Classwork 01

Exercícios:

1. Duas linhas de produção fabricam certo tipo de peça. Suponha que a capacidade (em qualquer dia) seja 5 peças na linha I e 3 peças na linha II. Admita que o número de peças realmente produzidas em qualquer linha seja uma variável aleatória, e que $(X, Y)^\top$ represente a variável aleatória bidimensional que fornece o número de peças produzidas pela linha I e a linha II, respectivamente. A Tabela 1 dá a distribuição de probabilidade conjunta de $(X, Y)^\top$. Cada casa representa

$$p(x, y) = \mathbb{P}(X = x, Y = y).$$

Assim, $p(2, 3) = \mathbb{P}(X = 2, Y = 3) = 0{,}04$, por exemplo.

Tabela 1: Distribuição de probabilidade conjunta.

	X					
Y	0	1	2	3	4	5
0	0,00	0,01	0,03	0,05	0,07	0,09
1	0,01	0,02	0,04	0,05	0,06	0,08
2	0,01	0,03	0,05	0,05	0,05	0,06
3	0,01	0,02	0,04	0,06	0,06	0,05

(a) O vetor $(X, Y)^\top$ é, de fato, uma variável aleatória bidimensional? Isto é, $p(x, y) \geq 0$, para todo (x, y) e $\sum_{y=-\infty}^{+\infty} \sum_{x=-\infty}^{+\infty} p(x, y) = 1$.

(b) Seja $B =$ {Mais peças são produzidas pela linha I que pela linha II}. Calcule $\mathbb{P}(B)$.

(c) Seja B^c o complementar de B, descrito no item (b). Calcule $\mathbb{P}(B^c)$.

2. Suponha que um fabricante de lâmpadas esteja interessado no número de lâmpadas encomendadas a ele durante os meses de janeiro e fevereiro. Sejam X e Y, respectivamente, o número de lâmpadas encomendadas durante esses dois meses. Admitiremos que $(X, Y)^\top$ seja uma variável aleatória contínua bidimensional, com a seguinte função densidade de probabilidade (FDP) conjunta

$$f(x, y) = c, \;\; x \in [5.000, 10.000], \;\; y \in [4.000, 9.000]. \tag{1}$$

(a) Determine c, de tal forma que $f(x,y)$, em (1), seja uma FDP, de fato. Isto é, $f(x,y) \geq 0$, para todo (x,y) e $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy = 1$.

(b) Seja $B = \{X \geq Y\}$. Calcule $\mathbb{P}(B)$.

(c) Seja B^c o complementar de B, descrito no item (b). Calcule $\mathbb{P}(B^c)$.

3. A distribuição de probabilidade conjunta do vetor aleatório $(X,Y)^\top$ é dada por $p(1,1) = 1/8$, $p(1,2) = 1/4$, $p(2,1) = 1/8$ e $p(2,2) = 1/2$.

   (a) Calcule a distribuição de probabilidade de $X|Y = y$.

   (b) As variáveis X e Y são independentes?

4. Cacáudio é um cantor e compositor de MPB sandumonense, que tem o número de acessos ao seu perfil no `Spotify` e de músicas tocadas neste aplicativo expressos pelo vetor aleatório $(X_1, X_2)^\top$, com função de probabilidade (FP) conjunta descrita por:

$$p(x_1,x_2) = \frac{e^{-\mu}\mu^{x_1}p^{x_2}(1-p)^{x_1-x_2}}{x_2!(x_1-x_2)!}\,\mathbb{I}_{\{0,1,\ldots\}}(x_1)\,\mathbb{I}_{\{0,1,\ldots,x_1\}}(x_2),$$

   em que $p \in (0,1)$ e $\mu > 0$. Encontre a FP (identificando-a, caso conhecida) do:

   (a) Número de acessos.

   (b) Número de músicas tocadas no `Spotify` dado o número de acessos.

5. Sejam $Y|P = p \sim \text{binomial}(n,p)$ e $P \sim \text{beta}(a,b)$, em que $n \in \{0,1,\ldots\}$, $p \in [0,1]$, $a \in \mathbb{R}_+$ e $b \in \mathbb{R}_+$. Determine:

   (a) A distribuição de probabilidade conjunta de $(Y,P)^\top$.

   (b) A função de probabilidade marginal de Y. Ela é uma distribuição conhecida? Se sim, identifique-a.

   (c) A função densidade de probabilidade (FDP) condicional de $P|Y = y$. Ela é uma distribuição conhecida? Se sim, identifique-a.

6. Suponham que a variável aleatória contínua bidimensional $(T, Y)^\top$ tenha sua função densidade de probabilidade (FDP) conjunta dada por:

$$f(t, y) = \frac{y^{(n-1)/2}}{\sqrt{\pi n} 2^{(n+1)/2} \Gamma(n/2)} \exp\left\{-\left(\frac{t^2 + n}{2n}\right) y\right\} \mathbb{I}_{(-\infty,\infty)}(t)\, \mathbb{I}_{(0,+\infty)}(y),$$

em que $n \in \{0, 1, \ldots\}$. Encontre a FDP (identificando-a, caso conhecida):

   (a) Marginal de T.

   (b) Marginal de Y.

   (c) Condicional de $T|Y = y$.

   (d) Condicional de $Y|T = t$.