

Estatísticas de ordem

Tiago M. Magalhães

Departamento de Estatística - ICE-UFJF

Juiz de Fora, 05 de dezembro de 2025



Roteiro

- 1 Estatísticas de ordem
- 2 Distribuição das estatísticas de ordem
- 3 Distribuição da amplitude
- 4 Bibliografia



Roteiro

- 1 Estatísticas de ordem
- 2 Distribuição das estatísticas de ordem
- 3 Distribuição da amplitude
- 4 Bibliografia



Estatísticas de ordem

Sejam X_1, X_2, \dots, X_n VA IID, com distribuição \mathcal{D} , função densidade de probabilidade (FDP) f e função de distribuição acumulada (FDA) F . Definam:

$X_{(1)}$ = o menor valor entre X_1, X_2, \dots, X_n ;

$X_{(2)}$ = o segundo menor valor entre X_1, X_2, \dots, X_n ;

\vdots

$X_{(j)}$ = o j -ésimo menor valor entre X_1, X_2, \dots, X_n ;

\vdots

$X_{(n)}$ = o maior valor entre X_1, X_2, \dots, X_n .



Estatísticas de ordem

Sejam X_1, X_2, \dots, X_n VA IID, com distribuição \mathcal{D} , função densidade de probabilidade (FDP) f e função de distribuição acumulada (FDA) F . Definam:

$X_{(1)}$ = o menor valor entre X_1, X_2, \dots, X_n ;

$X_{(2)}$ = o segundo menor valor entre X_1, X_2, \dots, X_n ;

\vdots

$X_{(j)}$ = o j -ésimo menor valor entre X_1, X_2, \dots, X_n ;

\vdots

$X_{(n)}$ = o maior valor entre X_1, X_2, \dots, X_n .



Estatísticas de ordem

Os valores ordenados $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(n)}$ são denominados de **estatísticas de ordem** correspondentes as VA X_1, X_2, \dots, X_n .

Em outras palavras, $X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(n)}$ são os valores ordenados de X_1, X_2, \dots, X_n .



Estatísticas de ordem

Os valores ordenados $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(n)}$ são denominados de **estatísticas de ordem** correspondentes as VA X_1, X_2, \dots, X_n .

Em outras palavras, $X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(n)}$ são os valores ordenados de X_1, X_2, \dots, X_n .



Estatísticas de ordem

Observação

Os valores extremos $X_{(1)}$ e $X_{(n)}$ são frequentemente os mais interessantes.

Pois, eles são, respectivamente, o **mínimo** e o **máximo**, isto é, $X_{(1)} = \min \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ e $X_{(n)} = \max \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$.



Estatísticas de ordem

Observação

Os valores extremos $X_{(1)}$ e $X_{(n)}$ são frequentemente os mais interessantes.

Pois, eles são, respectivamente, o **mínimo** e o **máximo**, isto é, $X_{(1)} = \min \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ e $X_{(n)} = \max \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$.



Exemplos

Exemplo 1. Se X_1, \dots, X_5 são VA IID a uma exponencial com parâmetro λ , calcule:

(a) $\mathbb{P}(\min \{X_1, \dots, X_5\} \leq a)$;

(b) $\mathbb{P}(\max \{X_1, \dots, X_5\} \leq a)$.

Lembrando que, se $X \sim \text{Exp}(\lambda)$, então

$$F_X(x) = 1 - \exp \{-\lambda x\}, \quad S_X(x) = 1 - F_X(x) = \exp \{-\lambda x\}. \quad (1)$$



Exemplos

Exemplo 1. Se X_1, \dots, X_5 são VA IID a uma exponencial com parâmetro λ , calcule:

(a) $\mathbb{P}(\min \{X_1, \dots, X_5\} \leq a)$;

(b) $\mathbb{P}(\max \{X_1, \dots, X_5\} \leq a)$.

Lembrando que, se $X \sim \text{Exp}(\lambda)$, então

$$F_X(x) = 1 - \exp \{-\lambda x\}, \quad S_X(x) = 1 - F_X(x) = \exp \{-\lambda x\}. \quad (1)$$



Roteiro

- 1 Estatísticas de ordem
- 2 Distribuição das estatísticas de ordem**
- 3 Distribuição da amplitude
- 4 Bibliografia



Estatísticas de ordem

A FDP conjunta de $X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(n)}$ é dada por

$$f_{X_{(1)}, \dots, X_{(n)}}(x_1, \dots, x_n) = n! \times f_{X_1}(x_1) \times \dots \times f_{X_n}(x_n) \mathbb{I}_{\mathbb{R}}(x_1 < \dots < x_n).$$



E a FDP marginal da j -ésima estatística de ordem $X_{(j)}$ é dada por

$$f_{X_{(j)}}(x) = \frac{n!}{(n-j)!(j-1)!} [F(x)]^{j-1} [1 - F(x)]^{n-j} f(x). \quad (2)$$

Estatísticas de ordem

Para $X_{(1)} = \min \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ e $X_{(n)} = \max \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ a FDP em (2) pode escrita ser, respectivamente, da seguinte forma:

$$f_{X_{(1)}}(x) = n [1 - F(x)]^{n-1} f(x), \quad f_{X_{(n)}}(x) = n [F(x)]^{n-1} f(x).$$



Estatísticas de ordem

Para $X_{(1)} = \min \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ e $X_{(n)} = \max \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ a FDP em (2) pode escrita ser, respectivamente, da seguinte forma:

$$f_{X_{(1)}}(x) = n[1 - F(x)]^{n-1} f(x), \quad f_{X_{(n)}}(x) = n[F(x)]^{n-1} f(x).$$



Exemplos

Exemplo 2. Nós dizemos que uma VA possui uma distribuição *exponencial truncada* de parâmetros $\lambda > 0$ e $\theta > 0$,



Exemplos

Exemplo 2. Nós dizemos que uma VA possui uma distribuição *exponencial truncada* de parâmetros $\lambda > 0$ e $\theta > 0$, $X \sim \text{ET}(\lambda, \theta)$,



Exemplos

Exemplo 2. Nós dizemos que uma VA possui uma distribuição *exponencial truncada* de parâmetros $\lambda > 0$ e $\theta > 0$, $X \sim \text{ET}(\lambda, \theta)$, se sua FDP é da forma

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda(x-\theta)} \mathbb{I}_{(\theta, \infty)}(x).$$



Exemplos

Exemplo 2. Nós dizemos que uma VA possui uma distribuição *exponencial truncada* de parâmetros $\lambda > 0$ e $\theta > 0$, $X \sim \text{ET}(\lambda, \theta)$, se sua FDP é da forma

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda(x-\theta)} \mathbb{I}_{(\theta, \infty)}(x).$$

Seja X_1, X_2, \dots, X_n uma amostra aleatória de $X \sim \text{ET}(1, \theta)$. Encontre a FDP de $Y = \min \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$.



Exemplos

Exemplo 2. Nós dizemos que uma VA possui uma distribuição *exponencial truncada* de parâmetros $\lambda > 0$ e $\theta > 0$, $X \sim \text{ET}(\lambda, \theta)$, se sua FDP é da forma

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda(x-\theta)} \mathbb{I}_{(\theta, \infty)}(x).$$

Seja X_1, X_2, \dots, X_n uma amostra aleatória de $X \sim \text{ET}(1, \theta)$. Encontre a FDP de $Y = \min \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$.



Exemplos

Primeiramente, é importante saber que, se $X \sim \text{ET}(\lambda, \theta)$, então

$$F_X(x) = 1 - \exp\{-\lambda(x - \theta)\}, \quad \mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda} + \theta, \quad \text{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}. \quad (3)$$



Exemplos

Primeiramente, é importante saber que, se $X \sim \text{ET}(\lambda, \theta)$, então

$$F_X(x) = 1 - \exp\{-\lambda(x - \theta)\}, \quad \mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda} + \theta, \quad \text{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}. \quad (3)$$

Note quem, $X = Z + \theta$, em que $Z \sim \text{exponencial}(\lambda)$.



Exemplos

Primeiramente, é importante saber que, se $X \sim \text{ET}(\lambda, \theta)$, então

$$F_X(x) = 1 - \exp\{-\lambda(x - \theta)\}, \quad \mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda} + \theta, \quad \text{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}. \quad (3)$$

Note quem, $X = Z + \theta$, em que $Z \sim \text{exponencial}(\lambda)$.



Roteiro

- 1 Estatísticas de ordem
- 2 Distribuição das estatísticas de ordem
- 3 Distribuição da amplitude**
- 4 Bibliografia



Amplitude

Novamente, sejam X_1, X_2, \dots, X_n VA IID, com distribuição \mathcal{D} , FDP f e FDA F . A VA

$$R = X_{(n)} - X_{(1)}$$

é denominada de **amplitude** das VA observadas.

Amplitude

Novamente, sejam X_1, X_2, \dots, X_n VA IID, com distribuição \mathcal{D} , FDP f e FDA F . A VA

$$R = X_{(n)} - X_{(1)}$$

é denominada de **amplitude** das VA observadas.

Amplitude

De maneira geral, a distribuição de R pode ser obtida a partir da definição da FDA, da seguinte forma:

$$G(a) = \mathbb{P}(R \leq a) = n \int_{-\infty}^{+\infty} [F(x+a) - F(x)]^{n-1} f(x) dx. \quad (4)$$



Amplitude

De maneira geral, a distribuição de R pode ser obtida a partir da definição da FDA, da seguinte forma:

$$G(a) = \mathbb{P}(R \leq a) = n \int_{-\infty}^{+\infty} [F(x+a) - F(x)]^{n-1} f(x) dx. \quad (4)$$

A expressão (4) tem forma explícita para poucos casos.



Amplitude

De maneira geral, a distribuição de R pode ser obtida a partir da definição da FDA, da seguinte forma:

$$G(a) = \mathbb{P}(R \leq a) = n \int_{-\infty}^{+\infty} [F(x+a) - F(x)]^{n-1} f(x) dx. \quad (4)$$

A expressão (4) tem forma explícita para poucos casos.



Amplitude

Observação

A amplitude é bastante utilizada no Controle Estatístico de Qualidade.

Exemplos

Exemplo 3. Se X_1, X_2, \dots, X_n são VA IID uniformes no intervalo $(0,1)$, encontre a distribuição de:

$$R = X_{(n)} - X_{(1)}.$$

Roteiro

- 1 Estatísticas de ordem
- 2 Distribuição das estatísticas de ordem
- 3 Distribuição da amplitude
- 4 Bibliografia



Bibliografia

Meyer, P. L. (2017), *Probabilidade: aplicações à Estatística*, 2 edn, Livros Técnicos e Científicos Editora Ltda, Rio de Janeiro.

Ross, S. (2010), *Probabilidade: um curso moderno com aplicações*, 8 edn, Bookman, Porto Alegre.

Ross, S. (2019), *A first course in probability*, 10 edn. global edn, Pearson Education, Malaysia.



Obrigado!

✉ tiago.magalhaes@ufjf.br

📄 ufjf.br/tiago_magalhaes

🌐 Departamento de Estatística, Sala 319

