografia



Exemplos

Exemplo 1. Suponhamos que nós temos um circuito no qual tanto a corrente X como a resistência Y variem de algum modo aleatório. Particularmente, suponhamos que X e Y sejam VA contínuas independentes com as seguintes FDP:

$$f_X(x) = 2x \mathbb{I}_{(0,1)}(x), \quad f_Y(y) = \frac{y^2}{9} \mathbb{I}_{(0,3)}(y).$$

Qual é a distribuição de $Z = XY$? **Observação:** $X \sim \text{beta}(2,1)$.



Exemplos

Exemplo 2. Suponham que $Z = X + Y$, na qual X e Y são variáveis aleatórias independentes, cada uma delas com distribuição $N(0, 1)$. Então,

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{x^2}{2} \right\} \mathbb{I}_{\mathbb{R}}(x),$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{y^2}{2} \right\} \mathbb{I}_{\mathbb{R}}(y).$$

Roteiro

- 1 Motivação
- 2 Convoluções
- 3 Exemplos
- 4 Bibliografia



Bibliografia

Meyer, P. L. (2017), *Probabilidade: aplicações à Estatística*, 2 edn, Livros Técnicos e Científicos Editora Ltda, Rio de Janeiro.

Ross, S. (2010), *Probabilidade: um curso moderno com aplicações*, 8 edn, Bookman, Porto Alegre.

Ross, S. (2019), *A first course in probability*, 10 edn. global edn, Pearson Education, Malaysia.



Obrigado!

✉ tiago.magalhaes@ufjf.br

📄 ufjf.br/tiago_magalhaes

🌐 Departamento de Estatística, Sala 319

