Classwork 02

Exercícios:

1. Na "mega-sena" existem sessenta dezenas numeradas $(01, 02, \ldots, 60)$, das quais seis são sorteadas. Sejam X e Y: a menor e a maior dezena sorteada, respectivamente. Determine:

   (a) O suporte do vetor aleatório $(X, Y)^\top$?

   (b) A probabilidade da menor dezena sorteada ser 10 e a maior ser 32?

2. Rachel e Ross marcam um encontro no *Central Perk* às 13h30. O horário de chegada da Rachel (X_1) é uniforme entre 13h15 e 13h45, enquanto o horário de chegada do Ross (X_2) é uniforme entre 13h05 e 13h55, com X_1 e X_2 independentes. Determine a:

   (a) Função densidade de probabilidade conjunta de X_1 e X_2.

   (b) Probabilidade da Rachel ser a primeira a chegar.

3. Sejam $Y|U = u \sim \text{Poisson}(u)$ e $U \sim \text{gama}(\alpha, \beta)$, em que $u > 0$, $\alpha > 0$ e $\beta > 0$. Expresse a distribuição de probabilidade:

   (a) Conjunta de $(Y, U)^\top$;

   (b) Marginal de Y. Ela é uma distribuição conhecida? Se sim, identifique-a;

   (c) Condicional de $U|Y = y$. Ela é uma distribuição conhecida? Se sim, identifique-a.

4. Seja $(X, Y)^\top$ um vetor aleatório contínuo com função densidade de probabilidade (FDP) conjunta da por

$$f(x, y) = \frac{3}{80}(x^2 + xy)\, \mathbb{I}_{[0,2]}(x)\, \mathbb{I}_{[0,4]}(y).$$

   (a) Mostre que $f(x, y)$ é uma FDP válida.

   (b) Determine as FDPs marginais de X e Y.

   (c) Determine $\mathbb{P}(X + Y \leq 3)$.

   (d) As variáveis aleatórias X e Y são independentes?

(e) Determine $\mathbb{P}(X < Y | X + Y \leq 3)$.

(f) Determine a FDP condicional de $Y|X = x$.

5. Suponhamos que a variável aleatória discreta bidimensional $(X, Y)^\top$ tenha função de probabilidade (FP) conjunta dada por

$$p(x, y) = \frac{e^{-2}\, 2^x}{3x!}\, \mathbb{I}_{\{0,1,\ldots\}}(x)\, \mathbb{I}_{\{1,2,3\}}(y).$$

(a) Prove que $p(x, y)$ é uma FP válida.

(b) Expresse a FP marginal de X.

(c) Expresse a FP marginal de Y.

6. Seja o vetor aleatório $(X, Y)^\top$ tal que

$$p(x, y) = \frac{1}{35}\, \mathbb{I}_{\{1,\ldots,5\}}(x)\, \mathbb{I}_{\{1,\ldots,7\}}(y).$$

(a) Prove que $p(x, y)$ é uma função de probabilidade (FP) válida.

(b) Expresse a FP marginal de X.

(c) Expresse a FP marginal de Y.

7. Suponha que a velocidade (em milhares de km/h) e a potência consumida (em megawatts, MW) da nave interplanetária *Chou Wakusei Sentou Bokan Daileon* sejam descritas pelo vetor aleatório $(X, Y)^\top$ cuja função densidade de probabilidade (FDP) conjunta é dada por (1).

$$f(x, y) = \frac{6x(1 - x)}{(1 + x)} \exp\left\{-\frac{y}{1 + x}\right\} \mathbb{I}_{(0,1)}(x)\, \mathbb{I}_{(0,+\infty)}(y). \tag{1}$$

(a) Mostre que (1) é uma FDP válida.

(b) Determine a FDP marginal de X.

(c) Determine a FDP condicional de $Y|X = x$.

(d) Calcule $\mathbb{E}[Y|X = x]$. Interprete esse valor em termos da relação entre velocidade e potência.

(e) Calcule o valor esperado total de Y.

8. Seja um vetor aleatório $(X_1, X_2)^\top$ com a seguinte função geradora de momentos (FGM) conjunta:

$$M(t_1, t_2) = \mathbb{E}\left[e^{t_1 X_1 + t_2 X_2}\right] = (1 - \beta t_2)^{-\alpha} \exp\left[\mu\left(e^{t_1} - 1\right)\right], \tag{2}$$

em que $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\mu > 0$ e $t_2 < 1/\beta$. A partir da FGM dada em (2), calcule a correlação entre X_1 e X_2.

9. Sejam X, Y, Z variáveis aleatórias, a, b, c constantes e $M = aX + b$ e $N = cY + Z$. Calcule:

   (a) $\mathbb{E}(M)$;

   (b) $\mathbb{E}(N)$;

   (c) $\mathrm{Var}(M)$;

   (d) $\mathrm{Var}(N)$;

   (e) $\mathrm{Cov}(M, N)$;

   (f) A correlação entre M e N.