Homework 01 - Christmas gift

Instruções

- Este Homework (HW) poderá ser resolvido em duplas;
- O HW precisará conter o(s) **nome(s) completo(s)** e a(s) **matrícula(s)** do(s) discente(s);
- O HW deverá ser enviado via `Google Classroom` **até as 07h51 do dia 07/01/2026** em **um único arquivo** e em **PDF** (*Portable Document Format*);
- Mesmo que não seja solicitado, sempre que possível, identifique as distribuições encontradas, indicando o nome e os parâmetros associados;
- A atividade pode ser resolvida a lápis, mas as respostas devem estar escritas de caneta;
- **Não serão considerados** Homeworks com péssima qualidade visual ou em desacordo com as instruções anteriores.

Exercícios

1. Sejam $X_1, \ldots, X_n$ variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, com função densidade de probabilidade dada por

$$f_{X_i}(x) = 2(1-x)\,\mathbb{I}_{(0,1)}(x),\ i = 1, \ldots, n.$$

Calcule a função geradora de momentos da variável aleatória

$$Y = -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \log\left(1 - X_i\right),$$

e, a partir dela, conclua qual é a sua distribuição.

2. Sejam $X_1, \ldots, X_n$ variáveis aleatórias independentes com distribuição exponencial de parâmetro 1. Considere as variáveis aleatórias

$$V_n = \max\{X_1, \ldots, X_n\} \text{ e } W_n = X_1 + \frac{X_2}{2} + \frac{X_3}{3} + \cdots + \frac{X_n}{n}.$$

Prove que V_n e W_n têm a mesma distribuição.

3. Julius e Vincent Benedict são irmãos gêmeos que curtem jogos eletrônicos. Em um determinado passeio pelo Independência Shopping, eles resolvem entrar no *Adventure Land*,

onde há dois fliperamas contendo o mesmo jogo: `Cruis'n USA`. Sejam X_1 e X_2 variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, em que X_1 e X_2 indicam se `Cruis'n USA` foi zerado por Julius e Vincent Benedict, respectivamente, assumindo valor 1 em caso afirmativo e 0 caso contrário. Suponha que

$$X_i \sim \text{Bernoulli}(p), \quad i = 1, 2.$$

Determine e interprete a distribuição de:

(a) $Y_1 = \min(X_1, X_2)$;

(b) $Y_2 = \max(X_1, X_2)$;

(c) $Y_3 = \max(X_1, X_2) - \min(X_1, X_2)$.

4. Um *data center* especializado em inteligência artificial possui quatro servidores idênticos, cada um responsável por processar requisições críticas de modelos de grande porte. O funcionamento deste *data center* depende da disponibilidade dos servidores. O tempo até a falha de cada servidor (em anos) é modelado por variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, cada uma seguindo uma distribuição exponencial com parâmetro 1. Determine a função densidade de probabilidade (FDP) do tempo até o sistema deixar de processar requisições nos casos em que:

   (a) O *data center* deixa de operar somente quando todos os quatro servidores estiverem inoperantes;

   (b) O *data center* deixa de operar assim que o primeiro servidor falhar;

   (c) O *data center* continua operando até que reste apenas um servidor funcional, garantindo redundância mínima para os modelos críticos.

   (d) Prove que todas as FDPs encontradas no itens anteriores são válidas.