

Teoremas limites

Tiago M. Magalhães

Departamento de Estatística - ICE-UFJF

Juiz de Fora, 15 de outubro de 2025



Roteiro

- 1 Motivação
- 2 Lei fraca dos grandes números
- 3 Lei forte dos grandes números
- 4 Teorema central do limite
- 5 Limites de binomiais para Poisson
- 6 Referências bibliográficas



Roteiro

- 1 Motivação
- 2 Lei fraca dos grandes números
- 3 Lei forte dos grandes números
- 4 Teorema central do limite
- 5 Limites de binomiais para Poisson
- 6 Referências bibliográficas



Motivação

Os mais importantes resultados teóricos na teoria da probabilidade



Motivação

Os mais importantes resultados teóricos na teoria da probabilidade são os teoremas limites



Motivação

Os mais importantes resultados teóricos na teoria da probabilidade são os teoremas limites (Ross, 2010).



Motivação

Os mais importantes resultados teóricos na teoria da probabilidade são os teoremas limites (Ross, 2010). Destes,



Motivação

Os mais importantes resultados teóricos na teoria da probabilidade são os teoremas limites (Ross, 2010). Destes, os mais importantes



Motivação

Os mais importantes resultados teóricos na teoria da probabilidade são os teoremas limites (Ross, 2010). Destes, os mais importantes são as **leis dos grandes números**



Motivação

Os mais importantes resultados teóricos na teoria da probabilidade são os teoremas limites (Ross, 2010). Destes, os mais importantes são as **leis dos grandes números** e os **teoremas centrais do limite**.



Motivação

Os mais importantes resultados teóricos na teoria da probabilidade são os teoremas limites (Ross, 2010). Destes, os mais importantes são as **leis dos grandes números** e os **teoremas centrais do limite**.



Motivação

Usualmente, teoremas são considerados **leis de grandes números**



Motivação

Usualmente, teoremas são considerados **leis de grandes números** se estiverem interessados em enunciar condições



Motivação

Usualmente, teoremas são considerados **leis de grandes números** se estiverem interessados em enunciar condições nas quais a média de uma sequência de variáveis aleatórias



Motivação

Usualmente, teoremas são considerados **leis de grandes números** se estiverem interessados em enunciar condições nas quais a média de uma sequência de variáveis aleatórias converge (de alguma forma) para a média esperada.



Motivação

Usualmente, teoremas são considerados **leis de grandes números** se estiverem interessados em enunciar condições nas quais a média de uma sequência de variáveis aleatórias converge (de alguma forma) para a média esperada.



Motivação

Por outro lado, **teoremas centrais do limite** estão interessados em determinar condições



Motivação

Por outro lado, **teoremas centrais do limite** estão interessados em determinar condições nas quais a soma de um grande número de variáveis aleatórias



Motivação

Por outro lado, **teoremas centrais do limite** estão interessados em determinar condições nas quais a soma de um grande número de variáveis aleatórias possui uma distribuição de probabilidade



Motivação

Por outro lado, **teoremas centrais do limite** estão interessados em determinar condições nas quais a soma de um grande número de variáveis aleatórias possui uma distribuição de probabilidade que é aproximadamente normal.



Motivação

Por outro lado, **teoremas centrais do limite** estão interessados em determinar condições nas quais a soma de um grande número de variáveis aleatórias possui uma distribuição de probabilidade que é aproximadamente normal.



Roteiro

- 1 Motivação
- 2 Lei fraca dos grandes números
- 3 Lei forte dos grandes números
- 4 Teorema central do limite
- 5 Limites de binomiais para Poisson
- 6 Referências bibliográficas



Lei fraca dos grandes números

Seja X_1, X_2, \dots uma sequência de variáveis aleatórias



Lei fraca dos grandes números

Seja X_1, X_2, \dots uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas,



Lei fraca dos grandes números

Seja X_1, X_2, \dots uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, com média finita,



Lei fraca dos grandes números

Seja X_1, X_2, \dots uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, com média finita, isto é, $\mathbb{E}(X_n) = \mu < \infty$,



Lei fraca dos grandes números

Seja X_1, X_2, \dots uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, com média finita, isto é, $\mathbb{E}(X_n) = \mu < \infty$, $n \geq 1$.



Lei fraca dos grandes números

Seja X_1, X_2, \dots uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, com média finita, isto é, $\mathbb{E}(X_n) = \mu < \infty$, $n \geq 1$.

As somas parciais $S_n = X_1 + \dots + X_n$



Lei fraca dos grandes números

Seja X_1, X_2, \dots uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, com média finita, isto é, $\mathbb{E}(X_n) = \mu < \infty$, $n \geq 1$.

As somas parciais $S_n = X_1 + \dots + X_n$ satisfazem



Lei fraca dos grandes números

Seja X_1, X_2, \dots uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, com média finita, isto é, $\mathbb{E}(X_n) = \mu < \infty$, $n \geq 1$.

As somas parciais $S_n = X_1 + \dots + X_n$ satisfazem

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\text{p.}} \mu.$$



Lei fraca dos grandes números

Seja X_1, X_2, \dots uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, com média finita, isto é, $\mathbb{E}(X_n) = \mu < \infty$, $n \geq 1$.

As somas parciais $S_n = X_1 + \dots + X_n$ satisfazem

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\text{p.}} \mu.$$

Prova:



Lei fraca dos grandes números

Seja X_1, X_2, \dots uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, com média finita, isto é, $\mathbb{E}(X_n) = \mu < \infty$, $n \geq 1$.

As somas parciais $S_n = X_1 + \dots + X_n$ satisfazem

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\text{p.}} \mu.$$

Prova: ver exercício 2, da lista 13.



Lei fraca dos grandes números

Seja X_1, X_2, \dots uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, com média finita, isto é, $\mathbb{E}(X_n) = \mu < \infty$, $n \geq 1$.

As somas parciais $S_n = X_1 + \dots + X_n$ satisfazem

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\text{p}} \mu.$$

Prova: ver exercício 2, da lista 13.



Lei fraca dos grandes números

A lei fraca dos grandes números foi demonstrada por Khinchine (1929).



Lei fraca dos grandes números

A lei fraca dos grandes números foi demonstrada por Khinchine (1929).

Antes,



Lei fraca dos grandes números

A lei fraca dos grandes números foi demonstrada por Khinchine (1929).

Antes, a demonstração foi originalmente feita por Bernoulli (1713),



Lei fraca dos grandes números

A lei fraca dos grandes números foi demonstrada por Khinchine (1929).

Antes, a demonstração foi originalmente feita por Bernoulli (1713), para o caso de uma sequência de variáveis aleatórias com distribuição Bernoulli,



Lei fraca dos grandes números

A lei fraca dos grandes números foi demonstrada por Khinchine (1929). Antes, a demonstração foi originalmente feita por Bernoulli (1713), para o caso de uma sequência de variáveis aleatórias com distribuição Bernoulli, para estas condições,



Lei fraca dos grandes números

A lei fraca dos grandes números foi demonstrada por Khinchine (1929). Antes, a demonstração foi originalmente feita por Bernoulli (1713), para o caso de uma sequência de variáveis aleatórias com distribuição Bernoulli, para estas condições,

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\text{p.}} p.$$



Lei fraca dos grandes números

A lei fraca dos grandes números foi demonstrada por Khinchine (1929). Antes, a demonstração foi originalmente feita por Bernoulli (1713), para o caso de uma sequência de variáveis aleatórias com distribuição Bernoulli, para estas condições,

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\text{p.}} p.$$



Lei fraca dos grandes números

Seja X_1, X_2, \dots uma sequência de variáveis aleatórias



Lei fraca dos grandes números

Seja X_1, X_2, \dots uma sequência de variáveis aleatórias e consideremos $S_n = X_1 + \dots + X_n$.



Lei fraca dos grandes números

Seja X_1, X_2, \dots uma sequência de variáveis aleatórias e consideremos $S_n = X_1 + \dots + X_n$. Se



Lei fraca dos grandes números

Seja X_1, X_2, \dots uma sequência de variáveis aleatórias e consideremos $S_n = X_1 + \dots + X_n$. Se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Var}(S_n)}{n^2} = 0,$$



Lei fraca dos grandes números

Seja X_1, X_2, \dots uma sequência de variáveis aleatórias e consideremos $S_n = X_1 + \dots + X_n$. Se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Var}(S_n)}{n^2} = 0,$$

então



Lei fraca dos grandes números

Seja X_1, X_2, \dots uma sequência de variáveis aleatórias e consideremos $S_n = X_1 + \dots + X_n$. Se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Var}(S_n)}{n^2} = 0,$$

então

$$\frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{n} \xrightarrow{\text{P}} 0.$$



Lei fraca dos grandes números

Seja X_1, X_2, \dots uma sequência de variáveis aleatórias e consideremos $S_n = X_1 + \dots + X_n$. Se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Var}(S_n)}{n^2} = 0,$$

então

$$\frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{n} \xrightarrow{\text{P}} 0.$$

Este caso,



Lei fraca dos grandes números

Seja X_1, X_2, \dots uma sequência de variáveis aleatórias e consideremos $S_n = X_1 + \dots + X_n$. Se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Var}(S_n)}{n^2} = 0,$$

então

$$\frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{n} \xrightarrow{\text{P}} 0.$$

Este caso, mais geral,



Lei fraca dos grandes números

Seja X_1, X_2, \dots uma sequência de variáveis aleatórias e consideremos $S_n = X_1 + \dots + X_n$. Se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Var}(S_n)}{n^2} = 0,$$

então

$$\frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{n} \xrightarrow{\text{P}} 0.$$

Este caso, mais geral, foi demonstrado por Chebyshev (1867).



Lei fraca dos grandes números

Seja X_1, X_2, \dots uma sequência de variáveis aleatórias e consideremos $S_n = X_1 + \dots + X_n$. Se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Var}(S_n)}{n^2} = 0,$$

então

$$\frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{n} \xrightarrow{\text{P}} 0.$$

Este caso, mais geral, foi demonstrado por Chebyshev (1867).



Roteiro

- 1 Motivação
- 2 Lei fraca dos grandes números
- 3 Lei forte dos grandes números
- 4 Teorema central do limite
- 5 Limites de binomiais para Poisson
- 6 Referências bibliográficas



Lei forte dos grandes números

A lei forte dos grandes números é provavelmente o resultado mais famoso na teoria da probabilidade (Ross, 2010). Ela diz que



Lei forte dos grandes números

A lei forte dos grandes números é provavelmente o resultado mais famoso na teoria da probabilidade (Ross, 2010). Ela diz que a média de uma sequência de variáveis aleatórias



Lei forte dos grandes números

A lei forte dos grandes números é provavelmente o resultado mais famoso na teoria da probabilidade (Ross, 2010). Ela diz que a média de uma sequência de variáveis aleatórias independentes com mesma distribuição converge,



Lei forte dos grandes números

A lei forte dos grandes números é provavelmente o resultado mais famoso na teoria da probabilidade (Ross, 2010). Ela diz que a média de uma sequência de variáveis aleatórias independentes com mesma distribuição converge, com probabilidade 1,



Lei forte dos grandes números

A lei forte dos grandes números é provavelmente o resultado mais famoso na teoria da probabilidade (Ross, 2010). Ela diz que a média de uma sequência de variáveis aleatórias independentes com mesma distribuição converge, com probabilidade 1, para a média daquela distribuição.



Lei forte dos grandes números

A lei forte dos grandes números é provavelmente o resultado mais famoso na teoria da probabilidade (Ross, 2010). Ela diz que a média de uma sequência de variáveis aleatórias independentes com mesma distribuição converge, com probabilidade 1, para a média daquela distribuição.



Lei forte dos grandes números

Seja X_1, X_2, \dots uma sequência de variáveis aleatórias



Lei forte dos grandes números

Seja X_1, X_2, \dots uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas,



Lei forte dos grandes números

Seja X_1, X_2, \dots uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, com média finita,



Lei forte dos grandes números

Seja X_1, X_2, \dots uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, com média finita, ou seja, $\mathbb{E}(X_n) = \mu < \infty$,



Lei forte dos grandes números

Seja X_1, X_2, \dots uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, com média finita, ou seja, $\mathbb{E}(X_n) = \mu < \infty$, $n \geq 1$.



Lei forte dos grandes números

Seja X_1, X_2, \dots uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, com média finita, ou seja, $\mathbb{E}(X_n) = \mu < \infty$, $n \geq 1$.

As somas parciais $S_n = X_1 + \dots + X_n$



Lei forte dos grandes números

Seja X_1, X_2, \dots uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, com média finita, ou seja, $\mathbb{E}(X_n) = \mu < \infty$, $n \geq 1$. As somas parciais $S_n = X_1 + \dots + X_n$ satisfazem



Lei forte dos grandes números

Seja X_1, X_2, \dots uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, com média finita, ou seja, $\mathbb{E}(X_n) = \mu < \infty$, $n \geq 1$. As somas parciais $S_n = X_1 + \dots + X_n$ satisfazem

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\text{qc}} \mu.$$



Lei forte dos grandes números

Seja X_1, X_2, \dots uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, com média finita, ou seja, $\mathbb{E}(X_n) = \mu < \infty$, $n \geq 1$. As somas parciais $S_n = X_1 + \dots + X_n$ satisfazem

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\text{qc}} \mu.$$



Lei forte dos grandes números

A lei forte dos grandes números foi demonstrada por Kolmogorov (1933).



Lei forte dos grandes números

A lei forte dos grandes números foi demonstrada por Kolmogorov (1933).

Antes,



Lei forte dos grandes números

A lei forte dos grandes números foi demonstrada por Kolmogorov (1933).

Antes, a demonstração foi originalmente feita por Borel (1909),



Lei forte dos grandes números

A lei forte dos grandes números foi demonstrada por Kolmogorov (1933).

Antes, a demonstração foi originalmente feita por Borel (1909), para o caso de uma sequência de variáveis aleatórias com distribuição Bernoulli,



Lei forte dos grandes números

A lei forte dos grandes números foi demonstrada por Kolmogorov (1933).

Antes, a demonstração foi originalmente feita por Borel (1909), para o caso de uma sequência de variáveis aleatórias com distribuição Bernoulli, para estas condições,



Lei forte dos grandes números

A lei forte dos grandes números foi demonstrada por Kolmogorov (1933).

Antes, a demonstração foi originalmente feita por Borel (1909), para o caso de uma sequência de variáveis aleatórias com distribuição Bernoulli, para estas condições,

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\text{qc}} p.$$



Lei forte dos grandes números

A lei forte dos grandes números foi demonstrada por Kolmogorov (1933).

Antes, a demonstração foi originalmente feita por Borel (1909), para o caso de uma sequência de variáveis aleatórias com distribuição Bernoulli, para estas condições,

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\text{qc}} p.$$



Roteiro

- 1 Motivação
- 2 Lei fraca dos grandes números
- 3 Lei forte dos grandes números
- 4 Teorema central do limite
- 5 Limites de binomiais para Poisson
- 6 Referências bibliográficas



Teorema central do limite

O teorema central do limite é um dos resultados mais extraordinários na teoria da probabilidade (Ross, 2010). Em linhas gerais,



Teorema central do limite

O teorema central do limite é um dos resultados mais extraordinários na teoria da probabilidade (Ross, 2010). Em linhas gerais, ele diz que a soma de um grande número de variáveis aleatórias independentes



Teorema central do limite

O teorema central do limite é um dos resultados mais extraordinários na teoria da probabilidade (Ross, 2010). Em linhas gerais, ele diz que a soma de um grande número de variáveis aleatórias independentes tem uma distribuição que é aproximadamente normal.



Teorema central do limite

O teorema central do limite é um dos resultados mais extraordinários na teoria da probabilidade (Ross, 2010). Em linhas gerais, ele diz que a soma de um grande número de variáveis aleatórias independentes tem uma distribuição que é aproximadamente normal.



Teorema central do limite

Com isso, ele não somente fornece um método simples para o cálculo de probabilidades aproximadas



Teorema central do limite

Com isso, ele não somente fornece um método simples para o cálculo de probabilidades aproximadas para somas de variáveis aleatórias independentes,



Teorema central do limite

Com isso, ele não somente fornece um método simples para o cálculo de probabilidades aproximadas para somas de variáveis aleatórias independentes, mas também ajuda a explicar o extraordinário fato de que



Teorema central do limite

Com isso, ele não somente fornece um método simples para o cálculo de probabilidades aproximadas para somas de variáveis aleatórias independentes, mas também ajuda a explicar o extraordinário fato de que frequências empíricas de muitas populações naturais



Teorema central do limite

Com isso, ele não somente fornece um método simples para o cálculo de probabilidades aproximadas para somas de variáveis aleatórias independentes, mas também ajuda a explicar o extraordinário fato de que frequências empíricas de muitas populações naturais exibem curvas na forma de um sino



Teorema central do limite

Com isso, ele não somente fornece um método simples para o cálculo de probabilidades aproximadas para somas de variáveis aleatórias independentes, mas também ajuda a explicar o extraordinário fato de que frequências empíricas de muitas populações naturais exibem curvas na forma de um sino (isto é, normais).



Teorema central do limite

Com isso, ele não somente fornece um método simples para o cálculo de probabilidades aproximadas para somas de variáveis aleatórias independentes, mas também ajuda a explicar o extraordinário fato de que frequências empíricas de muitas populações naturais exibem curvas na forma de um sino (isto é, normais).



Teorema central do limite

Seja X_1, X_2, \dots uma sequência de variáveis aleatórias



Teorema central do limite

Seja X_1, X_2, \dots uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas



Teorema central do limite

Seja X_1, X_2, \dots uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com média μ e variância σ^2 .



Teorema central do limite

Seja X_1, X_2, \dots uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com média μ e variância σ^2 . Seja $S_n = X_1 + \dots + X_n$,



Teorema central do limite

Seja X_1, X_2, \dots uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com média μ e variância σ^2 . Seja $S_n = X_1 + \dots + X_n$, então



Teorema central do limite

Seja X_1, X_2, \dots uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com média μ e variância σ^2 . Seja $S_n = X_1 + \dots + X_n$, então

$$\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{d} N(0, 1).$$



Teorema central do limite

Seja X_1, X_2, \dots uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com média μ e variância σ^2 . Seja $S_n = X_1 + \dots + X_n$, então

$$\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{d} N(0, 1).$$



Teorema central do limite

Prova. Seja



Teorema central do limite

Prova. Seja

$$Z_n = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{\sigma\sqrt{n}}.$$



Teorema central do limite

Prova. Seja

$$Z_n = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{\sigma\sqrt{n}}.$$

A função geradora de momentos de Z_n ,



Teorema central do limite

Prova. Seja

$$Z_n = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{\sigma\sqrt{n}}.$$

A função geradora de momentos de Z_n , $M_{Z_n}(t)$, é dada por



Teorema central do limite

Prova. Seja

$$Z_n = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{\sigma\sqrt{n}}.$$

A função geradora de momentos de Z_n , $M_{Z_n}(t)$, é dada por

$$\begin{aligned} M_{Z_n}(t) &= \mathbb{E}(e^{tZ_n}) = \mathbb{E}(\exp\{tZ_n\}) = \mathbb{E}\left(\exp\left\{t\frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{\sigma\sqrt{n}}\right\}\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\exp\left\{\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}(Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n)\right\}\right). \end{aligned}$$



Teorema central do limite

Prova. Seja

$$Z_n = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{\sigma\sqrt{n}}.$$

A função geradora de momentos de Z_n , $M_{Z_n}(t)$, é dada por

$$\begin{aligned} M_{Z_n}(t) &= \mathbb{E}(e^{tZ_n}) = \mathbb{E}(\exp\{tZ_n\}) = \mathbb{E}\left(\exp\left\{t\frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{\sigma\sqrt{n}}\right\}\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\exp\left\{\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}(Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n)\right\}\right). \end{aligned}$$



Teorema central do limite

Dando prosseguimento, nós temos que



Teorema central do limite

Dando prosseguimento, nós temos que

$$\begin{aligned} M_{Z_n}(t) &= \mathbb{E} \left(\exp \left\{ \frac{t}{\sigma\sqrt{n}} Y_1 \right\} \times \cdots \times \exp \left\{ \frac{t}{\sigma\sqrt{n}} Y_n \right\} \right) \\ &\stackrel{\text{Ind.}}{=} \mathbb{E} \left(\exp \left\{ \frac{t}{\sigma\sqrt{n}} Y_1 \right\} \right) \times \cdots \times \mathbb{E} \left(\exp \left\{ \frac{t}{\sigma\sqrt{n}} Y_n \right\} \right) \quad (1) \\ &\stackrel{\text{I.D.}}{=} \left[\mathbb{E} \left(\exp \left\{ \frac{t}{\sigma\sqrt{n}} Y_1 \right\} \right) \right]^n = \left[M_{Y_1} \left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}} \right) \right]^n. \end{aligned}$$



Teorema central do limite

Dando prosseguimento, nós temos que

$$\begin{aligned} M_{Z_n}(t) &= \mathbb{E} \left(\exp \left\{ \frac{t}{\sigma\sqrt{n}} Y_1 \right\} \times \cdots \times \exp \left\{ \frac{t}{\sigma\sqrt{n}} Y_n \right\} \right) \\ &\stackrel{\text{Ind.}}{=} \mathbb{E} \left(\exp \left\{ \frac{t}{\sigma\sqrt{n}} Y_1 \right\} \right) \times \cdots \times \mathbb{E} \left(\exp \left\{ \frac{t}{\sigma\sqrt{n}} Y_n \right\} \right) \quad (1) \\ &\stackrel{\text{I.D.}}{=} \left[\mathbb{E} \left(\exp \left\{ \frac{t}{\sigma\sqrt{n}} Y_1 \right\} \right) \right]^n = \left[M_{Y_1} \left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}} \right) \right]^n. \end{aligned}$$

Ou seja,



Teorema central do limite

Dando prosseguimento, nós temos que

$$\begin{aligned} M_{Z_n}(t) &= \mathbb{E} \left(\exp \left\{ \frac{t}{\sigma\sqrt{n}} Y_1 \right\} \times \cdots \times \exp \left\{ \frac{t}{\sigma\sqrt{n}} Y_n \right\} \right) \\ &\stackrel{\text{Ind.}}{=} \mathbb{E} \left(\exp \left\{ \frac{t}{\sigma\sqrt{n}} Y_1 \right\} \right) \times \cdots \times \mathbb{E} \left(\exp \left\{ \frac{t}{\sigma\sqrt{n}} Y_n \right\} \right) \quad (1) \\ &\stackrel{\text{I.D.}}{=} \left[\mathbb{E} \left(\exp \left\{ \frac{t}{\sigma\sqrt{n}} Y_1 \right\} \right) \right]^n = \left[M_{Y_1} \left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}} \right) \right]^n. \end{aligned}$$

Ou seja, a FGM da VA Z_n ,



Teorema central do limite

Dando prosseguimento, nós temos que

$$\begin{aligned} M_{Z_n}(t) &= \mathbb{E} \left(\exp \left\{ \frac{t}{\sigma\sqrt{n}} Y_1 \right\} \times \cdots \times \exp \left\{ \frac{t}{\sigma\sqrt{n}} Y_n \right\} \right) \\ &\stackrel{\text{Ind.}}{=} \mathbb{E} \left(\exp \left\{ \frac{t}{\sigma\sqrt{n}} Y_1 \right\} \right) \times \cdots \times \mathbb{E} \left(\exp \left\{ \frac{t}{\sigma\sqrt{n}} Y_n \right\} \right) \quad (1) \\ &\stackrel{\text{I.D.}}{=} \left[\mathbb{E} \left(\exp \left\{ \frac{t}{\sigma\sqrt{n}} Y_1 \right\} \right) \right]^n = \left[M_{Y_1} \left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}} \right) \right]^n. \end{aligned}$$

Ou seja, a FGM da VA Z_n , avaliada no ponto t ,



Teorema central do limite

Dando prosseguimento, nós temos que

$$\begin{aligned} M_{Z_n}(t) &= \mathbb{E} \left(\exp \left\{ \frac{t}{\sigma\sqrt{n}} Y_1 \right\} \times \cdots \times \exp \left\{ \frac{t}{\sigma\sqrt{n}} Y_n \right\} \right) \\ &\stackrel{\text{Ind.}}{=} \mathbb{E} \left(\exp \left\{ \frac{t}{\sigma\sqrt{n}} Y_1 \right\} \right) \times \cdots \times \mathbb{E} \left(\exp \left\{ \frac{t}{\sigma\sqrt{n}} Y_n \right\} \right) \quad (1) \\ &\stackrel{\text{I.D.}}{=} \left[\mathbb{E} \left(\exp \left\{ \frac{t}{\sigma\sqrt{n}} Y_1 \right\} \right) \right]^n = \left[M_{Y_1} \left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}} \right) \right]^n. \end{aligned}$$

Ou seja, a FGM da VA Z_n , avaliada no ponto t , pode ser escrita como uma função da FGM da VA $Y_1 = X_1 - \mu$,



Teorema central do limite

Dando prosseguimento, nós temos que

$$\begin{aligned} M_{Z_n}(t) &= \mathbb{E} \left(\exp \left\{ \frac{t}{\sigma\sqrt{n}} Y_1 \right\} \times \cdots \times \exp \left\{ \frac{t}{\sigma\sqrt{n}} Y_n \right\} \right) \\ &\stackrel{\text{Ind.}}{=} \mathbb{E} \left(\exp \left\{ \frac{t}{\sigma\sqrt{n}} Y_1 \right\} \right) \times \cdots \times \mathbb{E} \left(\exp \left\{ \frac{t}{\sigma\sqrt{n}} Y_n \right\} \right) \quad (1) \\ &\stackrel{\text{I.D.}}{=} \left[\mathbb{E} \left(\exp \left\{ \frac{t}{\sigma\sqrt{n}} Y_1 \right\} \right) \right]^n = \left[M_{Y_1} \left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}} \right) \right]^n. \end{aligned}$$

Ou seja, a FGM da VA Z_n , avaliada no ponto t , pode ser escrita como uma função da FGM da VA $Y_1 = X_1 - \mu$, avaliada no ponto $t/\sigma\sqrt{n}$.



Teorema central do limite

Dando prosseguimento, nós temos que

$$\begin{aligned} M_{Z_n}(t) &= \mathbb{E} \left(\exp \left\{ \frac{t}{\sigma\sqrt{n}} Y_1 \right\} \times \cdots \times \exp \left\{ \frac{t}{\sigma\sqrt{n}} Y_n \right\} \right) \\ &\stackrel{\text{Ind.}}{=} \mathbb{E} \left(\exp \left\{ \frac{t}{\sigma\sqrt{n}} Y_1 \right\} \right) \times \cdots \times \mathbb{E} \left(\exp \left\{ \frac{t}{\sigma\sqrt{n}} Y_n \right\} \right) \quad (1) \\ &\stackrel{\text{I.D.}}{=} \left[\mathbb{E} \left(\exp \left\{ \frac{t}{\sigma\sqrt{n}} Y_1 \right\} \right) \right]^n = \left[M_{Y_1} \left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}} \right) \right]^n. \end{aligned}$$

Ou seja, a FGM da VA Z_n , avaliada no ponto t , pode ser escrita como uma função da FGM da VA $Y_1 = X_1 - \mu$, avaliada no ponto $t/\sigma\sqrt{n}$.



Teorema central do limite

Antes de nós continuarmos, nós iremos discutir algumas propriedades da FGM de $Y_1 = X_1 - \mu$



Teorema central do limite

Antes de nós continuarmos, nós iremos discutir algumas propriedades da FGM de $Y_1 = X_1 - \mu$ e, por simplicidade, avaliada no ponto t .



Teorema central do limite

Antes de nós continuarmos, nós iremos discutir algumas propriedades da FGM de $Y_1 = X_1 - \mu$ e, por simplicidade, avaliada no ponto t . Usando série de Taylor (1715) até o primeiro termo



Teorema central do limite

Antes de nós continuarmos, nós iremos discutir algumas propriedades da FGM de $Y_1 = X_1 - \mu$ e, por simplicidade, avaliada no ponto t . Usando série de Taylor (1715) até o primeiro termo e em torno de $t = 0$,



Teorema central do limite

Antes de nós continuarmos, nós iremos discutir algumas propriedades da FGM de $Y_1 = X_1 - \mu$ e, por simplicidade, avaliada no ponto t . Usando série de Taylor (1715) até o primeiro termo e em torno de $t = 0$, nós temos que



Teorema central do limite

Antes de nós continuarmos, nós iremos discutir algumas propriedades da FGM de $Y_1 = X_1 - \mu$ e, por simplicidade, avaliada no ponto t . Usando série de Taylor (1715) até o primeiro termo e em torno de $t = 0$, nós temos que

$$M_{Y_1}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{M_{Y_1}^{(n)}(0)}{n!} t^n = M_{Y_1}^{(0)}(0) + t M_{Y_1}^{(1)}(0) + \frac{t^2}{2} M_{Y_1}^{(2)}(s), \quad (2)$$



Teorema central do limite

Antes de nós continuarmos, nós iremos discutir algumas propriedades da FGM de $Y_1 = X_1 - \mu$ e, por simplicidade, avaliada no ponto t . Usando série de Taylor (1715) até o primeiro termo e em torno de $t = 0$, nós temos que

$$M_{Y_1}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{M_{Y_1}^{(n)}(0)}{n!} t^n = M_{Y_1}^{(0)}(0) + t M_{Y_1}^{(1)}(0) + \frac{t^2}{2} M_{Y_1}^{(2)}(s), \quad (2)$$

em que $0 < s < t$



Teorema central do limite

Antes de nós continuarmos, nós iremos discutir algumas propriedades da FGM de $Y_1 = X_1 - \mu$ e, por simplicidade, avaliada no ponto t . Usando série de Taylor (1715) até o primeiro termo e em torno de $t = 0$, nós temos que

$$M_{Y_1}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{M_{Y_1}^{(n)}(0)}{n!} t^n = M_{Y_1}^{(0)}(0) + t M_{Y_1}^{(1)}(0) + \frac{t^2}{2} M_{Y_1}^{(2)}(s), \quad (2)$$

em que $0 < s < t$ e $M_{Y_1}^{(n)}(\cdot)$ é a n -ésima derivada de $M_{Y_1}(\cdot)$.



Teorema central do limite

Antes de nós continuarmos, nós iremos discutir algumas propriedades da FGM de $Y_1 = X_1 - \mu$ e, por simplicidade, avaliada no ponto t . Usando série de Taylor (1715) até o primeiro termo e em torno de $t = 0$, nós temos que

$$M_{Y_1}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{M_{Y_1}^{(n)}(0)}{n!} t^n = M_{Y_1}^{(0)}(0) + t M_{Y_1}^{(1)}(0) + \frac{t^2}{2} M_{Y_1}^{(2)}(s), \quad (2)$$

em que $0 < s < t$ e $M_{Y_1}^{(n)}(\cdot)$ é a n -ésima derivada de $M_{Y_1}(\cdot)$.



Teorema central do limite

Notem que, pelas propriedades da FGM,



Teorema central do limite

Notem que, pelas propriedades da FGM, nós temos que



Teorema central do limite

Notem que, pelas propriedades da FGM, nós temos que

$$M_{Y_1}^{(0)}(0) = M_{Y_1}(0) = 1,$$

$$M_{Y_1}^{(1)}(0) = \mathbb{E}(Y_1) = \mathbb{E}(X_1 - \mu) = 0,$$

$$M_{Y_1}^{(2)}(0) = \mathbb{E}(Y_1^2) = \mathbb{E}[(X_1 - \mu)^2] = \sigma^2.$$



Teorema central do limite

Notem que, pelas propriedades da FGM, nós temos que

$$M_{Y_1}^{(0)}(0) = M_{Y_1}(0) = 1,$$

$$M_{Y_1}^{(1)}(0) = \mathbb{E}(Y_1) = \mathbb{E}(X_1 - \mu) = 0,$$

$$M_{Y_1}^{(2)}(0) = \mathbb{E}(Y_1^2) = \mathbb{E}[(X_1 - \mu)^2] = \sigma^2.$$



Teorema central do limite

Usando os dois primeiros resultados anteriores, nós podemos simplificar (2),



Teorema central do limite

Usando os dois primeiros resultados anteriores, nós podemos simplificar (2), da seguinte forma



Teorema central do limite

Usando os dois primeiros resultados anteriores, nós podemos simplificar (2), da seguinte forma

$$M_{Y_1}(t) = 1 + \frac{t^2}{2} M_{Y_1}^{(2)}(s).$$



Teorema central do limite

Usando os dois primeiros resultados anteriores, nós podemos simplificar (2), da seguinte forma

$$M_{Y_1}(t) = 1 + \frac{t^2}{2} M_{Y_1}^{(2)}(s).$$

Somando e subtraindo $\sigma^2 t^2/2$ na equação acima,



Teorema central do limite

Usando os dois primeiros resultados anteriores, nós podemos simplificar (2), da seguinte forma

$$M_{Y_1}(t) = 1 + \frac{t^2}{2} M_{Y_1}^{(2)}(s).$$

Somando e subtraindo $\sigma^2 t^2/2$ na equação acima,

$$\begin{aligned} M_{Y_1}(t) &= 1 + \frac{\sigma^2 t^2}{2} - \frac{\sigma^2 t^2}{2} + \frac{t^2}{2} M_{Y_1}^{(2)}(s) \\ &= 1 + \frac{\sigma^2 t^2}{2} + \left[M_{Y_1}^{(2)}(s) - \sigma^2 \right] \frac{t^2}{2}. \end{aligned} \tag{3}$$



Teorema central do limite

Usando os dois primeiros resultados anteriores, nós podemos simplificar (2), da seguinte forma

$$M_{Y_1}(t) = 1 + \frac{t^2}{2} M_{Y_1}^{(2)}(s).$$

Somando e subtraindo $\sigma^2 t^2/2$ na equação acima,

$$\begin{aligned} M_{Y_1}(t) &= 1 + \frac{\sigma^2 t^2}{2} - \frac{\sigma^2 t^2}{2} + \frac{t^2}{2} M_{Y_1}^{(2)}(s) \\ &= 1 + \frac{\sigma^2 t^2}{2} + \left[M_{Y_1}^{(2)}(s) - \sigma^2 \right] \frac{t^2}{2}. \end{aligned} \tag{3}$$



Teorema central do limite

A equação (3) é a FGM de Y_1 . Como visto anteriormente,



Teorema central do limite

A equação (3) é a FGM de Y_1 . Como visto anteriormente, a FGM de Z_n é uma função da FGM de Y_1 ,



Teorema central do limite

A equação (3) é a FGM de Y_1 . Como visto anteriormente, a FGM de Z_n é uma função da FGM de Y_1 , avaliada em $t/\sigma\sqrt{n}$.



Teorema central do limite

A equação (3) é a FGM de Y_1 . Como visto anteriormente, a FGM de Z_n é uma função da FGM de Y_1 , avaliada em $t/\sigma\sqrt{n}$. Substituindo (3),



Teorema central do limite

A equação (3) é a FGM de Y_1 . Como visto anteriormente, a FGM de Z_n é uma função da FGM de Y_1 , avaliada em $t/\sigma\sqrt{n}$. Substituindo (3), avaliando no ponto $t/\sigma\sqrt{n}$,



Teorema central do limite

A equação (3) é a FGM de Y_1 . Como visto anteriormente, a FGM de Z_n é uma função da FGM de Y_1 , avaliada em $t/\sigma\sqrt{n}$. Substituindo (3), avaliando no ponto $t/\sigma\sqrt{n}$, em (1),



Teorema central do limite

A equação (3) é a FGM de Y_1 . Como visto anteriormente, a FGM de Z_n é uma função da FGM de Y_1 , avaliada em $t/\sigma\sqrt{n}$. Substituindo (3), avaliando no ponto $t/\sigma\sqrt{n}$, em (1), nós temos que



Teorema central do limite

A equação (3) é a FGM de Y_1 . Como visto anteriormente, a FGM de Z_n é uma função da FGM de Y_1 , avaliada em $t/\sigma\sqrt{n}$. Substituindo (3), avaliando no ponto $t/\sigma\sqrt{n}$, em (1), nós temos que

$$M_{Z_n}(t) = \left\{ 1 + \frac{t^2}{2n} + \left[M_{Y_1}^{(2)}(s) - \sigma^2 \right] \frac{t^2}{2n\sigma^2} \right\}^n, \quad (4)$$



Teorema central do limite

A equação (3) é a FGM de Y_1 . Como visto anteriormente, a FGM de Z_n é uma função da FGM de Y_1 , avaliada em $t/\sigma\sqrt{n}$. Substituindo (3), avaliando no ponto $t/\sigma\sqrt{n}$, em (1), nós temos que

$$M_{Z_n}(t) = \left\{ 1 + \frac{t^2}{2n} + \left[M_{Y_1}^{(2)}(s) - \sigma^2 \right] \frac{t^2}{2n\sigma^2} \right\}^n, \quad (4)$$

em que $0 < s < t/\sigma\sqrt{n}$



Teorema central do limite

A equação (3) é a FGM de Y_1 . Como visto anteriormente, a FGM de Z_n é uma função da FGM de Y_1 , avaliada em $t/\sigma\sqrt{n}$. Substituindo (3), avaliando no ponto $t/\sigma\sqrt{n}$, em (1), nós temos que

$$M_{Z_n}(t) = \left\{ 1 + \frac{t^2}{2n} + \left[M_{Y_1}^{(2)}(s) - \sigma^2 \right] \frac{t^2}{2n\sigma^2} \right\}^n, \quad (4)$$

em que $0 < s < t/\sigma\sqrt{n}$ e $-h\sigma\sqrt{n} < t < h\sigma\sqrt{n}$.



Teorema central do limite

A equação (3) é a FGM de Y_1 . Como visto anteriormente, a FGM de Z_n é uma função da FGM de Y_1 , avaliada em $t/\sigma\sqrt{n}$. Substituindo (3), avaliando no ponto $t/\sigma\sqrt{n}$, em (1), nós temos que

$$M_{Z_n}(t) = \left\{ 1 + \frac{t^2}{2n} + \left[M_{Y_1}^{(2)}(s) - \sigma^2 \right] \frac{t^2}{2n\sigma^2} \right\}^n, \quad (4)$$

em que $0 < s < t/\sigma\sqrt{n}$ e $-h\sigma\sqrt{n} < t < h\sigma\sqrt{n}$.



Teorema central do limite

Para $n \rightarrow \infty$ segue-se que



Teorema central do limite

Para $n \rightarrow \infty$ segue-se que $s \rightarrow 0$



Teorema central do limite

Para $n \rightarrow \infty$ segue-se que $s \rightarrow 0$ e como $M_{Y_1}^{(2)}$ é contínua na origem,



Teorema central do limite

Para $n \rightarrow \infty$ segue-se que $s \rightarrow 0$ e como $M_{Y_1}^{(2)}$ é contínua na origem,

$$\lim_{s \rightarrow 0} = \left[M_{Y_1}^{(2)}(s) - \sigma^2 \right] = 0. \quad (5)$$



Teorema central do limite

Para $n \rightarrow \infty$ segue-se que $s \rightarrow 0$ e como $M_{Y_1}^{(2)}$ é contínua na origem,

$$\lim_{s \rightarrow 0} \left[M_{Y_1}^{(2)}(s) - \sigma^2 \right] = 0. \quad (5)$$

Lembrando o seguinte resultado do cálculo,



Teorema central do limite

Para $n \rightarrow \infty$ segue-se que $s \rightarrow 0$ e como $M_{Y_1}^{(2)}$ é contínua na origem,

$$\lim_{s \rightarrow 0} = \left[M_{Y_1}^{(2)}(s) - \sigma^2 \right] = 0. \quad (5)$$

Lembrando o seguinte resultado do cálculo,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} = \left(1 + \frac{a_n}{n} \right)^n = e^a, \quad (6)$$



Teorema central do limite

Para $n \rightarrow \infty$ segue-se que $s \rightarrow 0$ e como $M_{Y_1}^{(2)}$ é contínua na origem,

$$\lim_{s \rightarrow 0} \left[M_{Y_1}^{(2)}(s) - \sigma^2 \right] = 0. \quad (5)$$

Lembrando o seguinte resultado do cálculo,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a_n}{n} \right)^n = e^a, \quad (6)$$

quando $a_n \rightarrow a$.



Teorema central do limite

Para $n \rightarrow \infty$ segue-se que $s \rightarrow 0$ e como $M_{Y_1}^{(2)}$ é contínua na origem,

$$\lim_{s \rightarrow 0} \left[M_{Y_1}^{(2)}(s) - \sigma^2 \right] = 0. \quad (5)$$

Lembrando o seguinte resultado do cálculo,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a_n}{n} \right)^n = e^a, \quad (6)$$

quando $a_n \rightarrow a$.



Teorema central do limite

Por (5) e (6), nós concluímos a partir de (4) que



Teorema central do limite

Por (5) e (6), nós concluímos a partir de (4) que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M_{Z_n}(t) = e^{t^2/2},$$



Teorema central do limite

Por (5) e (6), nós concluímos a partir de (4) que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M_{Z_n}(t) = e^{t^2/2},$$

ou seja,



Teorema central do limite

Por (5) e (6), nós concluímos a partir de (4) que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M_{Z_n}(t) = e^{t^2/2},$$

ou seja, quando $n \rightarrow \infty$,



Teorema central do limite

Por (5) e (6), nós concluímos a partir de (4) que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M_{Z_n}(t) = e^{t^2/2},$$

ou seja, quando $n \rightarrow \infty$, o limite da FGM de Z_n



Teorema central do limite

Por (5) e (6), nós concluímos a partir de (4) que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M_{Z_n}(t) = e^{t^2/2},$$

ou seja, quando $n \rightarrow \infty$, o limite da FGM de Z_n é a FGM de uma VA com distribuição normal padrão.



Teorema central do limite

Por (5) e (6), nós concluímos a partir de (4) que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M_{Z_n}(t) = e^{t^2/2},$$

ou seja, quando $n \rightarrow \infty$, o limite da FGM de Z_n é a FGM de uma VA com distribuição normal padrão.

Ufa!!!



Teorema central do limite

Por (5) e (6), nós concluímos a partir de (4) que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M_{Z_n}(t) = e^{t^2/2},$$

ou seja, quando $n \rightarrow \infty$, o limite da FGM de Z_n é a FGM de uma VA com distribuição normal padrão.

Ufa!!!



Teorema central do limite

O teorema central do limite foi demonstrado por Lyapunov (1901).



Teorema central do limite

O teorema central do limite foi demonstrado por Lyapunov (1901). Antes,



Teorema central do limite

O teorema central do limite foi demonstrado por Lyapunov (1901). Antes, a demonstração foi originalmente feita por de Moivre (1733),



Teorema central do limite

O teorema central do limite foi demonstrado por Lyapunov (1901). Antes, a demonstração foi originalmente feita por de Moivre (1733), para o caso de uma sequência de variáveis aleatórias com distribuição Bernoulli,



Teorema central do limite

O teorema central do limite foi demonstrado por Lyapunov (1901). Antes, a demonstração foi originalmente feita por de Moivre (1733), para o caso de uma sequência de variáveis aleatórias com distribuição Bernoulli, com $p = 1/2$.



Teorema central do limite

O teorema central do limite foi demonstrado por Lyapunov (1901). Antes, a demonstração foi originalmente feita por de Moivre (1733), para o caso de uma sequência de variáveis aleatórias com distribuição Bernoulli, com $p = 1/2$. Laplace (1812) estendeu este caso para um p arbitrário,



Teorema central do limite

O teorema central do limite foi demonstrado por Lyapunov (1901). Antes, a demonstração foi originalmente feita por de Moivre (1733), para o caso de uma sequência de variáveis aleatórias com distribuição Bernoulli, com $p = 1/2$. Laplace (1812) estendeu este caso para um p arbitrário, nestas condições,



Teorema central do limite

O teorema central do limite foi demonstrado por Lyapunov (1901). Antes, a demonstração foi originalmente feita por de Moivre (1733), para o caso de uma sequência de variáveis aleatórias com distribuição Bernoulli, com $p = 1/2$. Laplace (1812) estendeu este caso para um p arbitrário, nestas condições,

$$\frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \xrightarrow{d} N(0, 1).$$



Teorema central do limite

O teorema central do limite foi demonstrado por Lyapunov (1901). Antes, a demonstração foi originalmente feita por de Moivre (1733), para o caso de uma sequência de variáveis aleatórias com distribuição Bernoulli, com $p = 1/2$. Laplace (1812) estendeu este caso para um p arbitrário, nestas condições,

$$\frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \xrightarrow{d} N(0, 1).$$



Teorema central do limite

Seja X_1, X_2, \dots uma sequência de variáveis aleatórias independentes,



Teorema central do limite

Seja X_1, X_2, \dots uma sequência de variáveis aleatórias independentes, com $\mathbb{E}(X_i) = \mu_i$ e $\text{Var}(X_i) = \sigma_i^2$.



Teorema central do limite

Seja X_1, X_2, \dots uma sequência de variáveis aleatórias independentes, com $\mathbb{E}(X_i) = \mu_i$ e $\text{Var}(X_i) = \sigma_i^2$. Se (a) as variáveis aleatórias X_i forem limitadas uniformemente,



Teorema central do limite

Seja X_1, X_2, \dots uma sequência de variáveis aleatórias independentes, com $\mathbb{E}(X_i) = \mu_i$ e $\text{Var}(X_i) = \sigma_i^2$. Se (a) as variáveis aleatórias X_i forem limitadas uniformemente, isto é, para algum M ,



Teorema central do limite

Seja X_1, X_2, \dots uma sequência de variáveis aleatórias independentes, com $\mathbb{E}(X_i) = \mu_i$ e $\text{Var}(X_i) = \sigma_i^2$. Se (a) as variáveis aleatórias X_i forem limitadas uniformemente, isto é, para algum M , $\mathbb{P}(|X_i| < M) = 1$,



Teorema central do limite

Seja X_1, X_2, \dots uma sequência de variáveis aleatórias independentes, com $\mathbb{E}(X_i) = \mu_i$ e $\text{Var}(X_i) = \sigma_i^2$. Se (a) as variáveis aleatórias X_i forem limitadas uniformemente, isto é, para algum M , $\mathbb{P}(|X_i| < M) = 1$, para todo i ,

Teorema central do limite

Seja X_1, X_2, \dots uma sequência de variáveis aleatórias independentes, com $\mathbb{E}(X_i) = \mu_i$ e $\text{Var}(X_i) = \sigma_i^2$. Se (a) as variáveis aleatórias X_i forem limitadas uniformemente, isto é, para algum M , $\mathbb{P}(|X_i| < M) = 1$, para todo i , e (b) $\sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i^2 = \infty$,



Teorema central do limite

Seja X_1, X_2, \dots uma sequência de variáveis aleatórias independentes, com $\mathbb{E}(X_i) = \mu_i$ e $\text{Var}(X_i) = \sigma_i^2$. Se (a) as variáveis aleatórias X_i forem limitadas uniformemente, isto é, para algum M , $\mathbb{P}(|X_i| < M) = 1$, para todo i , e (b) $\sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i^2 = \infty$, então

Teorema central do limite

Seja X_1, X_2, \dots uma sequência de variáveis aleatórias independentes, com $\mathbb{E}(X_i) = \mu_i$ e $\text{Var}(X_i) = \sigma_i^2$. Se (a) as variáveis aleatórias X_i forem limitadas uniformemente, isto é, para algum M , $\mathbb{P}(|X_i| < M) = 1$, para todo i , e (b) $\sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i^2 = \infty$, então

$$\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu_i)}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \sigma_i^2}} \xrightarrow{d} N(0, 1).$$



Teorema central do limite

Seja X_1, X_2, \dots uma sequência de variáveis aleatórias independentes, com $\mathbb{E}(X_i) = \mu_i$ e $\text{Var}(X_i) = \sigma_i^2$. Se (a) as variáveis aleatórias X_i forem limitadas uniformemente, isto é, para algum M , $\mathbb{P}(|X_i| < M) = 1$, para todo i , e (b) $\sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i^2 = \infty$, então

$$\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu_i)}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \sigma_i^2}} \xrightarrow{d} N(0, 1).$$

Resultado demonstrado por Lindeberg (1922).



Teorema central do limite

Seja X_1, X_2, \dots uma sequência de variáveis aleatórias independentes, com $\mathbb{E}(X_i) = \mu_i$ e $\text{Var}(X_i) = \sigma_i^2$. Se (a) as variáveis aleatórias X_i forem limitadas uniformemente, isto é, para algum M , $\mathbb{P}(|X_i| < M) = 1$, para todo i , e (b) $\sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i^2 = \infty$, então

$$\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu_i)}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \sigma_i^2}} \xrightarrow{d} N(0, 1).$$

Resultado demonstrado por Lindeberg (1922).



Roteiro

- 1 Motivação
- 2 Lei fraca dos grandes números
- 3 Lei forte dos grandes números
- 4 Teorema central do limite
- 5 Limites de binomiais para Poisson
- 6 Referências bibliográficas



Limites de binomiais para Poisson

Se $X_n \sim \text{binomial}(n, p_n)$, $n \geq 1$



Limites de binomiais para Poisson

Se $X_n \sim \text{binomial}(n, p_n)$, $n \geq 1$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} np_n = \lambda > 0$,



Limites de binomiais para Poisson

Se $X_n \sim \text{binomial}(n, p_n)$, $n \geq 1$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} np_n = \lambda > 0$, então

$$X_n \xrightarrow{d} \text{Poisson}(\lambda).$$



Limites de binomiais para Poisson

Se $X_n \sim \text{binomial}(n, p_n)$, $n \geq 1$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} np_n = \lambda > 0$, então

$$X_n \xrightarrow{d} \text{Poisson}(\lambda).$$



Roteiro

- 1 Motivação
- 2 Lei fraca dos grandes números
- 3 Lei forte dos grandes números
- 4 Teorema central do limite
- 5 Limites de binomiais para Poisson
- 6 Referências bibliográficas



Referências bibliográficas I

Bernoulli, J. (1713). *Ars conjectandi*. Basel: Thurneysen Brothers.

Borel, M. E. (1909). Les probabilités dénombrables et leurs applications arithmétiques. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo* 27(1), 247–271.

Chebyshev, P. (1867). Des valeurs moyennes. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* 2e série 12, 177–184.

de Moivre, A. (1733). *Approximatio ad summam terminorum binomii $(a + b)^n$ in seriem expansi*.



Referências bibliográficas II

Khinchine, A. Y. (1929). Sur la loi des grands nombres. *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* 189, 477–479.

Kolmogorov, A. N. (1933). *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*. Berlin: Springer.

Laplace, P.-S. (1812). *Théorie analytique des probabilités*. Paris: Courcier.

Lindeberg, J. W. (1922). Eine neue herleitung des exponentialgesetzes in der wahrscheinlichkeitsrechnung. *Mathematische Zeitschrif* 15, 211–225.



Referências bibliográficas III

- Lyapunov, A. M. (1901). Nouvelle forme du théorème sur la limite de probabilité. *Mémoires de l'Académie Impériale des Sciences de St.-Pétersbourg VIIe Série, Classe Physico-Mathématique* 12, 1–24.
- Ross, S. (2010). *Probabilidade: um curso moderno com aplicações* (8 ed.). Porto Alegre: Bookman.
- Taylor, B. (1715). *Methodus Incrementorum Directa et Inversa*. Londini: Typis Pearsonianis prostant apud Gul. Innys ad Insignia Principis in Coemeterio Paulino.



Obrigado!

✉ tiago.magalhaes@ufjf.br

✉ ufjf.br/tiago_magalhaes

🌐 Departamento de Estatística, Sala 319

