Funções de variáveis aleatórias

Tiago M. Magalhães

Departamento de Estatística - ICE-UFJF

Juiz de Fora, 19 de novembro de 2025

Roteiro

1 Motivação

2 Função geradora de momentos

3 Função distribuição acumulada

4 Bibliografia

Roteiro

1. Motivação
2. Função geradora de momentos
3. Função distribuição acumulada
4. Bibliografia

Motivação

Como nós vimos nas últimas aulas, podem haver situações em que nós estamos interessados nas distribuições de probabilidades de funções de vetores aleatórios.

Motivação

De maneira geral, o método jacobiano é a forma para encontrar essas distribuições de probabilidades.

Porém, existem situações em que o procedimento pode ser simplificado, por exemplo, através do método das convoluções.

Motivação

De maneira geral, o método jacobiano é a forma para encontrar essas distribuições de probabilidades.

Porém, existem situações em que o procedimento pode ser simplificado, por exemplo, através do método das convoluções.

Motivação

Ainda assim, encontrar a distribuição de probabilidades de uma função de um vetor aleatório pode ser ainda mais fácil.

Uma dessas situações ocorre quando as variáveis aleatórias que o compõe são independentes e a **função geradora de momentos** ou a **função de distribuição acumulada** é **conhecida**.

Motivação

Ainda assim, encontrar a distribuição de probabilidades de uma função de um vetor aleatório pode ser ainda mais fácil.

Uma dessas situações ocorre quando as variáveis aleatórias que o compõe são independentes e a **função geradora de momentos** ou a **função de distribuição acumulada** é **conhecida**.

Roteiro

1. Motivação
2. Função geradora de momentos
3. Função distribuição acumulada
4. Bibliografia

Função geradora de momentos

A função geradora de momentos (FGM) é um instrumento importante no estudo de vários aspectos das distribuições de probabilidades.

Entre esses aspectos, nós temos o emprego da FGM no estudo de somas de variáveis aleatórias independentes e na obtenção da distribuição de probabilidades.

Função geradora de momentos

A função geradora de momentos (FGM) é um instrumento importante no estudo de vários aspectos das distribuições de probabilidades.

Entre esses aspectos, nós temos o emprego da FGM no estudo de somas de variáveis aleatórias independentes e na obtenção da distribuição de probabilidades.

Função geradora de momentos

De maneira geral, sejam n variáveis aleatórias $X_1, X_2, \ldots, X_n$ e

$$Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_n.$$

Função geradora de momentos

De maneira geral, sejam n variáveis aleatórias $X_1, X_2, \ldots, X_n$ e

$$Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_n.$$

Função geradora de momentos

Dessa forma,

$$
\begin{aligned}
M_Y(t) = \mathbb{E}\left[\exp\left(tY\right)\right] = \mathbb{E}\left[\exp\left(t\sum_{i=1}^{n} X_i\right)\right] \\
\mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{n} \exp\left(tX_i\right)\right] \overset{\text{Ind.}}{=} \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left[\exp\left(tX_i\right)\right] \\
= \prod_{i=1}^{n} M_{X_i}(t).
\end{aligned}
$$

Isto é, a FGM de Y é o produto das FGMs das VAs $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Função geradora de momentos

Dessa forma,

$$
\begin{aligned}
M_Y(t) &= \mathbb{E}\left[\exp\left(tY\right)\right] = \mathbb{E}\left[\exp\left(t\sum_{i=1}^{n} X_i\right)\right] \\
&\mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{n}\exp\left(tX_i\right)\right] \overset{\text{Ind.}}{=} \prod_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left[\exp\left(tX_i\right)\right] \\
&= \prod_{i=1}^{n} M_{X_i}(t).
\end{aligned}
$$

Isto é, a FGM de Y é o produto das FGMs das VAs $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Função geradora de momentos

Adicionalmente, se as n variáveis aleatórias $X_1, X_2, \ldots, X_n$ são identicamente distribuídas, nós temos que:

$$M_Y(t) = \prod_{i=1}^{n} M_{X_i}(t) \overset{\mathrm{ID}}{=} [M_{X_1}(t)]^n .$$

Função geradora de momentos

Adicionalmente, se as n variáveis aleatórias $X_1, X_2, \ldots, X_n$ são identicamente distribuídas, nós temos que:

$$M_Y(t) = \prod_{i=1}^{n} M_{X_i}(t) \stackrel{\text{ID}}{=} [M_{X_1}(t)]^n \,.$$

Exemplos

Exemplo 1. Se X e Y são duas VA independentes com distribuições Poisson de parâmetros λ_1 e λ_2, respectivamente, determine a distribuição de probabilidades de $Z = X + Y$.

Exemplos

Exemplo 2. Suponha que $Z = 2W + X - Y$, na qual W, X e Y são variáveis aleatórias independentes, cada uma delas com $\mathrm{N}(\mu_W, \sigma^2_W)$, $\mathrm{N}(\mu_X, \sigma^2_X)$ e $\mathrm{N}(\mu_Y, \sigma^2_Y)$, respectivamente.

Roteiro

1 Motivação

2 Função geradora de momentos

3 Função distribuição acumulada

4 Bibliografia

Função distribuição acumulada

A função distribuição acumulada, assim como a FGM, é única, portanto, ela também pode ser utilizada como uma metodologia para encontrar a distribuição de probabilidades de uma VA que seja função de outras VAs.

Função distribuição acumulada

Nós retornaremos a esse tópico na aula sobre **Estatísticas de ordem**.

Função distribuição acumulada

Nós retornaremos a esse tópico na aula sobre **Estatísticas de ordem**.

Função distribuição acumulada

Nós retornaremos a esse tópico na aula sobre **Estatísticas de ordem**.

Roteiro

1 Motivação

2 Função geradora de momentos

3 Função distribuição acumulada

4 Bibliografia

Bibliografia

Meyer, P. L. (2017), *Probabilidade: aplicações à Estatística*, 2 edn, Livros Técnicos e Científicos Editora Ltda, Rio de Janeiro.

Ross, S. (2010), *Probabilidade: um curso moderno com aplicações*, 8 edn, Bookman, Porto Alegre.

Ross, S. (2019), *A first course in probability*, 10 edn. global edn, Pearson Education, Malaysia.

Obrigado!

✉ tiago.magalhaes@ufjf.br

🖱 ufjf.br/tiago_magalhaes

🌍 Departamento de Estatística, Sala 319