

Expressões aproximadas e desigualdades

Tiago M. Magalhães

Departamento de Estatística - ICE-UFJF

Juiz de Fora, 17 de novembro de 2025



Roteiro

- 1 Motivação
- 2 Série de Taylor
- 3 Expressões aproximadas da média e da variância
- 4 Desigualdades
- 5 Referências bibliográficas



Roteiro

- 1 Motivação
- 2 Série de Taylor
- 3 Expressões aproximadas da média e da variância
- 4 Desigualdades
- 5 Referências bibliográficas



Motivação

Nós já observamos que a fim de calcular $\mathbb{E}(Z)$ ou $\text{Var}(Z)$, em que $Z = H(X, Y)$, não necessitamos achar a distribuição de probabilidades de Z , pois poderemos trabalhar diretamente com a distribuição de probabilidades de $(X, Y)^\top$.



Motivação

Se a função H for bem complicada, o cálculo das esperanças e variâncias pode conduzir a integrações (ou somatórios) que são bastante difíceis. Por isso, aproximações são muito úteis.



Roteiro

- 1 Motivação
- 2 Série de Taylor
- 3 Expressões aproximadas da média e da variância
- 4 Desigualdades
- 5 Referências bibliográficas



Série de Taylor

A série de Taylor (1715) em torno do ponto $x = a$ é uma série de funções expressa da seguinte forma

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n, \quad (1)$$



Série de Taylor

A série de Taylor (1715) em torno do ponto $x = a$ é uma série de funções expressa da seguinte forma

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n, \quad (1)$$

em que f é uma função conhecida, derivável e $f^{(n)}$ é a n -ésima derivada de f .



Série de Taylor

A série de Taylor (1715) em torno do ponto $x = a$ é uma série de funções expressa da seguinte forma

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n, \quad (1)$$

em que f é uma função conhecida, derivável e $f^{(n)}$ é a n -ésima derivada de f .



Série de Taylor

Observação

Em (1), quando $a = 0$, a série também é conhecida como série de Maclaurin.

Série de Taylor

Notem que, a série de Taylor (1715) pode ser reescrita da seguinte forma

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x), \quad (2)$$



Série de Taylor

Notem que, a série de Taylor (1715) pode ser reescrita da seguinte forma

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x), \quad (2)$$

em que

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n \frac{f^{(i)}(a)}{i!} (x-a)^i \text{ e } R_n(x) = \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{f^{(i)}(a)}{i!} (x-a)^i.$$



Série de Taylor

Notem que, a série de Taylor (1715) pode ser reescrita da seguinte forma

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x), \quad (2)$$

em que

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n \frac{f^{(i)}(a)}{i!} (x-a)^i \text{ e } R_n(x) = \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{f^{(i)}(a)}{i!} (x-a)^i.$$



Série de Taylor

$P_n(x)$ é denominado de polinômio de Taylor de grau n e $R_n(x)$ é o resto da Série de Taylor.



Série de Taylor

$P_n(x)$ é denominado de polinômio de Taylor de grau n e $R_n(x)$ é o resto da Série de Taylor. Taylor também mostrou que

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\tau)}{(n+1)!} (x-a)^n,$$

para algum valor de $a \leq \tau \leq x$.



Série de Taylor

$P_n(x)$ é denominado de polinômio de Taylor de grau n e $R_n(x)$ é o resto da Série de Taylor. Taylor também mostrou que

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\tau)}{(n+1)!} (x-a)^n,$$

para algum valor de $a \leq \tau \leq x$.



Roteiro

- 1 Motivação
- 2 Série de Taylor
- 3 Expressões aproximadas da média e da variância**
- 4 Desigualdades
- 5 Referências bibliográficas



Expressões aproximadas da média e da variância

Seja X uma variável aleatória com $\mathbb{E}(X) = \mu$ e $\text{Var}(X) = \sigma^2$. Suponham que $Y = H(X)$.



Expressões aproximadas da média e da variância

Seja X uma variável aleatória com $\mathbb{E}(X) = \mu$ e $\text{Var}(X) = \sigma^2$. Suponham que $Y = H(X)$. Então,

$$\mathbb{E}(Y) \approx H(\mu) + \frac{H^{(2)}(\mu)}{2}\sigma^2 \text{ e } \text{Var}(Y) \approx [H^{(1)}(\mu)]^2 \sigma^2. \quad (3)$$



Expressões aproximadas da média e da variância

Seja X uma variável aleatória com $\mathbb{E}(X) = \mu$ e $\text{Var}(X) = \sigma^2$. Suponham que $Y = H(X)$. Então,

$$\mathbb{E}(Y) \approx H(\mu) + \frac{H^{(2)}(\mu)}{2}\sigma^2 \text{ e } \text{Var}(Y) \approx [H^{(1)}(\mu)]^2 \sigma^2. \quad (3)$$



Expressões aproximadas da média e da variância

Demonstração 1. Usando (1), até o segundo termo e em torno de $X = \mu$,



Expressões aproximadas da média e da variância

Demonstração 1. Usando (1), até o segundo termo e em torno de $X = \mu$, nós temos que

$$\begin{aligned} Y = H(X) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H^{(n)}(\mu)}{n!} (X - \mu)^n \\ &= \frac{H^{(0)}(\mu)}{0!} (X - \mu)^0 + \frac{H^{(1)}(\mu)}{1!} (X - \mu)^1 \\ &\quad + \frac{H^{(2)}(\mu)}{2!} (X - \mu)^2 + \underbrace{\sum_{n=3}^{\infty} \frac{H^{(n)}(\mu)}{n!} (X - \mu)^n}_{R_1}. \end{aligned}$$



Expressões aproximadas da média e da variância

Demonstração 1. Usando (1), até o segundo termo e em torno de $X = \mu$, nós temos que

$$\begin{aligned} Y = H(X) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H^{(n)}(\mu)}{n!} (X - \mu)^n \\ &= \frac{H^{(0)}(\mu)}{0!} (X - \mu)^0 + \frac{H^{(1)}(\mu)}{1!} (X - \mu)^1 \\ &\quad + \frac{H^{(2)}(\mu)}{2!} (X - \mu)^2 + \underbrace{\sum_{n=3}^{\infty} \frac{H^{(n)}(\mu)}{n!} (X - \mu)^n}_{R_1}. \end{aligned}$$



Expressões aproximadas da média e da variância

Simplificando as expressões anteriores, nós temos que

$$Y = H(\mu) + H^{(1)}(\mu)(X - \mu) + \frac{H^{(2)}(\mu)}{2}(X - \mu)^2 + R_1.$$



Expressões aproximadas da média e da variância

Simplificando as expressões anteriores, nós temos que

$$Y = H(\mu) + H^{(1)}(\mu)(X - \mu) + \frac{H^{(2)}(\mu)}{2}(X - \mu)^2 + R_1.$$

Aplicando a esperança,



Expressões aproximadas da média e da variância

Simplificando as expressões anteriores, nós temos que

$$Y = H(\mu) + H^{(1)}(\mu)(X - \mu) + \frac{H^{(2)}(\mu)}{2}(X - \mu)^2 + R_1.$$

Aplicando a esperança, nós temos que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y) &= \mathbb{E}\{H(\mu)\} + \mathbb{E}\{H^{(1)}(\mu)(X - \mu)\} \\ &\quad + \mathbb{E}\left\{\frac{H^{(2)}(\mu)}{2}(X - \mu)^2\right\} + \mathbb{E}\{R_1\}.\end{aligned}$$



Expressões aproximadas da média e da variância

Simplificando as expressões anteriores, nós temos que

$$Y = H(\mu) + H^{(1)}(\mu)(X - \mu) + \frac{H^{(2)}(\mu)}{2}(X - \mu)^2 + R_1.$$

Aplicando a esperança, nós temos que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y) &= \mathbb{E}\{H(\mu)\} + \mathbb{E}\{H^{(1)}(\mu)(X - \mu)\} \\ &\quad + \mathbb{E}\left\{\frac{H^{(2)}(\mu)}{2}(X - \mu)^2\right\} + \mathbb{E}\{R_1\}.\end{aligned}$$



Expressões aproximadas da média e da variância

Agora,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y) &= H(\mu) + H^{(1)}(\mu)\mathbb{E}\{X - \mu\} + \frac{H^{(2)}(\mu)}{2}\mathbb{E}\{(X - \mu)^2\} + \mathbb{E}\{R_1\} \\ &= H(\mu) + \frac{H^{(2)}(\mu)}{2}\sigma^2 + \mathbb{E}\{R_1\}.\end{aligned}$$



Expressões aproximadas da média e da variância

Agora,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y) &= H(\mu) + H^{(1)}(\mu)\mathbb{E}\{X - \mu\} + \frac{H^{(2)}(\mu)}{2}\mathbb{E}\{(X - \mu)^2\} + \mathbb{E}\{R_1\} \\ &= H(\mu) + \frac{H^{(2)}(\mu)}{2}\sigma^2 + \mathbb{E}\{R_1\}.\end{aligned}$$

Ignorando o termo $\mathbb{E}\{R_1\}$,



Expressões aproximadas da média e da variância

Agora,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y) &= H(\mu) + H^{(1)}(\mu)\mathbb{E}\{X - \mu\} + \frac{H^{(2)}(\mu)}{2}\mathbb{E}\{(X - \mu)^2\} + \mathbb{E}\{R_1\} \\ &= H(\mu) + \frac{H^{(2)}(\mu)}{2}\sigma^2 + \mathbb{E}\{R_1\}.\end{aligned}$$

Ignorando o termo $\mathbb{E}\{R_1\}$, nós temos que,

$$\mathbb{E}(Y) \approx H(\mu) + \frac{H^{(2)}(\mu)}{2}\sigma^2.$$



Expressões aproximadas da média e da variância

Agora,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y) &= H(\mu) + H^{(1)}(\mu)\mathbb{E}\{X - \mu\} + \frac{H^{(2)}(\mu)}{2}\mathbb{E}\{(X - \mu)^2\} + \mathbb{E}\{R_1\} \\ &= H(\mu) + \frac{H^{(2)}(\mu)}{2}\sigma^2 + \mathbb{E}\{R_1\}.\end{aligned}$$

Ignorando o termo $\mathbb{E}\{R_1\}$, nós temos que,

$$\mathbb{E}(Y) \approx H(\mu) + \frac{H^{(2)}(\mu)}{2}\sigma^2.$$



Expressões aproximadas da média e da variância

Demonstração 2. Usando (1), até o primeiro termo e em torno de $X = \mu$,



Expressões aproximadas da média e da variância

Demonstração 2. Usando (1), até o primeiro termo e em torno de $X = \mu$, nós temos que

$$\begin{aligned} Y = H(X) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H^{(n)}(\mu)}{n!} (X - \mu)^n \\ &= \frac{H^{(0)}(\mu)}{0!} (X - \mu)^0 + \frac{H^{(1)}(\mu)}{1!} (X - \mu)^1 \\ &\quad + \underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} \frac{H^{(n)}(\mu)}{n!} (X - \mu)^n}_{R_2}. \end{aligned}$$



Expressões aproximadas da média e da variância

Demonstração 2. Usando (1), até o primeiro termo e em torno de $X = \mu$, nós temos que

$$\begin{aligned} Y = H(X) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H^{(n)}(\mu)}{n!} (X - \mu)^n \\ &= \frac{H^{(0)}(\mu)}{0!} (X - \mu)^0 + \frac{H^{(1)}(\mu)}{1!} (X - \mu)^1 \\ &\quad + \underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} \frac{H^{(n)}(\mu)}{n!} (X - \mu)^n}_{R_2}. \end{aligned}$$



Expressões aproximadas da média e da variância

Simplificando as expressões anteriores, nós temos que

$$Y = H(\mu) + H^{(1)}(\mu)(X - \mu) + R_2$$
$$\Rightarrow Y \approx H(\mu) + H^{(1)}(\mu)(X - \mu).$$



Expressões aproximadas da média e da variância

Simplificando as expressões anteriores, nós temos que

$$Y = H(\mu) + H^{(1)}(\mu)(X - \mu) + R_2$$
$$\Rightarrow Y \approx H(\mu) + H^{(1)}(\mu)(X - \mu).$$

Aplicando a variância,



Expressões aproximadas da média e da variância

Simplificando as expressões anteriores, nós temos que

$$\begin{aligned} Y &= H(\mu) + H^{(1)}(\mu)(X - \mu) + R_2 \\ \Rightarrow Y &\approx H(\mu) + H^{(1)}(\mu)(X - \mu). \end{aligned}$$

Aplicando a variância, nós temos que

$$\begin{aligned} \text{Var}(Y) &\approx \text{Var} \left\{ H(\mu) + H^{(1)}(\mu)(X - \mu) \right\} \\ &\approx \left[H^{(1)}(\mu) \right]^2 \text{Var}(X - \mu) = \left[H^{(1)}(\mu) \right]^2 \sigma^2. \end{aligned}$$



Expressões aproximadas da média e da variância

Simplificando as expressões anteriores, nós temos que

$$\begin{aligned} Y &= H(\mu) + H^{(1)}(\mu)(X - \mu) + R_2 \\ \Rightarrow Y &\approx H(\mu) + H^{(1)}(\mu)(X - \mu). \end{aligned}$$

Aplicando a variância, nós temos que

$$\begin{aligned} \text{Var}(Y) &\approx \text{Var} \left\{ H(\mu) + H^{(1)}(\mu)(X - \mu) \right\} \\ &\approx \left[H^{(1)}(\mu) \right]^2 \text{Var}(X - \mu) = \left[H^{(1)}(\mu) \right]^2 \sigma^2. \end{aligned}$$



Roteiro

- 1 Motivação
- 2 Série de Taylor
- 3 Expressões aproximadas da média e da variância
- 4 Desigualdades
- 5 Referências bibliográficas



Desigualdade de Markov

Se X é uma variável aleatória que assume somente valores não negativos, então para qualquer $\lambda > 0$,

$$\mathbb{P}(X \geq \lambda) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{\lambda}.$$

Desigualdade de Markov

Se X é uma variável aleatória que assume somente valores não negativos, então para qualquer $\lambda > 0$,

$$\mathbb{P}(X \geq \lambda) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{\lambda}.$$



Desigualdade de Markov

Prova. Para $\lambda > 0$,



Desigualdade de Markov

Prova. Para $\lambda > 0$, seja

$$I = \begin{cases} 1, & \text{se } X \geq \lambda; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Desigualdade de Markov

Prova. Para $\lambda > 0$, seja

$$I = \begin{cases} 1, & \text{se } X \geq \lambda; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Notem que, $\mathbb{E}(I) = \mathbb{P}(X \geq \lambda)$.

Desigualdade de Markov

Prova. Para $\lambda > 0$, seja

$$I = \begin{cases} 1, & \text{se } X \geq \lambda; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Notem que, $\mathbb{E}(I) = \mathbb{P}(X \geq \lambda)$.

Desigualdade de Markov

Notem também que,

$$I \leq \frac{X}{\lambda}.$$

Tomando as esperanças da desigualdade acima,



Desigualdade de Markov

Notem também que,

$$I \leq \frac{X}{\lambda}.$$

Tomando as esperanças da desigualdade acima,

$$\mathbb{E}(I) \leq \mathbb{E}\left(\frac{X}{\lambda}\right) = \frac{\mathbb{E}(X)}{\lambda}$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(X \geq \lambda) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{\lambda}.$$



Desigualdade de Markov

Notem também que,

$$I \leq \frac{X}{\lambda}.$$

Tomando as esperanças da desigualdade acima,

$$\mathbb{E}(I) \leq \mathbb{E}\left(\frac{X}{\lambda}\right) = \frac{\mathbb{E}(X)}{\lambda}$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(X \geq \lambda) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{\lambda}.$$



Desigualdade de Chebyshev

Seja X uma variável aleatória com média $\mu < \infty$ (finita) e variância σ^2 .

Então, para todo $\lambda > 0$,

$$\mathbb{P}(|X - \mu| \geq \lambda) \leq \frac{\sigma^2}{\lambda^2}.$$



Desigualdade de Chebyshev

Seja X uma variável aleatória com média $\mu < \infty$ (finita) e variância σ^2 .

Então, para todo $\lambda > 0$,

$$\mathbb{P}(|X - \mu| \geq \lambda) \leq \frac{\sigma^2}{\lambda^2}.$$



Desigualdade de Chebyshev

Prova. Desde que $(X - \mu)^2$ é uma variável aleatória não negativa,



Desigualdade de Chebyshev

Prova. Desde que $(X - \mu)^2$ é uma variável aleatória não negativa, nós podemos aplicar a desigualdade de Markov



Desigualdade de Chebyshev

Prova. Desde que $(X - \mu)^2$ é uma variável aleatória não negativa, nós podemos aplicar a desigualdade de Markov para obter

$$\mathbb{P} \left[(X - \mu)^2 \geq \lambda^2 \right] \leq \frac{\mathbb{E}[(X - \mu)^2]}{\lambda^2}.$$



Desigualdade de Chebyshev

Prova. Desde que $(X - \mu)^2$ é uma variável aleatória não negativa, nós podemos aplicar a desigualdade de Markov para obter

$$\mathbb{P} \left[(X - \mu)^2 \geq \lambda^2 \right] \leq \frac{\mathbb{E}[(X - \mu)^2]}{\lambda^2}.$$

Observem que, $(X - \mu)^2 \geq \lambda^2$ se e somente se $|X - \mu| \geq \lambda$,



Desigualdade de Chebyshev

Prova. Desde que $(X - \mu)^2$ é uma variável aleatória não negativa, nós podemos aplicar a desigualdade de Markov para obter

$$\mathbb{P} \left[(X - \mu)^2 \geq \lambda^2 \right] \leq \frac{\mathbb{E}[(X - \mu)^2]}{\lambda^2}.$$

Observem que, $(X - \mu)^2 \geq \lambda^2$ se e somente se $|X - \mu| \geq \lambda$, dessa forma, a equação acima é equivalente a

$$\mathbb{P} (|X - \mu| \geq \lambda) \leq \frac{\mathbb{E}[(X - \mu)^2]}{\lambda^2} = \frac{\sigma^2}{\lambda^2}.$$



Desigualdade de Chebyshev

Prova. Desde que $(X - \mu)^2$ é uma variável aleatória não negativa, nós podemos aplicar a desigualdade de Markov para obter

$$\mathbb{P} \left[(X - \mu)^2 \geq \lambda^2 \right] \leq \frac{\mathbb{E}[(X - \mu)^2]}{\lambda^2}.$$

Observem que, $(X - \mu)^2 \geq \lambda^2$ se e somente se $|X - \mu| \geq \lambda$, dessa forma, a equação acima é equivalente a

$$\mathbb{P} (|X - \mu| \geq \lambda) \leq \frac{\mathbb{E}[(X - \mu)^2]}{\lambda^2} = \frac{\sigma^2}{\lambda^2}.$$



Desigualdades

A importância das desigualdades de Markov e Chebyshev é que elas nos permitem encontrar limites para as probabilidades quando **somente** a média ou ambas, a média e variância, da distribuição de probabilidades são conhecidas.



Desigualdades

Claro, se a distribuição é conhecida, então a probabilidade desejada pode ser calculada de forma exata e nós não precisaríamos recorrer a esses limites (essas desigualdades).



Desigualdade de Markov generalizada

Seja X uma variável aleatória qualquer. Para todo $t > 0$,

$$\mathbb{P}(|X| \geq \lambda) \leq \frac{\mathbb{E}[|X|^t]}{\lambda^t}, \quad \forall \lambda > 0.$$

Desigualdade de Markov generalizada

Seja X uma variável aleatória qualquer. Para todo $t > 0$,

$$\mathbb{P}(|X| \geq \lambda) \leq \frac{\mathbb{E}[|X|^t]}{\lambda^t}, \quad \forall \lambda > 0.$$



Limitantes de Chernoff

Para quaisquer variável aleatória X e constante $a \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{P}(X \geq a) \leq e^{-ta} M_X(t), \quad \forall t > 0;$$

$$\mathbb{P}(X \leq a) \leq e^{-ta} M_X(t), \quad \forall t < 0;$$



Limitantes de Chernoff

Para quaisquer variável aleatória X e constante $a \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{P}(X \geq a) \leq e^{-ta} M_X(t), \quad \forall t > 0;$$

$$\mathbb{P}(X \leq a) \leq e^{-ta} M_X(t), \quad \forall t < 0;$$

em que $M_X(t)$ é a função geradora de momentos de X , avaliada no ponto t .

Limitantes de Chernoff

Para quaisquer variável aleatória X e constante $a \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{P}(X \geq a) \leq e^{-ta} M_X(t), \quad \forall t > 0;$$

$$\mathbb{P}(X \leq a) \leq e^{-ta} M_X(t), \quad \forall t < 0;$$

em que $M_X(t)$ é a função geradora de momentos de X , avaliada no ponto t . Uma vez que os limitantes de Chernoff valem para $t \in \mathbb{R}$,



Limitantes de Chernoff

Para quaisquer variável aleatória X e constante $a \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{P}(X \geq a) \leq e^{-ta} M_X(t), \quad \forall t > 0;$$

$$\mathbb{P}(X \leq a) \leq e^{-ta} M_X(t), \quad \forall t < 0;$$

em que $M_X(t)$ é a função geradora de momentos de X , avaliada no ponto t . Uma vez que os limitantes de Chernoff valem para $t \in \mathbb{R}$, nós obtemos o melhor limitante para $\mathbb{P}(X \geq a)$ escolhendo t que minimiza $e^{-ta} M_X(t)$.



Limitantes de Chernoff

Para quaisquer variável aleatória X e constante $a \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{P}(X \geq a) \leq e^{-ta} M_X(t), \quad \forall t > 0;$$

$$\mathbb{P}(X \leq a) \leq e^{-ta} M_X(t), \quad \forall t < 0;$$

em que $M_X(t)$ é a função geradora de momentos de X , avaliada no ponto t . Uma vez que os limitantes de Chernoff valem para $t \in \mathbb{R}$, nós obtemos o melhor limitante para $\mathbb{P}(X \geq a)$ escolhendo t que minimiza $e^{-ta} M_X(t)$.



Função convexa

Definição

Uma função real e duas vezes diferenciável $f(a)$ é dita ser convexa se $f^{(2)}(a) \geq 0$, para todo a .

Função convexa

Definição

Uma função real e duas vezes diferenciável $f(a)$ é dita ser convexa se $f^{(2)}(a) \geq 0$, para todo a . Além disso, suas derivadas são monotonicamente não decrescentes.

Função convexa

Definição

Uma função real e duas vezes diferenciável $f(a)$ é dita ser convexa se $f^{(2)}(a) \geq 0$, para todo a . Além disso, suas derivadas são monotonicamente não decrescentes.

Observação. De forma similar, $f(a)$ é dita ser côncava se $f^{(2)}(a) \leq 0$.



Função convexa

Definição

Uma função real e duas vezes diferenciável $f(a)$ é dita ser convexa se $f^{(2)}(a) \geq 0$, para todo a . Além disso, suas derivadas são monotonicamente não decrescentes.

Observação. De forma similar, $f(a)$ é dita ser côncava se $f^{(2)}(a) \leq 0$.



Desigualdade de Jensen

Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função convexa. Se a variável aleatória X é integrável,



Desigualdade de Jensen

Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função convexa. Se a variável aleatória X é integrável, então

$$\mathbb{E}[f(X)] \geq f(\mathbb{E}[X]).$$

Desigualdade de Jensen

Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função convexa. Se a variável aleatória X é integrável, então

$$\mathbb{E}[f(X)] \geq f(\mathbb{E}[X]).$$

Observação: A Desigualdade de Jensen é válida se f é convexa em um intervalo (a, b) tal que $\mathbb{P}(a < X < b) = 1$, em que se admite a possibilidade de $a = -\infty$ ou $b = +\infty$.



Desigualdade de Jensen

Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função convexa. Se a variável aleatória X é integrável, então

$$\mathbb{E}[f(X)] \geq f(\mathbb{E}[X]).$$

Observação: A Desigualdade de Jensen é válida se f é convexa em um intervalo (a, b) tal que $\mathbb{P}(a < X < b) = 1$, em que se admite a possibilidade de $a = -\infty$ ou $b = +\infty$.



Desigualdade de Jensen

Demonstração. Usando (2), até o segundo termo e em torno de $X = \mu$,



Desigualdade de Jensen

Demonstração. Usando (2), até o segundo termo e em torno de $X = \mu$, nós temos que

$$\begin{aligned} f(X) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(\mu)}{n!} (X - \mu)^n \\ &= \frac{f^{(0)}(\mu)}{0!} (X - \mu)^0 + \frac{f^{(1)}(\mu)}{1!} (X - \mu)^1 + \underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} \frac{f^{(n)}(\mu)}{n!} (X - \mu)^n}_{R_2(x)}. \end{aligned}$$



Desigualdade de Jensen

Demonstração. Usando (2), até o segundo termo e em torno de $X = \mu$, nós temos que

$$\begin{aligned} f(X) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(\mu)}{n!} (X - \mu)^n \\ &= \frac{f^{(0)}(\mu)}{0!} (X - \mu)^0 + \frac{f^{(1)}(\mu)}{1!} (X - \mu)^1 + \underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} \frac{f^{(n)}(\mu)}{n!} (X - \mu)^n}_{R_2(x)}. \end{aligned}$$



Desigualdade de Jensen

Simplificando as expressões anteriores e utilizando o resultado para $R_2(x)$,



Desigualdade de Jensen

Simplificando as expressões anteriores e utilizando o resultado para $R_2(x)$,
nós temos que

$$f(X) = f(\mu) + f^{(1)}(\mu)(X - \mu) + \frac{f^{(2)}(\tau)}{2}(X - \mu)^2,$$

em que $X \leq \tau \leq \mu$.



Desigualdade de Jensen

Simplificando as expressões anteriores e utilizando o resultado para $R_2(x)$, nós temos que

$$f(X) = f(\mu) + f^{(1)}(\mu)(X - \mu) + \frac{f^{(2)}(\tau)}{2}(X - \mu)^2,$$

em que $X \leq \tau \leq \mu$. Como f é uma função convexa,



Desigualdade de Jensen

Simplificando as expressões anteriores e utilizando o resultado para $R_2(x)$, nós temos que

$$f(X) = f(\mu) + f^{(1)}(\mu)(X - \mu) + \frac{f^{(2)}(\tau)}{2}(X - \mu)^2,$$

em que $X \leq \tau \leq \mu$. Como f é uma função convexa, nós temos que

$$f(X) \geq f(\mu) + f^{(1)}(\mu)(X - \mu).$$



Desigualdade de Jensen

Simplificando as expressões anteriores e utilizando o resultado para $R_2(x)$, nós temos que

$$f(X) = f(\mu) + f^{(1)}(\mu)(X - \mu) + \frac{f^{(2)}(\tau)}{2}(X - \mu)^2,$$

em que $X \leq \tau \leq \mu$. Como f é uma função convexa, nós temos que

$$f(X) \geq f(\mu) + f^{(1)}(\mu)(X - \mu).$$



Desigualdade de Jensen

Aplicando a esperança, nós temos que

$$\mathbb{E} [f (X)] \geq \mathbb{E} \{f(\mu)\} + \mathbb{E} \left\{ f^{(1)}(\mu)(X - \mu) \right\} .$$

Desigualdade de Jensen

Aplicando a esperança, nós temos que

$$\mathbb{E} [f (X)] \geq \mathbb{E} \{f(\mu)\} + \mathbb{E} \left\{ f^{(1)}(\mu)(X - \mu) \right\}.$$

Agora,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [f (X)] &\geq f(\mu) + f^{(1)}(\mu)\mathbb{E} \{X - \mu\} \\ \Rightarrow \mathbb{E} [f (X)] &\geq f(\mu). \end{aligned}$$

Desigualdade de Jensen

Aplicando a esperança, nós temos que

$$\mathbb{E} [f (X)] \geq \mathbb{E} \{f(\mu)\} + \mathbb{E} \left\{ f^{(1)}(\mu)(X - \mu) \right\}.$$

Agora,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [f (X)] &\geq f(\mu) + f^{(1)}(\mu)\mathbb{E} \{X - \mu\} \\ \Rightarrow \mathbb{E} [f (X)] &\geq f(\mu). \end{aligned}$$



Desigualdade de Jensen

Lembrando que $\mathbb{E}(X) = \mu$, nós concluimos a demonstração.



Desigualdade de Jensen

Lembrando que $\mathbb{E}(X) = \mu$, nós concluímos a demonstração.

Essa demonstração foi adaptada de Ross (2019, p. 427), para uma forma alternativa, ver Magalhães (2015, p. 224).



Desigualdade de Jensen

Lembrando que $\mathbb{E}(X) = \mu$, nós concluímos a demonstração.

Essa demonstração foi adaptada de Ross (2019, p. 427), para uma forma alternativa, ver Magalhães (2015, p. 224).



Desigualdade de Cauchy-Schwarz

Sejam X e Y variáveis aleatórias com esperanças finitas. Então

$$\mathbb{E}(|XY|) \leq \sqrt{\mathbb{E}(X^2) \mathbb{E}(Y^2)}.$$



Desigualdade de Cauchy-Schwarz

Sejam X e Y variáveis aleatórias com esperanças finitas. Então

$$\mathbb{E}(|XY|) \leq \sqrt{\mathbb{E}(X^2) \mathbb{E}(Y^2)}.$$



Roteiro

- 1 Motivação
- 2 Série de Taylor
- 3 Expressões aproximadas da média e da variância
- 4 Desigualdades
- 5 Referências bibliográficas



Referências bibliográficas I

Magalhães, M. N. (2015), *Probabilidade e variáveis aleatórias*, 3 edn, Editora da Universidade de São Paulo, São Paulo.

Ross, S. (2019), *A first course in probability*, 10 edn. global edn, Pearson Education, Malaysia.

Taylor, B. (1715), *Methodus Incrementorum Directa et Inversa*, Typis Pearsonianis prostant apud Gul. Innys ad Insignia Principis in Coemeterio Paulino, Londini.



Obrigado!

✉ tiago.magalhaes@ufjf.br

📄 ufjf.br/tiago_magalhaes

🌐 Departamento de Estatística, Sala 319

