

Distribuições multivariadas

Tiago M. Magalhães

Departamento de Estatística - ICE-UFJF

Juiz de Fora, 15 de outubro de 2025



Roteiro

- 1 Distribuição multinomial
- 2 Distribuição normal multivariada
- 3 Distribuição Wishart
- 4 Distribuição Dirichlet
- 5 Referências bibliográficas



Roteiro

- 1 Distribuição multinomial
- 2 Distribuição normal multivariada
- 3 Distribuição Wishart
- 4 Distribuição Dirichlet
- 5 Referências bibliográficas



Experimento multinomial

Um experimento multinomial tem **3 características**:



Experimento multinomial

Um experimento multinomial tem **3 características**:

- ① uma realização com n repetições independentes;



Experimento multinomial

Um experimento multinomial tem **3 características**:

- ① uma realização com n **repetições independentes**;
- ② cada repetição admite k resultados: A_1, A_2, \dots, A_k ,



Experimento multinomial

Um experimento multinomial tem **3 características**:

- ① uma realização com n **repetições independentes**;
- ② cada repetição admite k resultados: A_1, A_2, \dots, A_k , mutuamente exclusivos;



Experimento multinomial

Um experimento multinomial tem **3 características**:

- ① uma realização com n **repetições independentes**;
- ② cada repetição admite k resultados: A_1, A_2, \dots, A_k , mutuamente exclusivos;
- ③ a probabilidade, $p_i = \mathbb{P}(A_i)$, de ocorrência de cada possível resultado A_i ,
 $i = 1, 2, \dots, k$,



Experimento multinomial

Um experimento multinomial tem **3 características**:

- ① uma realização com n **repetições independentes**;
- ② cada repetição admite k resultados: A_1, A_2, \dots, A_k , mutuamente exclusivos;
- ③ a probabilidade, $p_i = \mathbb{P}(A_i)$, de ocorrência de cada possível resultado A_i , $i = 1, 2, \dots, k$, **não se altera** em cada repetição.



Experimento multinomial

Um experimento multinomial tem **3 características**:

- ① uma realização com n **repetições independentes**;
- ② cada repetição admite k resultados: A_1, A_2, \dots, A_k , mutuamente exclusivos;
- ③ a probabilidade, $p_i = \mathbb{P}(A_i)$, de ocorrência de cada possível resultado A_i , $i = 1, 2, \dots, k$, **não se altera** em cada repetição. Note que $\sum_{i=1}^k p_i = 1$.



Experimento multinomial

Um experimento multinomial tem **3 características**:

- ① uma realização com n **repetições independentes**;
- ② cada repetição admite k resultados: A_1, A_2, \dots, A_k , mutuamente exclusivos;
- ③ a probabilidade, $p_i = \mathbb{P}(A_i)$, de ocorrência de cada possível resultado A_i , $i = 1, 2, \dots, k$, **não se altera** em cada repetição. Note que $\sum_{i=1}^k p_i = 1$.



Distribuição multinomial

Seja a variável aleatória discreta (VAD) multidimensional

$$\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_k)^\top,$$

em que X_i : é o número de vezes que A_i ocorre



Distribuição multinomial

Seja a variável aleatória discreta (VAD) multidimensional

$$\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_k)^\top,$$

em que X_i : é o número de vezes que A_i ocorre nas n repetições de um experimento multinomial,



Distribuição multinomial

Seja a variável aleatória discreta (VAD) multidimensional

$$\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_k)^\top,$$

em que X_i : é o número de vezes que A_i ocorre nas n repetições de um experimento multinomial, com probabilidade de A_i ocorrer igual a p_i , $i = 1, 2, \dots, k$.



Distribuição multinomial

Seja a variável aleatória discreta (VAD) multidimensional

$$\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_k)^\top,$$

em que X_i : é o número de vezes que A_i ocorre nas n repetições de um experimento multinomial, com probabilidade de A_i ocorrer igual a p_i , $i = 1, 2, \dots, k$.



Distribuição multinomial

Observação

Os X_i **não são** VAD independentes,

Distribuição multinomial

Observação

Os X_i **não são** VAD independentes, pois $\sum_{i=1}^k X_i = n$.

Distribuição multinomial

Observação

Os X_i **não são** VAD independentes, pois $\sum_{i=1}^k X_i = n$. Em consequência, logo que os valores quaisquer $(k - 1)$ dessas VAD sejam conhecidos, o valor da k -ésima ficará determinado.

Distribuição multinomial

Observação

Os X_i **não são** VAD independentes, pois $\sum_{i=1}^k X_i = n$. Em consequência, logo que os valores quaisquer $(k - 1)$ dessas VAD sejam conhecidos, o valor da k -ésima ficará determinado.



Distribuição multinomial

Então, a VAD \mathbf{X} tem distribuição multinomial, com parâmetros n e $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_k)^\top$,



Distribuição multinomial

Então, a VAD \mathbf{X} tem distribuição multinomial, com parâmetros n e $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_k)^\top$, de forma alternativa,

$$\mathbf{X} \sim \text{multinomial}(n, \mathbf{p}) \text{ ou } \mathbf{X} \sim \text{multinom}(n, \mathbf{p}).$$



Distribuição multinomial

Então, a VAD \mathbf{X} tem distribuição multinomial, com parâmetros n e $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_k)^\top$, de forma alternativa,

$$\mathbf{X} \sim \text{multinomial}(n, \mathbf{p}) \text{ ou } \mathbf{X} \sim \text{multinom}(n, \mathbf{p}).$$



Distribuição multinomial

A função de probabilidades de uma variável aleatória discreta multidimensional $\mathbf{X} \sim \text{multinomial}(n, \mathbf{p})$ é dada por:

$$p(x_1, x_2, \dots, x_k) = \frac{n!}{x_1! x_2! \dots x_k!} p_1^{x_1} p_2^{x_2} \dots p_k^{x_k} \mathbb{I}_{\{n\}}(x_1 + x_2 + \dots + x_k),$$



Distribuição multinomial

A função de probabilidades de uma variável aleatória discreta multidimensional $\mathbf{X} \sim \text{multinomial}(n, \mathbf{p})$ é dada por:

$$p(x_1, x_2, \dots, x_k) = \frac{n!}{x_1! x_2! \dots x_k!} p_1^{x_1} p_2^{x_2} \dots p_k^{x_k} \mathbb{I}_{\{n\}}(x_1 + x_2 + \dots + x_k),$$

em que $p_i \in (0, 1)$, $i = 1, 2, \dots, k$.



Distribuição multinomial

A função de probabilidades de uma variável aleatória discreta multidimensional $\mathbf{X} \sim \text{multinomial}(n, \mathbf{p})$ é dada por:

$$p(x_1, x_2, \dots, x_k) = \frac{n!}{x_1! x_2! \dots x_k!} p_1^{x_1} p_2^{x_2} \dots p_k^{x_k} \mathbb{I}_{\{n\}}(x_1 + x_2 + \dots + x_k),$$

em que $p_i \in (0, 1)$, $i = 1, 2, \dots, k$.



Distribuição multinomial

A esperança e variância de uma VAD multidimensional \mathbf{X} multinomial são dadas, respectivamente, por $\mathbb{E}(\mathbf{X}) = [\mathbb{E}(X_1), \mathbb{E}(X_2), \dots, \mathbb{E}(X_k)]^\top$ e

$$\text{Var}(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} \text{Var}(X_1) & \text{Cov}(X_1, X_2) & \cdots & \text{Cov}(X_1, X_k) \\ \text{Cov}(X_2, X_1) & \text{Var}(X_2) & \cdots & \text{Cov}(X_2, X_k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{Cov}(X_k, X_1) & \text{Cov}(X_k, X_2) & \cdots & \text{Var}(X_k) \end{bmatrix},$$



Distribuição multinomial

A esperança e variância de uma VAD multidimensional \mathbf{X} multinomial são dadas, respectivamente, por $\mathbb{E}(\mathbf{X}) = [\mathbb{E}(X_1), \mathbb{E}(X_2), \dots, \mathbb{E}(X_k)]^\top$ e

$$\text{Var}(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} \text{Var}(X_1) & \text{Cov}(X_1, X_2) & \cdots & \text{Cov}(X_1, X_k) \\ \text{Cov}(X_2, X_1) & \text{Var}(X_2) & \cdots & \text{Cov}(X_2, X_k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{Cov}(X_k, X_1) & \text{Cov}(X_k, X_2) & \cdots & \text{Var}(X_k) \end{bmatrix},$$



Distribuição multinomial

em que

- $\mathbb{E}(X_i) = np_i,$

Distribuição multinomial

em que

- $\mathbb{E}(X_i) = np_i,$
- $\text{Var}(X_i) = np_i(1 - p_i),$

Distribuição multinomial

em que

- $\mathbb{E}(X_i) = np_i,$
- $\text{Var}(X_i) = np_i(1 - p_i),$
- $\text{Cov}(X_i, X_j) = -np_i p_j,$ para $i \neq j,$

Distribuição multinomial

em que

- $\mathbb{E}(X_i) = np_i,$
- $\text{Var}(X_i) = np_i(1 - p_i),$
- $\text{Cov}(X_i, X_j) = -np_i p_j,$ para $i \neq j,$

com $i, j = 1, 2, \dots, k.$

Distribuição multinomial

em que

- $\mathbb{E}(X_i) = np_i,$
- $\text{Var}(X_i) = np_i(1 - p_i),$
- $\text{Cov}(X_i, X_j) = -np_i p_j,$ para $i \neq j,$

com $i, j = 1, 2, \dots, k$. De maneira geral, isto é, na forma matricial, nós podemos escrever



Distribuição multinomial

em que

- $\mathbb{E}(X_i) = np_i,$
- $\text{Var}(X_i) = np_i(1 - p_i),$
- $\text{Cov}(X_i, X_j) = -np_i p_j,$ para $i \neq j,$

com $i, j = 1, 2, \dots, k$. De maneira geral, isto é, na forma matricial, nós podemos escrever $\mathbb{E}(\mathbf{X}) = n\mathbf{p}$ e $\text{Var}(\mathbf{X}) = n [\text{diag}(\mathbf{p}) - \mathbf{p}\mathbf{p}^\top],$



Distribuição multinomial

em que

- $\mathbb{E}(X_i) = np_i$,
- $\text{Var}(X_i) = np_i(1 - p_i)$,
- $\text{Cov}(X_i, X_j) = -np_i p_j$, para $i \neq j$,

com $i, j = 1, 2, \dots, k$. De maneira geral, isto é, na forma matricial, nós podemos escrever $\mathbb{E}(\mathbf{X}) = n\mathbf{p}$ e $\text{Var}(\mathbf{X}) = n \left[\text{diag}(\mathbf{p}) - \mathbf{p}\mathbf{p}^\top \right]$, sendo $\text{diag}(\mathbf{p})$ uma matriz diagonal, com a diagonal principal igual a \mathbf{p} .



Distribuição multinomial

em que

- $\mathbb{E}(X_i) = np_i,$
- $\text{Var}(X_i) = np_i(1 - p_i),$
- $\text{Cov}(X_i, X_j) = -np_i p_j,$ para $i \neq j,$

com $i, j = 1, 2, \dots, k$. De maneira geral, isto é, na forma matricial, nós podemos escrever $\mathbb{E}(\mathbf{X}) = n\mathbf{p}$ e $\text{Var}(\mathbf{X}) = n \left[\text{diag}(\mathbf{p}) - \mathbf{p}\mathbf{p}^\top \right]$, sendo $\text{diag}(\mathbf{p})$ uma matriz diagonal, com a diagonal principal igual a \mathbf{p} .



Distribuição multinomial

Seja $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \dots, t_k)^\top \in \mathbb{R}^k$, a função geradora de momentos de \mathbf{X} é dada por



Distribuição multinomial

Seja $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \dots, t_k)^\top \in \mathbb{R}^k$, a função geradora de momentos de \mathbf{X} é dada por

$$M(\mathbf{t}) = \mathbb{E}(e^{\mathbf{t}^\top \mathbf{X}}) = \mathbb{E}\left(e^{t_1 X_1 + t_2 X_2 + \dots + t_k X_k}\right) = \left(\sum_{i=1}^k p_i e^{t_i}\right)^n.$$



Distribuição multinomial

Seja $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \dots, t_k)^\top \in \mathbb{R}^k$, a função geradoras de momentos de \mathbf{X} é dada por

$$M(\mathbf{t}) = \mathbb{E}(e^{\mathbf{t}^\top \mathbf{X}}) = \mathbb{E}\left(e^{t_1 X_1 + t_2 X_2 + \dots + t_k X_k}\right) = \left(\sum_{i=1}^k p_i e^{t_i}\right)^n.$$



Distribuição multinomial

Exemplos:

- Em um lançamento de um dado 10 vezes,



Distribuição multinomial

Exemplos:

- Em um lançamento de um dado 10 vezes, o interesse é contar o número de ocorrências de cada uma das 6 faces;



Distribuição multinomial

Exemplos:

- Em um lançamento de um dado 10 vezes, o interesse é contar o número de ocorrências de cada uma das 6 faces;
- Em um banco de dados com 1.500 clientes,



Distribuição multinomial

Exemplos:

- Em um lançamento de um dado 10 vezes, o interesse é contar o número de ocorrências de cada uma das 6 faces;
- Em um banco de dados com 1.500 clientes, o interesse é contar quantos destes teriam um pedido de empréstimo



Distribuição multinomial

Exemplos:

- Em um lançamento de um dado 10 vezes, o interesse é contar o número de ocorrências de cada uma das 6 faces;
- Em um banco de dados com 1.500 clientes, o interesse é contar quantos destes teriam um pedido de empréstimo *aprovado na totalidade*,



Distribuição multinomial

Exemplos:

- Em um lançamento de um dado 10 vezes, o interesse é contar o número de ocorrências de cada uma das 6 faces;
- Em um banco de dados com 1.500 clientes, o interesse é contar quantos destes teriam um pedido de empréstimo aprovado na totalidade, 50% do valor pedido



Distribuição multinomial

Exemplos:

- Em um lançamento de um dado 10 vezes, o interesse é contar o número de ocorrências de cada uma das 6 faces;
- Em um banco de dados com 1.500 clientes, o interesse é contar quantos destes teriam um pedido de empréstimo aprovado na totalidade, 50% do valor pedido e recusado;



Distribuição multinomial

Exemplos:

- Em um lançamento de um dado 10 vezes, o interesse é contar o número de ocorrências de cada uma das 6 faces;
- Em um banco de dados com 1.500 clientes, o interesse é contar quantos destes teriam um pedido de empréstimo aprovado na totalidade, 50% do valor pedido e recusado;
- Equilíbrio de Hardy-Weinberg (Hardy, 1908; Weinberg, 1908).



Distribuição multinomial

Exemplos:

- Em um lançamento de um dado 10 vezes, o interesse é contar o número de ocorrências de cada uma das 6 faces;
- Em um banco de dados com 1.500 clientes, o interesse é contar quantos destes teriam um pedido de empréstimo aprovado na totalidade, 50% do valor pedido e recusado;
- Equilíbrio de Hardy-Weinberg (Hardy, 1908; Weinberg, 1908).



Roteiro

- 1 Distribuição multinomial
- 2 Distribuição normal multivariada**
- 3 Distribuição Wishart
- 4 Distribuição Dirichlet
- 5 Referências bibliográficas



Distribuição normal bivariada

Seja $(X_1, X_2)^T$ uma variável aleatória contínua (VAC) bidimensional, tomando todos os valores no plano euclidiano. Nós diremos que $(X_1, X_2)^T$ tem distribuição normal bidimensional se sua função densidade de probabilidade (FDP) conjunta for dada pela seguinte expressão



Distribuição normal bivariada

Seja $(X_1, X_2)^\top$ uma variável aleatória contínua (VAC) bidimensional, tomando todos os valores no plano euclidiano. Nós diremos que $(X_1, X_2)^\top$ tem distribuição normal bidimensional se sua função densidade de probabilidade (FDP) conjunta for dada pela seguinte expressão

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \\ &\times \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[\left(\frac{x_1 - \mu_1}{\sigma_1} \right)^2 - 2\rho \frac{(x_1 - \mu_1)(x_2 - \mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \left(\frac{x_2 - \mu_2}{\sigma_2} \right)^2 \right] \right\} \\ &\times \mathbb{I}_{\mathbb{R}}(x_1) \mathbb{I}_{\mathbb{R}}(x_2), \end{aligned} \tag{1}$$



Distribuição normal bivariada

Seja $(X_1, X_2)^\top$ uma variável aleatória contínua (VAC) bidimensional, tomando todos os valores no plano euclidiano. Nós diremos que $(X_1, X_2)^\top$ tem distribuição normal bidimensional se sua função densidade de probabilidade (FDP) conjunta for dada pela seguinte expressão

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \\ &\times \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[\left(\frac{x_1 - \mu_1}{\sigma_1} \right)^2 - 2\rho \frac{(x_1 - \mu_1)(x_2 - \mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \left(\frac{x_2 - \mu_2}{\sigma_2} \right)^2 \right] \right\} \\ &\times \mathbb{I}_{\mathbb{R}}(x_1) \mathbb{I}_{\mathbb{R}}(x_2), \end{aligned} \tag{1}$$

em que $\mu_1 \in \mathbb{R}$, $\mu_2 \in \mathbb{R}$, $\sigma_1^2 \in \mathbb{R}_+$, $\sigma_2^2 \in \mathbb{R}_+$ e $\rho \in (-1, 1)$.



Distribuição normal bivariada

Seja $(X_1, X_2)^\top$ uma variável aleatória contínua (VAC) bidimensional, tomando todos os valores no plano euclidiano. Nós diremos que $(X_1, X_2)^\top$ tem distribuição normal bidimensional se sua função densidade de probabilidade (FDP) conjunta for dada pela seguinte expressão

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \\ &\times \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[\left(\frac{x_1 - \mu_1}{\sigma_1} \right)^2 - 2\rho \frac{(x_1 - \mu_1)(x_2 - \mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \left(\frac{x_2 - \mu_2}{\sigma_2} \right)^2 \right] \right\} \\ &\times \mathbb{I}_{\mathbb{R}}(x_1) \mathbb{I}_{\mathbb{R}}(x_2), \end{aligned} \tag{1}$$

em que $\mu_1 \in \mathbb{R}$, $\mu_2 \in \mathbb{R}$, $\sigma_1^2 \in \mathbb{R}_+$, $\sigma_2^2 \in \mathbb{R}_+$ e $\rho \in (-1, 1)$.



Distribuição normal bivariada

Propriedades.

- O parâmetro ρ será o coeficiente de correlação entre X_1 e X_2 ;



Distribuição normal bivariada

Propriedades.

- O parâmetro ρ será o coeficiente de correlação entre X_1 e X_2 ;
- As distribuições marginais são, respectivamente,



Distribuição normal bivariada

Propriedades.

- O parâmetro ρ será o coeficiente de correlação entre X_1 e X_2 ;
- As distribuições marginais são, respectivamente,

$$X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2);$$



Distribuição normal bivariada

Propriedades.

- O parâmetro ρ será o coeficiente de correlação entre X_1 e X_2 ;
- As distribuições marginais são, respectivamente,

$$X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2);$$

- As distribuições condicionais são, respectivamente,



Distribuição normal bivariada

Propriedades.

- O parâmetro ρ será o coeficiente de correlação entre X_1 e X_2 ;
- As distribuições marginais são, respectivamente,

$$X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2);$$

- As distribuições condicionais são, respectivamente,

$$X_1|X_2 = x_2 \sim N \left[\mu_1 + \rho \frac{\sigma_1}{\sigma_2} (x_2 - \mu_2), \sigma_1^2 (1 - \rho^2) \right],$$

$$X_2|X_1 = x_1 \sim N \left[\mu_2 + \rho \frac{\sigma_2}{\sigma_1} (x_1 - \mu_1), \sigma_2^2 (1 - \rho^2) \right].$$



Distribuição normal bivariada

Propriedades.

- O parâmetro ρ será o coeficiente de correlação entre X_1 e X_2 ;
- As distribuições marginais são, respectivamente,

$$X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2);$$

- As distribuições condicionais são, respectivamente,

$$X_1|X_2 = x_2 \sim N \left[\mu_1 + \rho \frac{\sigma_1}{\sigma_2}(x_2 - \mu_2), \sigma_1^2(1 - \rho^2) \right],$$

$$X_2|X_1 = x_1 \sim N \left[\mu_2 + \rho \frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x_1 - \mu_1), \sigma_2^2(1 - \rho^2) \right].$$



Distribuição normal bivariada

Observações.

- É possível ter-se uma FDP conjunta que **não seja** normal bidimensional,



Distribuição normal bivariada

Observações.

- É possível ter-se uma FDP conjunta que **não seja** normal bidimensional, e no entanto, as FDP marginais de X_1 e X_2 serem normais unidimensionais;



Distribuição normal bivariada

Observações.

- É possível ter-se uma FDP conjunta que **não seja** normal bidimensional, e no entanto, as FDP marginais de X_1 e X_2 serem normais unidimensionais;
- Se $\rho = 0$,



Distribuição normal bivariada

Observações.

- É possível ter-se uma FDP conjunta que **não seja** normal bidimensional, e no entanto, as FDP marginais de X_1 e X_2 serem normais unidimensionais;
- Se $\rho = 0$, a FDP conjunta de $(X_1, X_2)^T$ poderá ser fatorada e, conseqüentemente, X_1 e X_2 serão independentes.



Distribuição normal bivariada

Observações.

- É possível ter-se uma FDP conjunta que **não seja** normal bidimensional, e no entanto, as FDP marginais de X_1 e X_2 serem normais unidimensionais;
- Se $\rho = 0$, a FDP conjunta de $(X_1, X_2)^T$ poderá ser fatorada e, consequentemente, X_1 e X_2 serão independentes. Assim, nós verificamos que no caso de uma distribuição normal bidimensional, correlação zero e independência são equivalentes.



Distribuição normal bivariada

Observações.

- É possível ter-se uma FDP conjunta que **não seja** normal bidimensional, e no entanto, as FDP marginais de X_1 e X_2 serem normais unidimensionais;
- Se $\rho = 0$, a FDP conjunta de $(X_1, X_2)^T$ poderá ser fatorada e, consequentemente, X_1 e X_2 serão independentes. Assim, nós verificamos que no caso de uma distribuição normal bidimensional, correlação zero e independência são equivalentes.



Distribuição normal multivariada

Seja $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_k)^\top$ um vetor aleatório contínuo. Nós diremos que \mathbf{X} tem distribuição normal multidimensional (multivariada) se sua FDP conjunta for dada pela seguinte expressão



Distribuição normal multivariada

Seja $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_k)^\top$ um vetor aleatório contínuo. Nós diremos que \mathbf{X} tem distribuição normal multidimensional (multivariada) se sua FDP conjunta for dada pela seguinte expressão

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^k |\Sigma|}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^\top \Sigma^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) \right\} \mathbb{I}_{\mathbb{R}^k}(\mathbf{x}), \quad (2)$$



Distribuição normal multivariada

Seja $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_k)^\top$ um vetor aleatório contínuo. Nós diremos que \mathbf{X} tem distribuição normal multidimensional (multivariada) se sua FDP conjunta for dada pela seguinte expressão

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^k |\boldsymbol{\Sigma}|}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) \right\} \mathbb{I}_{\mathbb{R}^k}(\mathbf{x}), \quad (2)$$



Distribuição normal multivariada

em que $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k)^\top \in \mathbb{R}^k$ é o vetor de médias, $\boldsymbol{\Sigma} \in \mathbb{R}^{k \times k}$ é a matriz de covariâncias (uma matriz positiva semi-definida), de dimensão $k \times k$



Distribuição normal multivariada

em que $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k)^\top \in \mathbb{R}^k$ é o vetor de médias, $\boldsymbol{\Sigma} \in \mathbb{R}^{k \times k}$ é a matriz de covariâncias (uma matriz positiva semi-definida), de dimensão $k \times k$ e $|\boldsymbol{\Sigma}|$ é o determinante de $\boldsymbol{\Sigma}$.



Distribuição normal multivariada

em que $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k)^\top \in \mathbb{R}^k$ é o vetor de médias, $\boldsymbol{\Sigma} \in \mathbb{R}^{k \times k}$ é a matriz de covariâncias (uma matriz positiva semi-definida), de dimensão $k \times k$ e $|\boldsymbol{\Sigma}|$ é o determinante de $\boldsymbol{\Sigma}$. De forma alternativa, nós denotamos

$$\mathbf{X} \sim N_k(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}). \quad (3)$$



Distribuição normal multivariada

em que $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k)^\top \in \mathbb{R}^k$ é o vetor de médias, $\boldsymbol{\Sigma} \in \mathbb{R}^{k \times k}$ é a matriz de covariâncias (uma matriz positiva semi-definida), de dimensão $k \times k$ e $|\boldsymbol{\Sigma}|$ é o determinante de $\boldsymbol{\Sigma}$. De forma alternativa, nós denotamos

$$\mathbf{X} \sim N_k(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}). \quad (3)$$



Distribuição normal multivariada

Seja $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \dots, t_k)^\top \in \mathbb{R}^k$, a função geradora de momentos de \mathbf{X} é dada por



Distribuição normal multivariada

Seja $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \dots, t_k)^\top \in \mathbb{R}^k$, a função geradoras de momentos de \mathbf{X} é dada por

$$M(\mathbf{t}) = \mathbb{E}(e^{\mathbf{t}^\top \mathbf{X}}) = \exp \left\{ \boldsymbol{\mu}^\top \mathbf{t} + \frac{1}{2} \mathbf{t}^\top \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{t} \right\}.$$

Distribuição normal multivariada

Seja $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \dots, t_k)^\top \in \mathbb{R}^k$, a função geradoras de momentos de \mathbf{X} é dada por

$$M(\mathbf{t}) = \mathbb{E}(e^{\mathbf{t}^\top \mathbf{X}}) = \exp \left\{ \boldsymbol{\mu}^\top \mathbf{t} + \frac{1}{2} \mathbf{t}^\top \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{t} \right\}.$$

Distribuição normal multivariada

Observação

A quantidade $\sqrt{(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})}$ é conhecida como a **distância de Mahalanobis** (Mahalanobis, 1936).

Distribuição normal multivariada

Observação

A quantidade $\sqrt{(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})}$ é conhecida como a **distância de Mahalanobis** (Mahalanobis, 1936).



Distribuição normal multivariada

A normal bivariada, dada em (1), pode ser escrita na forma apresentada em (2), basta nós definirmos

$$\mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}.$$

Distribuição normal multivariada

A normal bivariada, dada em (1), pode ser escrita na forma apresentada em (2), basta nós definirmos

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}.$$

Distribuição normal multivariada

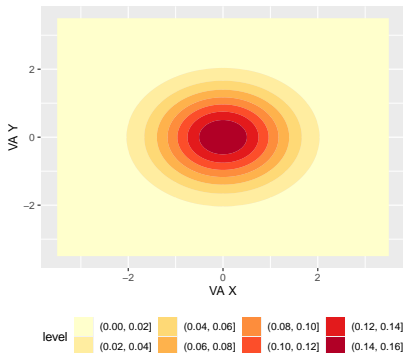
Exemplos:

① $\mu_1 = 0, \mu_2 = 0, \sigma_1^2 = 1, \sigma_2^2 = 1$ e $\rho = 0$;

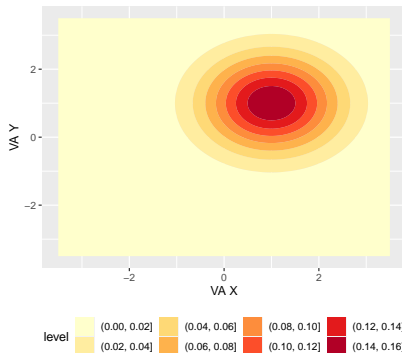
② $\mu_1 = 1, \mu_2 = 1, \sigma_1^2 = 1, \sigma_2^2 = 1$ e $\rho = 0$;

③ $\mu_1 = 0, \mu_2 = 0, \sigma_1^2 = 2, \sigma_2^2 = 2$ e $\rho = 0$;

④ $\mu_1 = 0, \mu_2 = 0, \sigma_1^2 = 2, \sigma_2^2 = 2$ e $\rho = 0,45$.

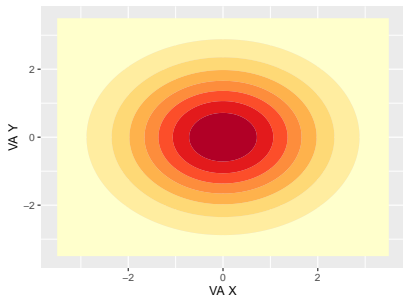


(a) Exemplo 1.

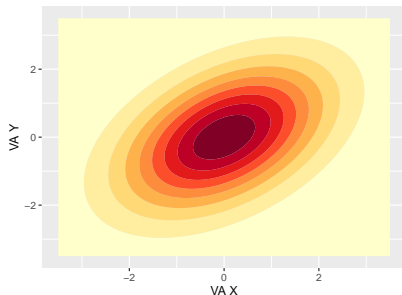


(b) Exemplo 2.

Figura 1: Gráfico de contornos de normais bidimensionais.



(a) Exemplo 3.



(b) Exemplo 4.

Figura 2: Gráfico de contornos de normais bidimensionais.

Distribuição normal multivariada

Sejam $\mathbf{Z} = (Z_1, Z_2, \dots, Z_n)^\top$, tal que $Z_i \sim N(0, 1)$, $i = 1, 2, \dots, n$, $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m)^\top \in \mathbb{R}^m$ e uma matriz \mathbf{A} , de dimensão $m \times n$. A condição para $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_m)^\top$ ter distribuição normal multivariada é a seguinte:



Distribuição normal multivariada

Sejam $\mathbf{Z} = (Z_1, Z_2, \dots, Z_n)^\top$, tal que $Z_i \sim N(0, 1)$, $i = 1, 2, \dots, n$, $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m)^\top \in \mathbb{R}^m$ e uma matriz \mathbf{A} , de dimensão $m \times n$. A condição para $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_m)^\top$ ter distribuição normal multivariada é a seguinte:

$$\mathbf{X} \sim N_m(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) \Leftrightarrow \mathbf{AZ} + \boldsymbol{\mu}, \quad (4)$$

em que $\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{AA}^\top$.



Distribuição normal multivariada

Sejam $\mathbf{Z} = (Z_1, Z_2, \dots, Z_n)^\top$, tal que $Z_i \sim N(0, 1)$, $i = 1, 2, \dots, n$, $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m)^\top \in \mathbb{R}^m$ e uma matriz \mathbf{A} , de dimensão $m \times n$. A condição para $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_m)^\top$ ter distribuição normal multivariada é a seguinte:

$$\mathbf{X} \sim N_m(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) \Leftrightarrow \mathbf{AZ} + \boldsymbol{\mu}, \quad (4)$$

em que $\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{AA}^\top$. A equação (4) expressa em sistema lineares pode ser encontrada em Ross (2010, p. 432).



Distribuição normal multivariada

Sejam $\mathbf{Z} = (Z_1, Z_2, \dots, Z_n)^\top$, tal que $Z_i \sim N(0, 1)$, $i = 1, 2, \dots, n$, $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m)^\top \in \mathbb{R}^m$ e uma matriz \mathbf{A} , de dimensão $m \times n$. A condição para $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_m)^\top$ ter distribuição normal multivariada é a seguinte:

$$\mathbf{X} \sim N_m(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) \Leftrightarrow \mathbf{AZ} + \boldsymbol{\mu}, \quad (4)$$

em que $\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{AA}^\top$. A equação (4) expressa em sistema lineares pode ser encontrada em Ross (2010, p. 432).



Distribuição normal multivariada

Sejam \mathbf{X} um vetor com distribuição normal multivariada, como dada em (3), e $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_k)^\top \in \mathbb{R}^k$ um vetor de constantes. Agora, seja uma VA definida da seguinte forma:



Distribuição normal multivariada

Sejam \mathbf{X} um vetor com distribuição normal multivariada, como dada em (3), e $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_k)^\top \in \mathbb{R}^k$ um vetor de constantes. Agora, seja uma VA definida da seguinte forma:

$$Y = \mathbf{a}^\top \mathbf{X} = a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots + a_k X_k.$$



Distribuição normal multivariada

Sejam \mathbf{X} um vetor com distribuição normal multivariada, como dada em (3), e $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_k)^\top \in \mathbb{R}^k$ um vetor de constantes. Agora, seja uma VA definida da seguinte forma:

$$Y = \mathbf{a}^\top \mathbf{X} = a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots + a_k X_k.$$

Então, Y tem distribuição normal unidimensional com média $\mu_Y = \mathbf{a}^\top \boldsymbol{\mu}$ e $\sigma_Y^2 = \mathbf{a}^\top \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{a}$,



Distribuição normal multivariada

Sejam \mathbf{X} um vetor com distribuição normal multivariada, como dada em (3), e $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_k)^\top \in \mathbb{R}^k$ um vetor de constantes. Agora, seja uma VA definida da seguinte forma:

$$Y = \mathbf{a}^\top \mathbf{X} = a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots + a_k X_k.$$

Então, Y tem distribuição normal unidimensional com média $\mu_Y = \mathbf{a}^\top \boldsymbol{\mu}$ e $\sigma_Y^2 = \mathbf{a}^\top \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{a}$, i.e., combinação linear de distribuições normais tem distribuição normal.



Distribuição normal multivariada

Sejam \mathbf{X} um vetor com distribuição normal multivariada, como dada em (3), e $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_k)^\top \in \mathbb{R}^k$ um vetor de constantes. Agora, seja uma VA definida da seguinte forma:

$$Y = \mathbf{a}^\top \mathbf{X} = a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots + a_k X_k.$$

Então, Y tem distribuição normal unidimensional com média $\mu_Y = \mathbf{a}^\top \boldsymbol{\mu}$ e $\sigma_Y^2 = \mathbf{a}^\top \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{a}$, i.e., combinação linear de distribuições normais tem distribuição normal.



Roteiro

- 1 Distribuição multinomial
- 2 Distribuição normal multivariada
- 3 Distribuição Wishart**
- 4 Distribuição Dirichlet
- 5 Referências bibliográficas



Distribuição Wishart

Sejam $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n$ vetores aleatórios independentes, $p \times 1$, tal que

$$\mathbf{X}_i \sim N_p(\mathbf{0}, \Sigma),$$

$i = 1, 2, \dots, n$. Seja também,

$$\mathbf{X} = (\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n),$$



Distribuição Wishart

Sejam $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n$ vetores aleatórios independentes, $p \times 1$, tal que

$$\mathbf{X}_i \sim N_p(\mathbf{0}, \Sigma),$$

$i = 1, 2, \dots, n$. Seja também,

$$\mathbf{X} = (\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n),$$

uma matriz aleatória, de dimensão $p \times n$.



Distribuição Wishart

Sejam $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n$ vetores aleatórios independentes, $p \times 1$, tal que

$$\mathbf{X}_i \sim N_p(\mathbf{0}, \Sigma),$$

$i = 1, 2, \dots, n$. Seja também,

$$\mathbf{X} = (\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n),$$

uma matriz aleatória, de dimensão $p \times n$.



Distribuição Wishart

A matriz aleatória, de dimensão $p \times p$, construída da seguinte forma,

$$M = \mathbf{X}\mathbf{X}^T = \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^T,$$



Distribuição Wishart

A matriz aleatória, de dimensão $p \times p$, construída da seguinte forma,

$$\mathbf{M} = \mathbf{X}\mathbf{X}^{\top} = \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^{\top},$$

é denominada de distribuição Wishart, com n graus de liberdade e matriz de covariâncias Σ .



Distribuição Wishart

A matriz aleatória, de dimensão $p \times p$, construída da seguinte forma,

$$\mathbf{M} = \mathbf{X}\mathbf{X}^{\top} = \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^{\top},$$

é denominada de distribuição Wishart, com n graus de liberdade e matriz de covariâncias Σ . Notação: $\mathbf{M} \sim W_p(n, \Sigma)$.



Distribuição Wishart

A matriz aleatória, de dimensão $p \times p$, construída da seguinte forma,

$$\mathbf{M} = \mathbf{X}\mathbf{X}^{\top} = \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^{\top},$$

é denominada de distribuição Wishart, com n graus de liberdade e matriz de covariâncias Σ . Notação: $\mathbf{M} \sim W_p(n, \Sigma)$.



Distribuição Wishart

Se $\mathbf{M} \sim W_p(n, \mathbf{\Sigma})$, sua FDP conjunta é dada pela seguinte expressão

$$f(\mathbf{M}) = \frac{1}{2^{np/2} \Gamma_p\left(\frac{n}{2}\right) |\mathbf{\Sigma}|^{n/2}} |\mathbf{M}|^{(n-p-1)/2} \exp\left\{-\frac{1}{2} \text{tr}[\mathbf{\Sigma}^{-1} \mathbf{M}]\right\} \mathbb{I}_{\mathbb{R}_+^{p \times p}}(\mathbf{M}),$$



Distribuição Wishart

Se $\mathbf{M} \sim W_p(n, \Sigma)$, sua FDP conjunta é dada pela seguinte expressão

$$f(\mathbf{M}) = \frac{1}{2^{np/2} \Gamma_p\left(\frac{n}{2}\right) |\Sigma|^{n/2}} |\mathbf{M}|^{(n-p-1)/2} \exp\left\{-\frac{1}{2} \text{tr}[\Sigma^{-1} \mathbf{M}]\right\} \mathbb{I}_{\mathbb{R}_+^{p \times p}}(\mathbf{M}),$$

em que $\text{tr}[\cdot]$ é o operador traço e $\Gamma_p(\cdot)$ é a função gama multivariada.



Distribuição Wishart

Se $\mathbf{M} \sim W_p(n, \Sigma)$, sua FDP conjunta é dada pela seguinte expressão

$$f(\mathbf{M}) = \frac{1}{2^{np/2} \Gamma_p\left(\frac{n}{2}\right) |\Sigma|^{n/2}} |\mathbf{M}|^{(n-p-1)/2} \exp\left\{-\frac{1}{2} \text{tr}[\Sigma^{-1} \mathbf{M}]\right\} \mathbb{I}_{\mathbb{R}_+^{p \times p}}(\mathbf{M}),$$

em que $\text{tr}[\cdot]$ é o operador traço e $\Gamma_p(\cdot)$ é a função gama multivariada.



Distribuição Wishart

Observações:

① se $\Sigma = I_p$,

Distribuição Wishart

Observações:

- ① se $\Sigma = I_p$, a distribuição de M é denominada de Wishart padrão;



Distribuição Wishart

Observações:

- ① se $\Sigma = I_p$, a distribuição de \mathbf{M} é denominada de Wishart padrão;
- ② a Wishart é a extensão multivariada da distribuição qui-quadrado;



Distribuição Wishart

Observações:

- ① se $\Sigma = I_p$, a distribuição de \mathbf{M} é denominada de Wishart padrão;
- ② a Wishart é a extensão multivariada da distribuição qui-quadrado;
- ③ se $M \sim W_1(n, \sigma^2)$,



Distribuição Wishart

Observações:

- ① se $\Sigma = I_p$, a distribuição de \mathbf{M} é denominada de Wishart padrão;
- ② a Wishart é a extensão multivariada da distribuição qui-quadrado;
- ③ se $M \sim W_1(n, \sigma^2)$, então $M/\sigma^2 \sim \chi_n^2$.



Distribuição Wishart

Observações:

- ① se $\Sigma = I_p$, a distribuição de \mathbf{M} é denominada de Wishart padrão;
- ② a Wishart é a extensão multivariada da distribuição qui-quadrado;
- ③ se $M \sim W_1(n, \sigma^2)$, então $M/\sigma^2 \sim \chi_n^2$.



Roteiro

- 1 Distribuição multinomial
- 2 Distribuição normal multivariada
- 3 Distribuição Wishart
- 4 Distribuição Dirichlet**
- 5 Referências bibliográficas



Distribuição Dirichlet

Nós podemos assumir que o vetor aleatório $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_D)^\top$ segue uma distribuição Dirichlet (Olkin e Rubin, 1964) com vetor de parâmetros $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_D)^\top$, $\lambda_j > 0$, $j = 1, 2, \dots, D$, com $D \geq 2$,



Distribuição Dirichlet

Nós podemos assumir que o vetor aleatório $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_D)^\top$ segue uma distribuição Dirichlet (Olkin e Rubin, 1964) com vetor de parâmetros $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_D)^\top$, $\lambda_j > 0$, $j = 1, 2, \dots, D$, com $D \geq 2$, se sua FDP conjunta pode ser escrita como

$$f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = \frac{\Gamma\left(\sum_{j=1}^D \lambda_j\right)}{\prod_{j=1}^D \Gamma(\lambda_j)} \prod_{j=1}^D x_j^{\lambda_j-1} \mathbb{I}_{(0,1)}(x_1 + x_2 + \dots + x_D), \quad (5)$$



Distribuição Dirichlet

Nós podemos assumir que o vetor aleatório $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_D)^\top$ segue uma distribuição Dirichlet (Olkin e Rubin, 1964) com vetor de parâmetros $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_D)^\top$, $\lambda_j > 0$, $j = 1, 2, \dots, D$, com $D \geq 2$, se sua FDP conjunta pode ser escrita como

$$f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = \frac{\Gamma\left(\sum_{j=1}^D \lambda_j\right)}{\prod_{j=1}^D \Gamma(\lambda_j)} \prod_{j=1}^D x_j^{\lambda_j-1} \mathbb{I}_{(0,1)}(x_1 + x_2 + \dots + x_D), \quad (5)$$

em que $\Gamma(\cdot)$ é a função gama, isto é, $\Gamma(\lambda) = \int_0^\infty v^{\lambda-1} e^{-v} dv$.



Distribuição Dirichlet

Nós podemos assumir que o vetor aleatório $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_D)^\top$ segue uma distribuição Dirichlet (Olkin e Rubin, 1964) com vetor de parâmetros $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_D)^\top$, $\lambda_j > 0$, $j = 1, 2, \dots, D$, com $D \geq 2$, se sua FDP conjunta pode ser escrita como

$$f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = \frac{\Gamma\left(\sum_{j=1}^D \lambda_j\right)}{\prod_{j=1}^D \Gamma(\lambda_j)} \prod_{j=1}^D x_j^{\lambda_j-1} \mathbb{I}_{(0,1)}(x_1 + x_2 + \dots + x_D), \quad (5)$$

em que $\Gamma(\cdot)$ é a função gama, isto é, $\Gamma(\lambda) = \int_0^\infty v^{\lambda-1} e^{-v} dv$.



Distribuição Dirichlet

A distribuição Dirichlet é a generalização da distribuição beta. Além disso, se $\mathbf{X} \sim \text{Dirichlet}(\boldsymbol{\lambda})$,



Distribuição Dirichlet

A distribuição Dirichlet é a generalização da distribuição beta. Além disso, se $\mathbf{X} \sim \text{Dirichlet}(\boldsymbol{\lambda})$, nós temos que



Distribuição Dirichlet

A distribuição Dirichlet é a generalização da distribuição beta. Além disso, se $\mathbf{X} \sim \text{Dirichlet}(\boldsymbol{\lambda})$, nós temos que

$$\mathbb{E}(X_j) = \frac{\lambda_j}{\sum_{j=1}^D \lambda_j}, \quad j = 1, 2, \dots, D.$$



Distribuição Dirichlet

A distribuição Dirichlet é a generalização da distribuição beta. Além disso, se $\mathbf{X} \sim \text{Dirichlet}(\boldsymbol{\lambda})$, nós temos que

$$\mathbb{E}(X_j) = \frac{\lambda_j}{\sum_{j=1}^D \lambda_j}, \quad j = 1, 2, \dots, D.$$

Outras propriedades podem ser encontradas em Pereira e Stern (2008).



Distribuição Dirichlet

A distribuição Dirichlet é a generalização da distribuição beta. Além disso, se $\mathbf{X} \sim \text{Dirichlet}(\boldsymbol{\lambda})$, nós temos que

$$\mathbb{E}(X_j) = \frac{\lambda_j}{\sum_{j=1}^D \lambda_j}, \quad j = 1, 2, \dots, D.$$

Outras propriedades podem ser encontradas em Pereira e Stern (2008).



Distribuição Dirichlet

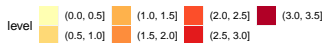
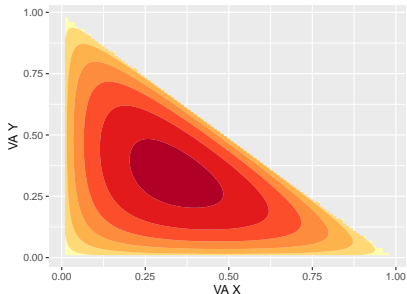
Exemplos:

① $\lambda_1 = 1,5$, $\lambda_2 = 1,5$ e $\lambda_3 = 1,5$;

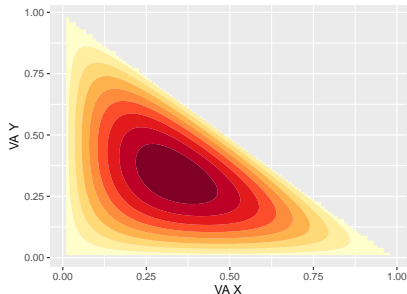
② $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 2$ e $\lambda_3 = 2$;

③ $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 4$ e $\lambda_3 = 8$;

④ $\lambda_1 = 8$, $\lambda_2 = 4$ e $\lambda_3 = 2$.

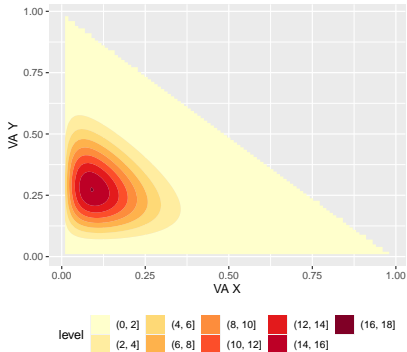


(a) Exemplo 1.

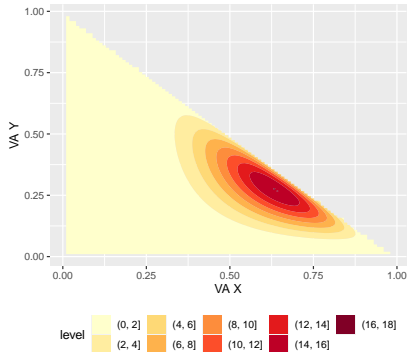


(b) Exemplo 2.

Figura 3: Gráfico de contornos de Dirichlets tridimensionais.



(a) Exemplo 3.



(b) Exemplo 4.

Figura 4: Gráfico de contornos de Dirichlets tridimensionais.

Distribuição Dirichlet

Uma vantagem de assumir uma distribuição Dirichlet é que ela pode ser simulada a partir de uma distribuição gama, como demonstrado por Devroye (1986).



Distribuição Dirichlet

Uma vantagem de assumir uma distribuição Dirichlet é que ela pode ser simulada a partir de uma distribuição gama, como demonstrado por Devroye (1986). O algoritmo de simulação é o seguinte:



Distribuição Dirichlet

Uma vantagem de assumir uma distribuição Dirichlet é que ela pode ser simulada a partir de uma distribuição gama, como demonstrado por Devroye (1986). O algoritmo de simulação é o seguinte:

- 1 Fixa-se $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_D)^\top$;



Distribuição Dirichlet

Uma vantagem de assumir uma distribuição Dirichlet é que ela pode ser simulada a partir de uma distribuição gama, como demonstrado por Devroye (1986). O algoritmo de simulação é o seguinte:

- 1 Fixa-se $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_D)^\top$;
- 2 Simulam-se D valores de $y_j \sim \text{gama}(\lambda_j, 1)$, com $j = 1, \dots, D$;



Distribuição Dirichlet

Uma vantagem de assumir uma distribuição Dirichlet é que ela pode ser simulada a partir de uma distribuição gama, como demonstrado por Devroye (1986). O algoritmo de simulação é o seguinte:

- 1 Fixa-se $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_D)^\top$;
- 2 Simulam-se D valores de $y_j \sim \text{gama}(\lambda_j, 1)$, com $j = 1, \dots, D$;
- 3 Calculam-se $x_j = \frac{y_j}{\sum_{j=1}^D y_j}$, com $j = 1, \dots, D$.



Distribuição Dirichlet

Uma vantagem de assumir uma distribuição Dirichlet é que ela pode ser simulada a partir de uma distribuição gama, como demonstrado por Devroye (1986). O algoritmo de simulação é o seguinte:

- 1 Fixa-se $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_D)^\top$;
- 2 Simulam-se D valores de $y_j \sim \text{gama}(\lambda_j, 1)$, com $j = 1, \dots, D$;
- 3 Calculam-se $x_j = \frac{y_j}{\sum_{j=1}^D y_j}$, com $j = 1, \dots, D$.



Roteiro

- 1 Distribuição multinomial
- 2 Distribuição normal multivariada
- 3 Distribuição Wishart
- 4 Distribuição Dirichlet
- 5 Referências bibliográficas



Referências bibliográficas I

Devroye, L. (1986), *Non-Uniform Random Variate Generation*, Springer-Verlag, New York.

Hardy, G. H. (1908), 'Mendelian proportions in a mixed population', *Science* **28**(706), 49–50.

Mahalanobis, P. C. (1936), 'On the generalised distance in statistics', *Proceedings of the National Institute of Sciences of India* **2**(1), 49–55.

Olkin, I. e Rubin, H. (1964), 'Multivariate beta distributions and independence properties of the wishart distribution', *Annals of Mathematical Statistics* **35**(1), 261–269.



Referências bibliográficas II

- Pereira, C. A. B. e Stern, J. M. (2008), 'Special characterizations of standard discrete models', *REVSTAT - Statistical Journal* **6**(3), 199–230.
- Ross, S. (2010), *Probabilidade: um curso moderno com aplicações*, 8 edn, Bookman, Porto Alegre.
- Weinberg, W. (1908), 'Über den nachweis der vererbung beim menschen', *Jahresheft des Vereins für vaterländische Naturkunde in Württemberg* **64**, 368–382.



Obrigado!

✉ tiago.magalhaes@ufjf.br

📄 ufjf.br/tiago_magalhaes

🌐 Departamento de Estatística, Sala 319

