Classwork 06

Exercícios

1. Após um censo futebolístico promovido pelo professor de Estatística Leclerc, constatou-se que um décimo dos juiz-foranos torce para o SC Juiz de Fora, dois décimos torcem para o Tupi FC, sendo essa a mesma proporção de torcedores do Tupynambás FC. Os demais foram categorizados como "outros". Em um determinado momento, em que há 50 pessoas na Feira da Avenida Brasil, defina X_i como o número de torcedores do SC Juiz de Fora, do Tupi FC, do Tupynambás FC e dos "outros", respectivamente, entre essas 50 pessoas.

   (a) Identifique a distribuição de probabilidade do vetor aleatório $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, X_3, X_4)^\top$.

   (b) Calcule o valor esperado do número de torcedores do Tupi FC.

   (c) Determine a covariância entre X_1 e X_2 e interprete o resultado.

   (d) Identifique a distribuição de probabilidade de X_i, para $i = 1, \ldots, 4$.

2. Em uma fábrica, medem-se duas características de produtos produzidos diariamente por duas máquinas diferentes:

   - X_1: comprimento (em cm) do produto da máquina 1;
   - X_2: comprimento (em cm) do produto da máquina 2.

   Suponha que o vetor aleatório $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2)^\top \sim \mathrm{N}_2(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, em que

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} 9 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

   Calcule:

   (a) A correlação entre X_1 e X_2 e interprete o resultado em termos da produção das máquinas;

   (b) As distribuições marginais de X_1 e de X_2;

(c) As distribuições condicionais de $X_1|X_2 = x_2$ e de $X_2|X_1 = x_1$, explicando o significado dessas distribuições no contexto da fábrica.

3. Sejam X_1 e X_2 duas variáveis aleatórias independentes identicamente distribuídas (IID) com distribuição log-normal(μ, σ^2), isto é, sua função densidade de probabilidade (FDP) é dada por:

$$f(x_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x_i} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\log x_i - \mu}{\sigma}\right)^2\right\} \mathbb{I}_{\mathbb{R}_+}(x_i),$$

$i = 1, 2$, respectivamente. Pelo método jacobiano, prove que $Y = X_1X_2$ tem distribuição log-normal$(2\mu, 2\sigma^2)$.

4. Sejam X_1 e X_2 variáveis aleatórias com distribuicao normal padrão e qui-quadrado com k graus de liberdade, respectivamente. Pelo método jacobiano, sabendo que X_1 e X_2 são independentes, obtenha distribuição de

$$Y = \frac{X_1}{\sqrt{X_2/k}}.$$

Observação: Mesmo que não seja solicitado, sempre que possível, identifique as distribuições encontradas, indicando o nome e os parâmetros associados.