

Classwork 05

Exercícios

1. Suponha que $Z = X + Y$, em que X e Y são variáveis aleatórias (VAs) independentes, cada uma com função densidade de probabilidade (FDP) dada respectivamente por:

$$f_X(x) = \alpha_1 \exp\{-\alpha_1 x\} \mathbb{I}_{(0,+\infty)}(x),$$

$$f_Y(y) = \alpha_2 \exp\{-\alpha_2 y\} \mathbb{I}_{(0,+\infty)}(y),$$

em que $\alpha_1 > 0$ e $\alpha_2 > 0$. A partir da definição de convolução, determine a FDP de $Z = X + Y$.

2. Admita-se que X e Y representem a duração da vida de duas lâmpadas fabricadas por processos diferentes. Suponha que X e Y sejam variáveis aleatórias independentes, com função densidade de probabilidade (FDP), respectivamente, f_X e f_Y , na qual

$$f_X(x) = \exp\{-x\} \mathbb{I}_{(0,+\infty)}(x) \text{ e } f_Y(y) = 2 \exp\{-2y\} \mathbb{I}_{(0,+\infty)}(y).$$

A partir da definição de convolução, determine a FDP de

(a) $Z_1 = X + Y$.

(b) $Z_2 = X/Y$.

3. Se X_1 e X_2 são duas variáveis aleatórias independentes com distribuição Gumbel (também conhecida como distribuição do valor extremo do tipo I) de parâmetros (α_1, β) e (α_2, β) , respectivamente, com $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$ e $\beta \in \mathbb{R}_+$. Dessa forma, a respectiva função densidade de probabilidade (FDP) de X_i , $i = 1, 2$, é dada por:

$$f(x_i) = \frac{1}{\beta} \exp\left\{-\left[\frac{x_i - \alpha_i}{\beta} + \exp\left(-\frac{x_i - \alpha_i}{\beta}\right)\right]\right\} \mathbb{I}_{\mathbb{R}}(x_i).$$

Prove que $Y = X_1 - X_2$ tem distribuição logística $(\alpha_1 - \alpha_2, \beta)$, isto é a FDP de Y é dada

por:

$$f(y) = \frac{\exp \left\{ -\frac{y - (\alpha_1 - \alpha_2)}{\beta} \right\}}{\beta \left[1 + \exp \left\{ -\frac{y - (\alpha_1 - \alpha_2)}{\beta} \right\} \right]^2} \mathbb{I}_{\mathbb{R}}(y) = \frac{1}{4\beta} \operatorname{sech}^2 \left(\frac{y - \{\alpha_1 - \alpha_2\}}{\beta} \right) \mathbb{I}_{\mathbb{R}}(y),$$

em que a $\operatorname{sech}^2(\cdot)$ é o quadrado da função secante hiperbólica.

Observação: Mesmo que não seja solicitado, sempre que possível, identifique as distribuições encontradas, indicando o nome e os parâmetros associados.