Método jacobiano

Tiago M. Magalhães

Departamento de Estatística - ICE-UFJF

Juiz de Fora, 29 de outubro de 2025

Roteiro

1. Introdução
2. Caso discreto
3. Método jacobiano
4. Funções não biunívocas
5. Bibliografia

Roteiro

1. Introdução
2. Caso discreto
3. Método jacobiano
4. Funções não biunívocas
5. Bibliografia

Introdução

Ao definir uma variável aleatória (VA) X, nós salientamos que X é uma função definida a partir do espaço amostral Ω para números reais.

Introdução

Ao definir uma VA bidimensional $(X, Y)^\top$, nós estaremos interessados em um par de funções,

$$X = X(\omega), Y = Y(\omega),$$

cada uma das quais é definida no espaço amostral de algum experimento e associa um número real a todo $\omega \in \Omega$,

Introdução

Ao definir uma VA bidimensional $(X, Y)^\top$, nós estaremos interessados em um par de funções,

$$X = X(\omega), Y = Y(\omega),$$

cada uma das quais é definida no espaço amostral de algum experimento e associa um número real a todo $\omega \in \Omega$, desse modo fornecendo o vetor bidimensional $[X(\omega), Y(\omega)]^\top$.

Introdução

Ao definir uma VA bidimensional $(X, Y)^\top$, nós estaremos interessados em um par de funções,

$$X = X(\omega), Y = Y(\omega),$$

cada uma das quais é definida no espaço amostral de algum experimento e associa um número real a todo $\omega \in \Omega$, desse modo fornecendo o vetor bidimensional $[X(\omega), Y(\omega)]^\top$.

Introdução

Nós vamos considerar $Z = H(X, Y)$, uma função de X e Y. $Z = Z(\omega)$ é também uma VA. Consideremos a sequência de etapas:

Introdução

Nós vamos considerar $Z = H(X, Y)$, uma função de X e Y. $Z = Z(\omega)$ é também uma VA. Consideremos a sequência de etapas:

1. Executar o experimento ε e obter o resultado ω.

Introdução

Nós vamos considerar $Z = H(X, Y)$, uma função de X e Y. $Z = Z(\omega)$ é também uma VA. Consideremos a sequência de etapas:

1. Executar o experimento ε e obter o resultado ω.
2. Calcular os números $X(\omega)$ e $Y(\omega)$.

Introdução

Nós vamos considerar $Z = H(X, Y)$, uma função de X e Y. $Z = Z(\omega)$ é também uma VA. Consideremos a sequência de etapas:

1. Executar o experimento ε e obter o resultado ω.
2. Calcular os números $X(\omega)$ e $Y(\omega)$.
3. Calcular o número $Z = H[X(\omega), Y(\omega)]$.

Introdução

Nós vamos considerar $Z = H(X, Y)$, uma função de X e Y. $Z = Z(\omega)$ é também uma VA. Consideremos a sequência de etapas:

1. Executar o experimento ε e obter o resultado ω.
2. Calcular os números $X(\omega)$ e $Y(\omega)$.
3. Calcular o número $Z = H[X(\omega), Y(\omega)]$.

Introdução

O valor de Z depende evidentemente de ω, o resultado original do experimento. Ou seja, $Z = Z(\omega)$ é uma função que associa um número real $Z(\omega)$ a todo resultado $\omega \in \Omega$.

Introdução

O valor de Z depende evidentemente de ω, o resultado original do experimento. Ou seja, $Z = Z(\omega)$ é uma função que associa um número real $Z(\omega)$ a todo resultado $\omega \in \Omega$. Consequentemente, Z é uma VA.

O valor de Z depende evidentemente de ω, o resultado original do experimento. Ou seja, $Z = Z(\omega)$ é uma função que associa um número real $Z(\omega)$ a todo resultado $\omega \in \Omega$. Consequentemente, Z é uma VA.

Introdução

Motivação

A questão que surge é a seguinte: dada a distribuição de probabilidade conjunta $(X, Y)^\top$, qual é a distribuição de probabilidades de $Z = H(X, Y)$?

Introdução

Motivação

A questão que surge é a seguinte: dada a distribuição de probabilidade conjunta $(X, Y)^\top$, qual é a distribuição de probabilidades de $Z = H(X, Y)$?

Roteiro

1 Introdução

2 Caso discreto

3 Método jacobiano

4 Funções não biunívocas

5 Bibliografia

Caso discreto

Se $(X, Y)^\top$ for uma VA discreta, encontrar a distribuição de probabilidades de $Z = H(X, Y)$ é uma tarefa relativamente simples.

Exemplo

Qual é a distribuição de probabilidades de $Z = \min(X, Y)$, em que $(X, Y)^\top$ tem distribuição de probabilidade dada por:

Tabela 1: Distribuição de probabilidade conjunta de X e Y.

Y	X					
	0	1	2	3	4	5
0	0,00	0,01	0,03	0,05	0,07	0,09
1	0,01	0,02	0,04	0,05	0,06	0,08
2	0,01	0,03	0,05	0,05	0,05	0,06
3	0,01	0,02	0,04	0,06	0,06	0,05

Exemplo

Qual é a distribuição de probabilidades de $Z = \min(X, Y)$, em que $(X, Y)^\top$ tem distribuição de probabilidade dada por:

Tabela 1: Distribuição de probabilidade conjunta de X e Y.

Y	X					
	0	1	2	3	4	5
0	0,00	0,01	0,03	0,05	0,07	0,09
1	0,01	0,02	0,04	0,05	0,06	0,08
2	0,01	0,03	0,05	0,05	0,05	0,06
3	0,01	0,02	0,04	0,06	0,06	0,05

Exemplo

Notem que, o suporte de Z é $\mathcal{Z} = \{0, 1, 2, 3\}$, obtido da seguinte maneira:

Z	(X, Y)								
0	(0,0)	(0,1)	(0,2)	(0,3)	(1,0)	(2,0)	(3,0)	(4,0)	(5,0)
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(2,1)	(3,1)	(4,1)	(5,1)		
2	(2,2)	(2,3)	(3,2)	(4,2)	(5,2)				
3	(3,3)	(4,3)	(5,3)						

Exemplo

Notem que, o suporte de Z é $\mathcal{Z} = \{0, 1, 2, 3\}$, obtido da seguinte maneira:

Z	(X, Y)								
0	(0,0)	(0,1)	(0,2)	(0,3)	(1,0)	(2,0)	(3,0)	(4,0)	(5,0)
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(2,1)	(3,1)	(4,1)	(5,1)		
2	(2,2)	(2,3)	(3,2)	(4,2)	(5,2)				
3	(3,3)	(4,3)	(5,3)						

Exemplo

Com as probabilidades,

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(Z = 0) = {} & \mathbb{P}(X = 0, Y = 0) + \mathbb{P}(X = 0, Y = 1) + \mathbb{P}(X = 0, Y = 2) \\
& + \mathbb{P}(X = 0, Y = 3) + \mathbb{P}(X = 1, Y = 0) + \mathbb{P}(X = 2, Y = 0) \\
& + \mathbb{P}(X = 3, Y = 0) + \mathbb{P}(X = 4, Y = 0) + \mathbb{P}(X = 5, Y = 0); \\
\mathbb{P}(Z = 1) = {} & \mathbb{P}(X = 1, Y = 1) + \mathbb{P}(X = 1, Y = 2) + \mathbb{P}(X = 1, Y = 3) \\
& + \mathbb{P}(X = 2, Y = 1) + \mathbb{P}(X = 3, Y = 1) + \mathbb{P}(X = 4, Y = 1) \\
& + \mathbb{P}(X = 5, Y = 1);
\end{aligned}
$$

Exemplo

$$\mathbb{P}(Z = 2) = \mathbb{P}(X = 2, Y = 2) + \mathbb{P}(X = 2, Y = 3) + \mathbb{P}(X = 3, Y = 2)$$
$$+ \mathbb{P}(X = 4, Y = 2) + \mathbb{P}(X = 5, Y = 2);$$
$$\mathbb{P}(Z = 3) = \mathbb{P}(X = 3, Y = 3) + \mathbb{P}(X = 4, Y = 3) + \mathbb{P}(X = 5, Y = 3).$$

Exemplo

A distribuição de probabilidade da VA $Z = \min(X, Y)$ é dada por:

Tabela 2: Distribuição de probabilidade de $Z = \min(X, Y)$.

Z	0	1	2	3
$\mathbb{P}(Z)$	0,28	0,30	0,25	0,17

Exemplo

A distribuição de probabilidade da VA $Z = \min(X, Y)$ é dada por:

Tabela 2: Distribuição de probabilidade de $Z = \min(X, Y)$.

Z	0	1	2	3
$\mathbb{P}(Z)$	0,28	0,30	0,25	0,17

Roteiro

1 Introdução

2 Caso discreto

3 Método jacobiano

4 Funções não biunívocas

5 Bibliografia

Caso contínuo

Se $(X, Y)^\top$ for uma VA bidimensional contínua e se $Z = H(X, Y)$ for uma função contínua de (X, Y), então Z será uma VA contínua (unidimensional) e o procedimento de achar sua função densidade de probabilidade (FDP) é um pouco mais complicado.

Caso contínuo

A fim de encontrar a FDP de Z, nós precisaremos do **Método jacobiano**.

Método jacobiano

Suponhamos que $(X_1, X_2)^\top$ seja uma VA contínua bidimensional com FDP conjunta f. Sejam $Y_1 = H_1(X_1, X_2)$ e $Y_2 = H_2(X_1, X_2)$, e admitamos que as funções H_1 e H_2 satisfaçam as seguintes condições

Método jacobiano

Suponhamos que $(X_1, X_2)^\top$ seja uma VA contínua bidimensional com FDP conjunta f. Sejam $Y_1 = H_1(X_1, X_2)$ e $Y_2 = H_2(X_1, X_2)$, e admitamos que as funções H_1 e H_2 satisfaçam as seguintes condições

- As equações $y_1 = H_1(x_1, x_2)$ e $y_2 = H_2(x_1, x_2)$ podem ser **univocamente** resolvidas para x_1 e x_2, em termos de y_1 e y_2, isto é, $x_1 = H_1^{-1}(y_1, y_2)$ e $x_2 = H_2^{-1}(y_1, y_2)$.

Método jacobiano

Suponhamos que $(X_1, X_2)^\top$ seja uma VA contínua bidimensional com FDP conjunta f. Sejam $Y_1 = H_1(X_1, X_2)$ e $Y_2 = H_2(X_1, X_2)$, e admitamos que as funções H_1 e H_2 satisfaçam as seguintes condições

- As equações $y_1 = H_1(x_1, x_2)$ e $y_2 = H_2(x_1, x_2)$ podem ser **univocamente** resolvidas para x_1 e x_2, em termos de y_1 e y_2, isto é, $x_1 = H_1^{-1}(y_1, y_2)$ e $x_2 = H_2^{-1}(y_1, y_2)$.

Distribuição normal multivariada

- As derivadas parciais

$$\frac{\partial H_1(x_1, x_2)}{\partial x_1}, \frac{\partial H_1(x_1, x_2)}{\partial x_2}, \frac{\partial H_2(x_1, x_2)}{\partial x_1}, \frac{\partial H_2(x_1, x_2)}{\partial x_2}$$

  existem, são contínuas e

de tal forma que:

$$\mathcal{J} = J(x_1, x_2) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial H_1(x_1, x_2)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial H_1(x_1, x_2)}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial H_2(x_1, x_2)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial H_2(x_1, x_2)}{\partial x_2} \end{vmatrix} \neq 0, \qquad (1)$$

em todos os pontos (x_1, x_2). O determinante em (1) é denominado **jacobiano** da transformação $(x_1, x_2) \rightarrow (y_1, y_2)$.

Distribuição normal multivariada

de tal forma que:

$$\mathcal{J} = J(x_1, x_2) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial H_1(x_1, x_2)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial H_1(x_1, x_2)}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial H_2(x_1, x_2)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial H_2(x_1, x_2)}{\partial x_2} \end{vmatrix} \neq 0, \qquad (1)$$

em todos os pontos (x_1, x_2). O determinante em (1) é denominado **jacobiano** da transformação $(x_1, x_2) \rightarrow (y_1, y_2)$.

Método jacobiano

Nestas circunstâncias, a FDP conjunta de $(Y_1, Y_2)^\top$, isto é, $g(y_1, y_2)$ é dada pela seguinte expressão

$$g(y_1, y_2) = f\left[H_1^{-1}(y_1, y_2), H_2^{-1}(y_1, y_2)\right] |\mathcal{J}|^{-1}, \tag{2}$$

em que $f\left[H_1^{-1}(y_1, y_2), H_2^{-1}(y_1, y_2)\right]$ é a FDP conjunta de $(X_1, X_2)^\top$ avaliada em $x_1 = H_1^{-1}(y_1, y_2)$, $x_2 = H_2^{-1}(y_1, y_2)$

Método jacobiano

Nestas circunstâncias, a FDP conjunta de $(Y_1, Y_2)^\top$, isto é, $g(y_1, y_2)$ é dada pela seguinte expressão

$$g(y_1, y_2) = f\left[H_1^{-1}(y_1, y_2), H_2^{-1}(y_1, y_2)\right] |\mathcal{J}|^{-1}, \tag{2}$$

em que $f\left[H_1^{-1}(y_1, y_2), H_2^{-1}(y_1, y_2)\right]$ é a FDP conjunta de $(X_1, X_2)^\top$ avaliada em $x_1 = H_1^{-1}(y_1, y_2)$, $x_2 = H_2^{-1}(y_1, y_2)$ e $\mathcal{J}$ é o jacobiano dado em (1), expresso em função de y_1 e y_2.

Método jacobiano

Nestas circunstâncias, a FDP conjunta de $(Y_1, Y_2)^\top$, isto é, $g(y_1, y_2)$ é dada pela seguinte expressão

$$g(y_1, y_2) = f\left[H_1^{-1}(y_1, y_2), H_2^{-1}(y_1, y_2)\right] |\mathcal{J}|^{-1}, \tag{2}$$

em que $f\left[H_1^{-1}(y_1, y_2), H_2^{-1}(y_1, y_2)\right]$ é a FDP conjunta de $(X_1, X_2)^\top$ avaliada em $x_1 = H_1^{-1}(y_1, y_2)$, $x_2 = H_2^{-1}(y_1, y_2)$ e $\mathcal{J}$ é o jacobiano dado em (1), expresso em função de y_1 e y_2.

Exemplos

Exemplo 1. Se X e Y são duas VA independentes com distribuições gama de parâmetros (α, λ) e (β, λ), respectivamente, calcule a FDP conjunta de $U = X + Y$ e $V = X/(X + Y)$.

Método jacobiano

É possível que o interesse seja apenas em uma função de duas variáveis aleatórias X_1 e X_2, isto é, nós estamos interessados em:

$$Y = H(X_1, X_2).$$

Método jacobiano

É possível que o interesse seja apenas em uma função de duas variáveis aleatórias X_1 e X_2, isto é, nós estamos interessados em:

$$Y = H(X_1, X_2).$$

Porém, para que o método jacobiano possa ser utilizado, é necessário a introdução de uma segunda função, chamada de auxiliar.

Método jacobiano

É possível que o interesse seja apenas em uma função de duas variáveis aleatórias X_1 e X_2, isto é, nós estamos interessados em:

$$Y = H(X_1, X_2).$$

Porém, para que o método jacobiano possa ser utilizado, é necessário a introdução de uma segunda função, chamada de auxiliar.

Método jacobiano

Seja $Y_1 = H_1(X_1, X_2)$ a função de interesse e $Y_2 = H_2(X_1, X_2)$ a função auxiliar, nós aplicamos o método jacobiano para encontrar a FDP conjunta de Y_1 e Y_2.

Método jacobiano

Com o conhecimento de $g(y_1, y_2)$, nós poderemos então obter a FDP marginal de Y_1, $g_{Y_1}(y_1)$, pela integração de $g(y_1, y_2)$ com relação a y_2, isto é,

$$g_{Y_1}(y_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(y_1, y_2)\, dy_2.$$

Exemplos

Exemplo 2. Sejam U e V duas variáveis aleatórias independentes com distribuição qui-quadrado(m) e qui-quadrado(n), respectivamente. Seja

$$X = \frac{U/m}{V/n}.$$

Qual é a distribuição de X?

Exemplo 2. Sejam U e V duas variáveis aleatórias independentes com distribuição qui-quadrado(m) e qui-quadrado(n), respectivamente. Seja

$$X = \frac{U/m}{V/n}.$$

Qual é a distribuição de X?

Roteiro

1 Introdução

2 Caso discreto

3 Método jacobiano

4 Funções não biunívocas

5 Bibliografia

Método jacobiano

Quando a função $Y = H(X_1, X_2)$ não for biunívoca (bijetora), o método do jacobiano, descrito em (2), não pode ser usado de imediato.

Método jacobiano

Primeiramente, o suporte em X_1 e/ou de X_2 precisa ser subdividido em regiões onde $H(X_1, X_2)$ seja biunívoca.

Após isso, o método pode ser aplicado em cada uma das regiões e a FDP de Y é a soma das FDPs obtidas para cada $H(X_1, X_2)$ da região.

Método jacobiano

Primeiramente, o suporte em X_1 e/ou de X_2 precisa ser subdividido em regiões onde $H(X_1, X_2)$ seja biunívoca.

Após isso, o método pode ser aplicado em cada uma das regiões e a FDP de Y é a soma das FDPs obtidas para cada $H(X_1, X_2)$ da região.

Isto é, a FDP conjunta de $(Y_1, Y_2)^\top$ será dada pela expressão

$$g(y_1, y_2) = \sum_{i=1}^{n} f\left[H_{1i}^{-1}(y_1, y_2), H_{2i}^{-1}(y_1, y_2)\right] |\mathcal{J}_i|^{-1}, \quad (3)$$

em que $\mathcal{J}_i$ é o i-ésimo jacobiano, expresso em funcao de y_1 e y_2 e n é o número de subdivisões.

Método jacobiano

Isto é, a FDP conjunta de $(Y_1, Y_2)^\top$ será dada pela expressão

$$g(y_1, y_2) = \sum_{i=1}^{n} f\left[H_{1i}^{-1}(y_1, y_2), H_{2i}^{-1}(y_1, y_2)\right] |\mathcal{J}_i|^{-1}, \tag{3}$$

em que $\mathcal{J}_i$ é o i-ésimo jacobiano, expresso em funcao de y_1 e y_2 e n é o número de subdivisões.

Roteiro

1 Introdução

2 Caso discreto

3 Método jacobiano

4 Funções não biunívocas

5 Bibliografia

Bibliografia

Meyer, P. L. (2017), *Probabilidade: aplicações à Estatística*, 2 edn, Livros Técnicos e Científicos Editora Ltda, Rio de Janeiro.

Ross, S. (2010), *Probabilidade: um curso moderno com aplicações*, 8 edn, Bookman, Porto Alegre.

Ross, S. (2019), *A first course in probability*, 10 edn. global edn, Pearson Education, Malaysia.

Obrigado!

✉ tiago.magalhaes@ufjf.br

ufjf.br/tiago_magalhaes

Departamento de Estatística, Sala 319