Classwork 11

Exercícios

1. Seja a sequência de variáveis aleatórias X_n definida por:

$$\mathbb{P}(X_n = n) = 1 - \mathbb{P}(X_n = 0) = \frac{1}{n},\ n = 1, 2, \ldots$$

   Mostre que $X_n \xrightarrow{\text{d}} X$ quando $n \to \infty$, e identifique a distribuição limite. Interprete este resultado.

2. Considere uma sequência de variáveis aleatórias $Y_n \sim \text{gama}(n, 1/n)$, em que sua função geradora de momentos (FGM) é dada por:

$$M_{Y_n}(t) = \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{-n},\ t < n.$$

   Use a FGM para obter uma distribuição limite para Y_n.

3. Considere uma sequência de variáveis aleatórias $(Z_n)_{n \geq 1}$, tal que $Z_n \sim \text{binomial}(n, p_n)$, com $p_n = \lambda/n$, $\lambda > 0$. Mostre que $Z_n \xrightarrow{\text{d}} Z$ quando $n \to \infty$, e identifique a distribuição limite Z.

4. Seja $(Y_i)_{i \geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com $\mathbb{E}(Y_i) = \mu$ e $\text{Var}(Y_i) = \sigma^2 < \infty$. Defina a média amostral por

$$\bar{Y}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Y_i.$$

   Mostre que $\bar{Y}_n \xrightarrow{\text{p}} \mu$.

5. Seja X_n uma sequência de variáveis aleatórias com distribuição exponencial (λ_n), com $\lambda_n = (1/2)^n$, e com função densidade de probabilidades dada por

$$f_{X_n}(x) = \frac{1}{\lambda_n} e^{-(1/\lambda_n)x}\, \mathbb{I}_{(0,\infty)}(x).$$

   Prove que $X_n \xrightarrow{\text{p}} 0$.