Funções geradoras

Tiago M. Magalhães

Departamento de Estatística - ICE-UFJF

Juiz de Fora, 03 de outubro de 2025

Roteiro

Roteiro

1 Funções geradoras

2 Função geradora multidimensional de momentos

3 Bibliografia

Função geradora de probabilidades

A função geradora de probabilidades (FGP) da variável aleatória (VA) discreta X, $P_X(t)$, é definida por

$$P_X(t) = \mathbb{E}\left[t^X\right] = \sum_{x=-\infty}^{+\infty} t^x p_X(x),$$

para $t \in \mathbb{R}$.

Função geradora de momentos

E a função geradora de momentos (FGM) da VA X, $M_X(t)$, é definida por

$$M_X(t) = \mathbb{E}\left[e^{tX}\right] = \begin{cases} \sum_{x=-\infty}^{+\infty} e^{tx} p_X(x), & \text{caso discreto,} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f_X(x)\, dx, & \text{caso contínuo,} \end{cases}$$

para $t \in \mathbb{R}$.

Função característica

As FGP e FGM são ferramentas muito úteis. Contudo, elas nem sempre existirão. Dessa forma, é interessante obter uma função que sempre exista.

Função característica

Uma VA X é complexa, se puder ser escrita como:

$$X = X^a + iX^b,$$

em que $i = \sqrt{-1}$, X^a e X^b são VA reais.

Função característica

A função característica da VA X, $\varphi_X(t)$, é definida por

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}\left[e^{itX}\right] = \mathbb{E}\left[\cos(tX)\right] + i\mathbb{E}\left[\text{sen}(tX)\right],$$

para $t \in \mathbb{R}$ e $i = \sqrt{-1}$.

Função característica

Seja X uma VA qualquer e φ_X sua função característica, então:

1. $\varphi_X(0) = 1$;

Função característica

Seja X uma VA qualquer e φ_X sua função característica, então:

1. $\varphi_X(0) = 1$;
2. $|\varphi_X(t)| \leq 1$;

Função característica

Seja X uma VA qualquer e φ_X sua função característica, então:

1. $\varphi_X(0) = 1$;
2. $|\varphi_X(t)| \leq 1$;
3. Para a e b constantes, $\varphi_{aX+b}(t) = e^{itb}\varphi_X(at)$;

Função característica

Seja X uma VA qualquer e φ_X sua função característica, então:

1. $\varphi_X(0) = 1$;
2. $|\varphi_X(t)| \leq 1$;
3. Para a e b constantes, $\varphi_{aX+b}(t) = e^{itb}\varphi_X(at)$;
4. Se as VA X e Y são independentes então, $\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t) \times \varphi_Y(t)$;

Função característica

Seja X uma VA qualquer e φ_X sua função característica, então:

1. $\varphi_X(0) = 1$;
2. $|\varphi_X(t)| \leq 1$;
3. Para a e b constantes, $\varphi_{aX+b}(t) = e^{itb}\varphi_X(at)$;
4. Se as VA X e Y são independentes então, $\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t) \times \varphi_Y(t)$;
5. $\varphi_X(t)$ é uniformemente contínua;

Função característica

Seja X uma VA qualquer e φ_X sua função característica, então:

1. $\varphi_X(0) = 1$;
2. $|\varphi_X(t)| \leq 1$;
3. Para a e b constantes, $\varphi_{aX+b}(t) = e^{itb}\varphi_X(at)$;
4. Se as VA X e Y são independentes então, $\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t) \times \varphi_Y(t)$;
5. $\varphi_X(t)$ é uniformemente contínua;
6. $\varphi_X(t)$ também gera momentos.

Função característica

Seja X uma VA qualquer e φ_X sua função característica, então:

1. $\varphi_X(0) = 1$;
2. $|\varphi_X(t)| \leq 1$;
3. Para a e b constantes, $\varphi_{aX+b}(t) = e^{itb}\varphi_X(at)$;
4. Se as VA X e Y são independentes então, $\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t) \times \varphi_Y(t)$;
5. $\varphi_X(t)$ é uniformemente contínua;
6. $\varphi_X(t)$ também gera momentos.

Funções geradoras

Seja X uma VA, a partir das funções geradoras, nós podemos observar as seguintes relações

- $M_X(t) = P_X(e^t)$, se X é uma VA discreta;

Funções geradoras

Seja X uma VA, a partir das funções geradoras, nós podemos observar as seguintes relações

- $M_X(t) = P_X(e^t)$, se X é uma VA discreta;
- $\varphi_X(t) = M_X(it)$.

Funções geradoras

Seja X uma VA, a partir das funções geradoras, nós podemos observar as seguintes relações

- $M_X(t) = P_X(e^t)$, se X é uma VA discreta;
- $\varphi_X(t) = M_X(it)$.

A função geradora de cumulantes (FGC) da VA X, $K_X(t)$, é definida por

$$K_X(t) = \log M_X(t),$$

para $t \in \mathbb{R}$. A FGC também pode ser definida como

$$K_X(t) = \log \varphi_X(t),$$

para $t \in \mathbb{R}$.

Função geradora de cumulantes

A função geradora de cumulantes (FGC) da VA X, $K_X(t)$, é definida por

$$K_X(t) = \log M_X(t),$$

para $t \in \mathbb{R}$. A FGC também pode ser definida como

$$K_X(t) = \log \varphi_X(t),$$

para $t \in \mathbb{R}$.

Roteiro

Função geradora multidimensional de momentos

A FGM conjunta da VA bidimensional $(X, Y)^\top$, $M(t_1, t_2)$, é definida para todos os valores reais t_1 e t_2 por

$$
\begin{aligned}
M(t_1, t_2) &= \mathbb{E}\left[e^{t_1 X + t_2 Y}\right] \qquad (1)\\
&= \begin{cases} \sum_{x=-\infty}^{+\infty} \sum_{y=-\infty}^{+\infty} e^{t_1 x + t_2 y} p(x, y), & \text{caso discreto,} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{t_1 x + t_2 y} f(x, y) dx dy, & \text{caso contínuo.} \end{cases}
\end{aligned}
$$

A FGM conjunta é única e determina a distribuição conjunta de $(X, Y)^\top$.

Função geradora multidimensional de momentos

A FGM conjunta da VA bidimensional $(X, Y)^\top$, $M(t_1, t_2)$, é definida para todos os valores reais t_1 e t_2 por

$$
\begin{aligned}
M(t_1, t_2) &= \mathbb{E}\left[e^{t_1 X + t_2 Y}\right] \\
&= \begin{cases} \sum_{x=-\infty}^{+\infty} \sum_{y=-\infty}^{+\infty} e^{t_1 x + t_2 y} p(x, y), & \text{caso discreto,} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{t_1 x + t_2 y} f(x, y) dx dy, & \text{caso contínuo.} \end{cases}
\end{aligned} \tag{1}
$$

A FGM conjunta é única e determina a distribuição conjunta de $(X, Y)^\top$.

Função geradora de momentos

De (1), nós temos que

$$\left.\frac{\partial^{r+s} M(t_1, t_2)}{\partial t_1^r \partial t_2^s}\right|_{t_1=0, t_2=0} = \mathbb{E}\left(X^r Y^s\right).$$

Por exemplo, $r = s = 1$,

$$\left.\frac{\partial^2 M(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2}\right|_{t_1=0, t_2=0} = \mathbb{E}\left(XY\right).$$

Função geradora de momentos

De (1), nós temos que

$$\left.\frac{\partial^{r+s} M(t_1, t_2)}{\partial t_1^r \partial t_2^s}\right|_{t_1=0, t_2=0} = \mathbb{E}\left(X^r Y^s\right).$$

Por exemplo, $r = s = 1$,

$$\left.\frac{\partial^2 M(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2}\right|_{t_1=0, t_2=0} = \mathbb{E}\left(XY\right).$$

Função geradora de momentos

Se $r = 1$ e $s = 0$,

$$\left.\frac{\partial M(t_1, t_2)}{\partial t_1}\right|_{t_1=0, t_2=0} = \mathbb{E}\left(X\right).$$

Se $r = 0$ e $s = 1$,

$$\left.\frac{\partial M(t_1, t_2)}{\partial t_2}\right|_{t_1=0, t_2=0} = \mathbb{E}\left(Y\right).$$

Função geradora de momentos

Se $r = 1$ e $s = 0$,

$$\left.\frac{\partial M(t_1, t_2)}{\partial t_1}\right|_{t_1=0, t_2=0} = \mathbb{E}\,(X)\,.$$

Se $r = 0$ e $s = 1$,

$$\left.\frac{\partial M(t_1, t_2)}{\partial t_2}\right|_{t_1=0, t_2=0} = \mathbb{E}\,(Y)\,.$$

Função geradora de momentos

De (1), nós podemos obter as FGM marginais da seguinte forma

$$M_X(t) = \mathbb{E}\left[e^{tX}\right] = M(t, 0),$$
$$M_Y(t) = \mathbb{E}\left[e^{tY}\right] = M(0, t).$$

Função geradora de momentos

Se X e Y são VAs independentes, então a FGM em (1) pode ser escrita da seguinte forma

$$M(t_1, t_2) = M_X(t_1) \times M_Y(t_2).$$

Função geradora de momentos

Se X e Y são VAs independentes, então a FGM em (1) pode ser escrita da seguinte forma

$$M(t_1, t_2) = M_X(t_1) \times M_Y(t_2).$$

Função geradora de momentos

De maneira geral, a FGM conjunta da VA multidimensional $(X_1, X_2, \ldots, X_n)^\top$, $M(t_1, t_2, \ldots, t_n)$, é definida por

$$M(t_1, t_2, \ldots, t_n) = \mathbb{E}\left[e^{t_1 X_1 + t_2 X_2 + \cdots + t_n X_n}\right].$$

Função geradora de momentos

Exemplo. Sejam $X \sim \mathrm{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ e $Y \sim \mathrm{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$ VAs independentes.

1. Qual é a FGM de X e Y, respectivamente? (Não é necessário provar).
2. Qual é a FGM conjunta da VA bidimensional $(X, Y)^\top$?
3. A partir da FGM do item (b), encontre $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(Y)$, $\mathbb{E}(XY)$;
4. Calcule $\mathrm{Cov}(X, Y)$.

Exemplo. Sejam $X \sim \mathrm{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ e $Y \sim \mathrm{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$ VAs independentes.

1. Qual é a FGM de X e Y, respectivamente? (Não é necessário provar).
2. Qual é a FGM conjunta da VA bidimensional $(X, Y)^\top$?
3. A partir da FGM do item (b), encontre $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(Y)$, $\mathbb{E}(XY)$;
4. Calcule $\mathrm{Cov}(X, Y)$.

Roteiro

Bibliografia

Magalhães, M. N. (2015), *Probabilidade e variáveis aleatórias*, 3 edn, Editora da Universidade de São Paulo, São Paulo.

Meyer, P. L. (2017), *Probabilidade: aplicações à Estatística*, 2 edn, Livros Técnicos e Científicos Editora Ltda, Rio de Janeiro.

Ross, S. (2010), *Probabilidade: um curso moderno com aplicações*, 8 edn, Bookman, Porto Alegre.

Ross, S. (2019), *A first course in probability*, 10 edn. global edn, Pearson Education, Malaysia.

Obrigado!

✉ tiago.magalhaes@ufjf.br

ufjf.br/tiago_magalhaes

Departamento de Estatística, Sala 319