Classwork 03

Exercícios

1. O dono de uma loja de TVs observou que 45% dos clientes que entram em sua loja compram uma TV de LCD, 15% compram uma TV de plasma e 40% apenas olham, sem comprar. Em um determinado momento, cinco clientes entram na loja. Qual é a probabilidade de que o dono venda exatamente duas TVs de LCD e uma TV de plasma?

2. Sejam $Y|U = u \sim \text{normal}(u, \sigma^2)$ e $U \sim \text{normal}(a, b^2)$, em que $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}_+$ e $\sigma \in \mathbb{R}_+$. Determine a distribuição de probabilidade:

   (a) Conjunta de $(Y, U)^\top$.

   (b) Marginal de Y.

   (c) Condicional de $U|Y = y$.

3. Seja $(X, Y)^\top$ um vetor aleatório contínuo com função densidade de probabilidade (FDP) conjunta dada por

$$f(x, y) = \frac{1}{4\pi\sqrt{1-\rho^2}} \left\{ \exp\left[-\frac{x^2 - 2\rho xy + y^2}{2\,(1-\rho^2)} \right] + \exp\left[-\frac{x^2 + 2\rho xy + y^2}{2\,(1-\rho^2)} \right] \right\} \mathbb{I}_{\mathbb{R}}(x)\, \mathbb{I}_{\mathbb{R}}(y),$$

   em que $\rho \in (-1, 1)$. Determine as FDPs:

   (a) Marginais de X e Y.

   (b) Condicionais de $X|Y = y$ e $Y|X = x$.

4. Seja o vetor aleatório $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2)^\top \sim \mathrm{N}_2(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, em que

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ e } \boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Calcule:

   (a) A correlação entre X_1 e X_2;

(b) As distribuições marginais de X_1 e de X_2;

(c) As distribuições condicionais de $X_1|X_2 = x_2$ e de $X_2|X_1 = x_1$.

5. Seja o vetor aleatório $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2)^\top \sim \mathrm{N}_2(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, em que

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ e } \boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Seja, também, uma variável aleatória $Y = X_1 + X_2$. Determine a distribuição de Y.

Observação: Mesmo que não seja solicitado, sempre que possível, identifique as distribuições encontradas, indicando o nome e os parâmetros associados.