

# Teoremas limites

Tiago M. Magalhães

Departamento de Estatística - ICE-UFJF

Juiz de Fora, 15 de outubro de 2025



# Roteiro

- 1 Motivação
- 2 Lei fraca dos grandes números
- 3 Lei forte dos grandes números
- 4 Teorema central do limite
- 5 Limites de binomiais para Poisson
- 6 Referências bibliográficas



# Roteiro

- 1 Motivação
- 2 Lei fraca dos grandes números
- 3 Lei forte dos grandes números
- 4 Teorema central do limite
- 5 Limites de binomiais para Poisson
- 6 Referências bibliográficas



# Motivação

Os mais importantes resultados teóricos na teoria da probabilidade



# Motivação

Os mais importantes resultados teóricos na teoria da probabilidade são os teoremas limites



# Motivação

Os mais importantes resultados teóricos na teoria da probabilidade são os teoremas limites (Ross, 2010).



# Motivação

Os mais importantes resultados teóricos na teoria da probabilidade são os teoremas limites (Ross, 2010). Destes,



# Motivação

Os mais importantes resultados teóricos na teoria da probabilidade são os teoremas limites (Ross, 2010). Destes, os mais importantes





# Motivação

Os mais importantes resultados teóricos na teoria da probabilidade são os teoremas limites (Ross, 2010). Destes, os mais importantes são as leis dos grandes números



# Motivação

Os mais importantes resultados teóricos na teoria da probabilidade são os teoremas limites (Ross, 2010). Destes, os mais importantes são as **leis dos grandes números** e os **teoremas centrais do limite**.



# Motivação

Os mais importantes resultados teóricos na teoria da probabilidade são os teoremas limites (Ross, 2010). Destes, os mais importantes são as **leis dos grandes números** e os **teoremas centrais do limite**.



# Motivação

Usualmente, teoremas são considerados **leis de grandes números**



# Motivação

Usualmente, teoremas são considerados **leis de grandes números** se estiverem interessados em enunciar condições



# Motivação

Usualmente, teoremas são considerados **leis de grandes números** se estiverem interessados em enunciar condições nas quais a média de uma sequência de variáveis aleatórias



# Motivação

Usualmente, teoremas são considerados **leis de grandes números** se estiverem interessados em enunciar condições nas quais a média de uma sequência de variáveis aleatórias converge (de alguma forma) para a média esperada.



# Motivação

Usualmente, teoremas são considerados **leis de grandes números** se estiverem interessados em enunciar condições nas quais a média de uma sequência de variáveis aleatórias converge (de alguma forma) para a média esperada.





# Motivação

Por outro lado, **teoremas centrais do limite** estão interessados em determinar condições



# Motivação

Por outro lado, **teoremas centrais do limite** estão interessados em determinar condições nas quais a soma de um grande número de variáveis aleatórias



# Motivação

Por outro lado, **teoremas centrais do limite** estão interessados em determinar condições nas quais a soma de um grande número de variáveis aleatórias possui uma distribuição de probabilidade



# Motivação

Por outro lado, **teoremas centrais do limite** estão interessados em determinar condições nas quais a soma de um grande número de variáveis aleatórias possui uma distribuição de probabilidade que é aproximadamente normal.



# Motivação

Por outro lado, **teoremas centrais do limite** estão interessados em determinar condições nas quais a soma de um grande número de variáveis aleatórias possui uma distribuição de probabilidade que é aproximadamente normal.



# Roteiro

- 1 Motivação
- 2 Lei fraca dos grandes números
- 3 Lei forte dos grandes números
- 4 Teorema central do limite
- 5 Limites de binomiais para Poisson
- 6 Referências bibliográficas



# Lei fraca dos grandes números

Seja  $X_1, X_2, \dots$  uma sequência de variáveis aleatórias



# Lei fraca dos grandes números

Seja  $X_1, X_2, \dots$  uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas,





# Lei fraca dos grandes números

Seja  $X_1, X_2, \dots$  uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, com média finita,



# Lei fraca dos grandes números

Seja  $X_1, X_2, \dots$  uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, com média finita, isto é,  $\mathbb{E}(X_n) = \mu < \infty$ ,



# Lei fraca dos grandes números

Seja  $X_1, X_2, \dots$  uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, com média finita, isto é,  $\mathbb{E}(X_n) = \mu < \infty$ ,  $n \geq 1$ .



# Lei fraca dos grandes números

Seja  $X_1, X_2, \dots$  uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, com média finita, isto é,  $\mathbb{E}(X_n) = \mu < \infty$ ,  $n \geq 1$ .

As somas parciais  $S_n = X_1 + \dots + X_n$



# Lei fraca dos grandes números

Seja  $X_1, X_2, \dots$  uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, com média finita, isto é,  $\mathbb{E}(X_n) = \mu < \infty$ ,  $n \geq 1$ .

As somas parciais  $S_n = X_1 + \dots + X_n$  satisfazem



# Lei fraca dos grandes números

Seja  $X_1, X_2, \dots$  uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, com média finita, isto é,  $\mathbb{E}(X_n) = \mu < \infty$ ,  $n \geq 1$ .

As somas parciais  $S_n = X_1 + \dots + X_n$  satisfazem

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\text{p}} \mu.$$



# Lei fraca dos grandes números

Seja  $X_1, X_2, \dots$  uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, com média finita, isto é,  $\mathbb{E}(X_n) = \mu < \infty$ ,  $n \geq 1$ .

As somas parciais  $S_n = X_1 + \dots + X_n$  satisfazem

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{p} \mu.$$

Prova:



# Lei fraca dos grandes números

Seja  $X_1, X_2, \dots$  uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, com média finita, isto é,  $\mathbb{E}(X_n) = \mu < \infty$ ,  $n \geq 1$ .

As somas parciais  $S_n = X_1 + \dots + X_n$  satisfazem

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{p} \mu.$$

**Prova:** ver exercício 2, da lista 13.





# Lei fraca dos grandes números

Seja  $X_1, X_2, \dots$  uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, com média finita, isto é,  $\mathbb{E}(X_n) = \mu < \infty$ ,  $n \geq 1$ .

As somas parciais  $S_n = X_1 + \dots + X_n$  satisfazem

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{p} \mu.$$

**Prova:** ver exercício 2, da lista 13.



# Lei fraca dos grandes números

A lei fraca dos grandes números foi demonstrada por Khinchine (1929).



# Lei fraca dos grandes números

A lei fraca dos grandes números foi demonstrada por Khinchine (1929).

Antes,



# Lei fraca dos grandes números

A lei fraca dos grandes números foi demonstrada por Khinchine (1929).  
Antes, a demonstração foi originalmente feita por Bernoulli (1713),



# Lei fraca dos grandes números

A lei fraca dos grandes números foi demonstrada por Khinchine (1929). Antes, a demonstração foi originalmente feita por Bernoulli (1713), para o caso de uma sequência de variáveis aleatórias com distribuição Bernoulli,



# Lei fraca dos grandes números

A lei fraca dos grandes números foi demonstrada por Khinchine (1929). Antes, a demonstração foi originalmente feita por Bernoulli (1713), para o caso de uma sequência de variáveis aleatórias com distribuição Bernoulli, para estas condições,



# Lei fraca dos grandes números

A lei fraca dos grandes números foi demonstrada por Khinchine (1929). Antes, a demonstração foi originalmente feita por Bernoulli (1713), para o caso de uma sequência de variáveis aleatórias com distribuição Bernoulli, para estas condições,

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{p} p.$$



# Lei fraca dos grandes números

A lei fraca dos grandes números foi demonstrada por Khinchine (1929). Antes, a demonstração foi originalmente feita por Bernoulli (1713), para o caso de uma sequência de variáveis aleatórias com distribuição Bernoulli, para estas condições,

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{p} p.$$





# Lei fraca dos grandes números

Seja  $X_1, X_2, \dots$  uma sequência de variáveis aleatórias



# Lei fraca dos grandes números

Seja  $X_1, X_2, \dots$  uma sequência de variáveis aleatórias e consideremos  $S_n = X_1 + \dots + X_n$ .



# Lei fraca dos grandes números

Seja  $X_1, X_2, \dots$  uma sequência de variáveis aleatórias e consideremos  $S_n = X_1 + \dots + X_n$ . Se



# Lei fraca dos grandes números

Seja  $X_1, X_2, \dots$  uma sequência de variáveis aleatórias e consideremos  $S_n = X_1 + \dots + X_n$ . Se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Var}(S_n)}{n^2} = 0,$$

# Lei fraca dos grandes números

Seja  $X_1, X_2, \dots$  uma sequência de variáveis aleatórias e consideremos  $S_n = X_1 + \dots + X_n$ . Se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Var}(S_n)}{n^2} = 0,$$

então



# Lei fraca dos grandes números

Seja  $X_1, X_2, \dots$  uma sequência de variáveis aleatórias e consideremos  $S_n = X_1 + \dots + X_n$ . Se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Var}(S_n)}{n^2} = 0,$$

então

$$\frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{n} \xrightarrow{\text{p}} 0.$$



# Lei fraca dos grandes números

Seja  $X_1, X_2, \dots$  uma sequência de variáveis aleatórias e consideremos  $S_n = X_1 + \dots + X_n$ . Se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Var}(S_n)}{n^2} = 0,$$

então

$$\frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{n} \xrightarrow{p} 0.$$

Este caso,



# Lei fraca dos grandes números

Seja  $X_1, X_2, \dots$  uma sequência de variáveis aleatórias e consideremos  $S_n = X_1 + \dots + X_n$ . Se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Var}(S_n)}{n^2} = 0,$$

então

$$\frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{n} \xrightarrow{p} 0.$$

Este caso, mais geral,





# Lei fraca dos grandes números

Seja  $X_1, X_2, \dots$  uma sequência de variáveis aleatórias e consideremos  $S_n = X_1 + \dots + X_n$ . Se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Var}(S_n)}{n^2} = 0,$$

então

$$\frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{n} \xrightarrow{p} 0.$$

Este caso, mais geral, foi demonstrado por Chebyshev (1867).



# Lei fraca dos grandes números

Seja  $X_1, X_2, \dots$  uma sequência de variáveis aleatórias e consideremos  $S_n = X_1 + \dots + X_n$ . Se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Var}(S_n)}{n^2} = 0,$$

então

$$\frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{n} \xrightarrow{\text{p}} 0.$$

Este caso, mais geral, foi demonstrado por Chebyshev (1867).



# Roteiro

- 1 Motivação
- 2 Lei fraca dos grandes números
- 3 Lei forte dos grandes números**
- 4 Teorema central do limite
- 5 Limites de binomiais para Poisson
- 6 Referências bibliográficas



# Lei forte dos grandes números

A lei forte dos grandes números é provavelmente o resultado mais famoso na teoria da probabilidade (Ross, 2010). Ela diz que



# Lei forte dos grandes números

A lei forte dos grandes números é provavelmente o resultado mais famoso na teoria da probabilidade (Ross, 2010). Ela diz que a média de uma sequência de variáveis aleatórias



# Lei forte dos grandes números

A lei forte dos grandes números é provavelmente o resultado mais famoso na teoria da probabilidade (Ross, 2010). Ela diz que a média de uma sequência de variáveis aleatórias independentes com mesma distribuição converge,



# Lei forte dos grandes números

A lei forte dos grandes números é provavelmente o resultado mais famoso na teoria da probabilidade (Ross, 2010). Ela diz que a média de uma sequência de variáveis aleatórias independentes com mesma distribuição converge, com probabilidade 1,



# Lei forte dos grandes números

A lei forte dos grandes números é provavelmente o resultado mais famoso na teoria da probabilidade (Ross, 2010). Ela diz que a média de uma sequência de variáveis aleatórias independentes com mesma distribuição converge, com probabilidade 1, para a média daquela distribuição.





# Lei forte dos grandes números

A lei forte dos grandes números é provavelmente o resultado mais famoso na teoria da probabilidade (Ross, 2010). Ela diz que a média de uma sequência de variáveis aleatórias independentes com mesma distribuição converge, com probabilidade 1, para a média daquela distribuição.



# Lei forte dos grandes números

Seja  $X_1, X_2, \dots$  uma sequência de variáveis aleatórias

# Lei forte dos grandes números

Seja  $X_1, X_2, \dots$  uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas,



# Lei forte dos grandes números

Seja  $X_1, X_2, \dots$  uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, com média finita,



# Lei forte dos grandes números

Seja  $X_1, X_2, \dots$  uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, com média finita, ou seja,  $\mathbb{E}(X_n) = \mu < \infty$ ,



# Lei forte dos grandes números

Seja  $X_1, X_2, \dots$  uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, com média finita, ou seja,  $\mathbb{E}(X_n) = \mu < \infty$ ,  $n \geq 1$ .



# Lei forte dos grandes números

Seja  $X_1, X_2, \dots$  uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, com média finita, ou seja,  $\mathbb{E}(X_n) = \mu < \infty$ ,  $n \geq 1$ .

As somas parciais  $S_n = X_1 + \dots + X_n$



# Lei forte dos grandes números

Seja  $X_1, X_2, \dots$  uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, com média finita, ou seja,  $\mathbb{E}(X_n) = \mu < \infty$ ,  $n \geq 1$ .

As somas parciais  $S_n = X_1 + \dots + X_n$  satisfazem





# Lei forte dos grandes números

Seja  $X_1, X_2, \dots$  uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, com média finita, ou seja,  $\mathbb{E}(X_n) = \mu < \infty$ ,  $n \geq 1$ .

As somas parciais  $S_n = X_1 + \dots + X_n$  satisfazem

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\text{qc}} \mu.$$



# Lei forte dos grandes números

Seja  $X_1, X_2, \dots$  uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, com média finita, ou seja,  $\mathbb{E}(X_n) = \mu < \infty$ ,  $n \geq 1$ .

As somas parciais  $S_n = X_1 + \dots + X_n$  satisfazem

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\text{qc}} \mu.$$



# Lei forte dos grandes números

A lei forte dos grandes números foi demonstrada por Kolmogorov (1933).



# Lei forte dos grandes números

A lei forte dos grandes números foi demonstrada por Kolmogorov (1933).

Antes,



# Lei forte dos grandes números

A lei forte dos grandes números foi demonstrada por Kolmogorov (1933).  
Antes, a demonstração foi originalmente feita por Borel (1909),



# Lei forte dos grandes números

A lei forte dos grandes números foi demonstrada por Kolmogorov (1933). Antes, a demonstração foi originalmente feita por Borel (1909), para o caso de uma sequência de variáveis aleatórias com distribuição Bernoulli,



# Lei forte dos grandes números

A lei forte dos grandes números foi demonstrada por Kolmogorov (1933). Antes, a demonstração foi originalmente feita por Borel (1909), para o caso de uma sequência de variáveis aleatórias com distribuição Bernoulli, para estas condições,



# Lei forte dos grandes números

A lei forte dos grandes números foi demonstrada por Kolmogorov (1933). Antes, a demonstração foi originalmente feita por Borel (1909), para o caso de uma sequência de variáveis aleatórias com distribuição Bernoulli, para estas condições,

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\text{qc}} p.$$





# Lei forte dos grandes números

A lei forte dos grandes números foi demonstrada por Kolmogorov (1933). Antes, a demonstração foi originalmente feita por Borel (1909), para o caso de uma sequência de variáveis aleatórias com distribuição Bernoulli, para estas condições,

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\text{qc}} p.$$



# Roteiro

- 1 Motivação
- 2 Lei fraca dos grandes números
- 3 Lei forte dos grandes números
- 4 Teorema central do limite**
- 5 Limites de binomiais para Poisson
- 6 Referências bibliográficas



# Teorema central do limite

O teorema central do limite é um dos resultados mais extraordinários na teoria da probabilidade (Ross, 2010). Em linhas gerais,



# Teorema central do limite

O teorema central do limite é um dos resultados mais extraordinários na teoria da probabilidade (Ross, 2010). Em linhas gerais, ele diz que a soma de um grande número de variáveis aleatórias independentes



# Teorema central do limite

O teorema central do limite é um dos resultados mais extraordinários na teoria da probabilidade (Ross, 2010). Em linhas gerais, ele diz que a soma de um grande número de variáveis aleatórias independentes tem uma distribuição que é aproximadamente normal.



# Teorema central do limite

O teorema central do limite é um dos resultados mais extraordinários na teoria da probabilidade (Ross, 2010). Em linhas gerais, ele diz que a soma de um grande número de variáveis aleatórias independentes tem uma distribuição que é aproximadamente normal.



# Teorema central do limite

Com isso, ele não somente fornece um método simples para o cálculo de probabilidades aproximadas



# Teorema central do limite

Com isso, ele não somente fornece um método simples para o cálculo de probabilidades aproximadas para somas de variáveis aleatórias independentes,





# Teorema central do limite

Com isso, ele não somente fornece um método simples para o cálculo de probabilidades aproximadas para somas de variáveis aleatórias independentes, mas também ajuda a explicar o extraordinário fato de que



# Teorema central do limite

Com isso, ele não somente fornece um método simples para o cálculo de probabilidades aproximadas para somas de variáveis aleatórias independentes, mas também ajuda a explicar o extraordinário fato de que frequências empíricas de muitas populações naturais



# Teorema central do limite

Com isso, ele não somente fornece um método simples para o cálculo de probabilidades aproximadas para somas de variáveis aleatórias independentes, mas também ajuda a explicar o extraordinário fato de que frequências empíricas de muitas populações naturais exibem curvas na forma de um sino



# Teorema central do limite

Com isso, ele não somente fornece um método simples para o cálculo de probabilidades aproximadas para somas de variáveis aleatórias independentes, mas também ajuda a explicar o extraordinário fato de que frequências empíricas de muitas populações naturais exibem curvas na forma de um sino (isto é, normais).



# Teorema central do limite

Com isso, ele não somente fornece um método simples para o cálculo de probabilidades aproximadas para somas de variáveis aleatórias independentes, mas também ajuda a explicar o extraordinário fato de que frequências empíricas de muitas populações naturais exibem curvas na forma de um sino (isto é, normais).



# Teorema central do limite

Seja  $X_1, X_2, \dots$  uma sequência de variáveis aleatórias



# Teorema central do limite

Seja  $X_1, X_2, \dots$  uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas



# Teorema central do limite

Seja  $X_1, X_2, \dots$  uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com média  $\mu$  e variância  $\sigma^2$ .





# Teorema central do limite

Seja  $X_1, X_2, \dots$  uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com média  $\mu$  e variância  $\sigma^2$ . Seja  $S_n = X_1 + \dots + X_n$ ,



# Teorema central do limite

Seja  $X_1, X_2, \dots$  uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com média  $\mu$  e variância  $\sigma^2$ . Seja  $S_n = X_1 + \dots + X_n$ , então



# Teorema central do limite

Seja  $X_1, X_2, \dots$  uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com média  $\mu$  e variância  $\sigma^2$ . Seja  $S_n = X_1 + \dots + X_n$ , então

$$\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{d} N(0, 1).$$



# Teorema central do limite

Seja  $X_1, X_2, \dots$  uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com média  $\mu$  e variância  $\sigma^2$ . Seja  $S_n = X_1 + \dots + X_n$ , então

$$\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{d} N(0, 1).$$



# Teorema central do limite

**Prova.** Seja



# Teorema central do limite

**Prova.** Seja

$$Z_n = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{\sigma\sqrt{n}}.$$

# Teorema central do limite

**Prova.** Seja

$$Z_n = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{\sigma\sqrt{n}}.$$

A função geradora de momentos de  $Z_n$ ,



# Teorema central do limite

**Prova.** Seja

$$Z_n = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{\sigma\sqrt{n}}.$$

A função geradora de momentos de  $Z_n$ ,  $M_{Z_n}(t)$ , é dada por





# Teorema central do limite

**Prova.** Seja

$$Z_n = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{\sigma\sqrt{n}}.$$

A função geradora de momentos de  $Z_n$ ,  $M_{Z_n}(t)$ , é dada por

$$\begin{aligned} M_{Z_n}(t) &= \mathbb{E}(e^{tZ_n}) = \mathbb{E}(\exp\{tZ_n\}) = \mathbb{E}\left(\exp\left\{t\frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{\sigma\sqrt{n}}\right\}\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\exp\left\{\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}(Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n)\right\}\right). \end{aligned}$$



# Teorema central do limite

**Prova.** Seja

$$Z_n = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{\sigma\sqrt{n}}.$$

A função geradora de momentos de  $Z_n$ ,  $M_{Z_n}(t)$ , é dada por

$$\begin{aligned} M_{Z_n}(t) &= \mathbb{E}(e^{tZ_n}) = \mathbb{E}(\exp\{tZ_n\}) = \mathbb{E}\left(\exp\left\{t\frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{\sigma\sqrt{n}}\right\}\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\exp\left\{\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}(Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n)\right\}\right). \end{aligned}$$



# Teorema central do limite

Dando prosseguimento, nós temos que



# Teorema central do limite

Dando prosseguimento, nós temos que

$$\begin{aligned} M_{Z_n}(t) &= \mathbb{E} \left( \exp \left\{ \frac{t}{\sigma\sqrt{n}} Y_1 \right\} \times \cdots \times \exp \left\{ \frac{t}{\sigma\sqrt{n}} Y_n \right\} \right) \\ &\stackrel{\text{Ind.}}{=} \mathbb{E} \left( \exp \left\{ \frac{t}{\sigma\sqrt{n}} Y_1 \right\} \right) \times \cdots \times \mathbb{E} \left( \exp \left\{ \frac{t}{\sigma\sqrt{n}} Y_n \right\} \right) \quad (1) \\ &\stackrel{\text{I.D.}}{=} \left[ \mathbb{E} \left( \exp \left\{ \frac{t}{\sigma\sqrt{n}} Y_1 \right\} \right) \right]^n = \left[ M_{Y_1} \left( \frac{t}{\sigma\sqrt{n}} \right) \right]^n. \end{aligned}$$

# Teorema central do limite

Dando prosseguimento, nós temos que

$$\begin{aligned} M_{Z_n}(t) &= \mathbb{E} \left( \exp \left\{ \frac{t}{\sigma\sqrt{n}} Y_1 \right\} \times \cdots \times \exp \left\{ \frac{t}{\sigma\sqrt{n}} Y_n \right\} \right) \\ &\stackrel{\text{Ind.}}{=} \mathbb{E} \left( \exp \left\{ \frac{t}{\sigma\sqrt{n}} Y_1 \right\} \right) \times \cdots \times \mathbb{E} \left( \exp \left\{ \frac{t}{\sigma\sqrt{n}} Y_n \right\} \right) \quad (1) \\ &\stackrel{\text{I.D.}}{=} \left[ \mathbb{E} \left( \exp \left\{ \frac{t}{\sigma\sqrt{n}} Y_1 \right\} \right) \right]^n = \left[ M_{Y_1} \left( \frac{t}{\sigma\sqrt{n}} \right) \right]^n. \end{aligned}$$

Ou seja,

# Teorema central do limite

Dando prosseguimento, nós temos que

$$\begin{aligned} M_{Z_n}(t) &= \mathbb{E} \left( \exp \left\{ \frac{t}{\sigma\sqrt{n}} Y_1 \right\} \times \cdots \times \exp \left\{ \frac{t}{\sigma\sqrt{n}} Y_n \right\} \right) \\ &\stackrel{\text{Ind.}}{=} \mathbb{E} \left( \exp \left\{ \frac{t}{\sigma\sqrt{n}} Y_1 \right\} \right) \times \cdots \times \mathbb{E} \left( \exp \left\{ \frac{t}{\sigma\sqrt{n}} Y_n \right\} \right) \quad (1) \\ &\stackrel{\text{I.D.}}{=} \left[ \mathbb{E} \left( \exp \left\{ \frac{t}{\sigma\sqrt{n}} Y_1 \right\} \right) \right]^n = \left[ M_{Y_1} \left( \frac{t}{\sigma\sqrt{n}} \right) \right]^n. \end{aligned}$$

Ou seja, a FGM da VA  $Z_n$ ,

# Teorema central do limite

Dando prosseguimento, nós temos que

$$\begin{aligned} M_{Z_n}(t) &= \mathbb{E} \left( \exp \left\{ \frac{t}{\sigma\sqrt{n}} Y_1 \right\} \times \cdots \times \exp \left\{ \frac{t}{\sigma\sqrt{n}} Y_n \right\} \right) \\ &\stackrel{\text{Ind.}}{=} \mathbb{E} \left( \exp \left\{ \frac{t}{\sigma\sqrt{n}} Y_1 \right\} \right) \times \cdots \times \mathbb{E} \left( \exp \left\{ \frac{t}{\sigma\sqrt{n}} Y_n \right\} \right) \quad (1) \\ &\stackrel{\text{I.D.}}{=} \left[ \mathbb{E} \left( \exp \left\{ \frac{t}{\sigma\sqrt{n}} Y_1 \right\} \right) \right]^n = \left[ M_{Y_1} \left( \frac{t}{\sigma\sqrt{n}} \right) \right]^n. \end{aligned}$$

Ou seja, a FGM da VA  $Z_n$ , avaliada no ponto  $t$ ,

# Teorema central do limite

Dando prosseguimento, nós temos que

$$\begin{aligned} M_{Z_n}(t) &= \mathbb{E} \left( \exp \left\{ \frac{t}{\sigma\sqrt{n}} Y_1 \right\} \times \cdots \times \exp \left\{ \frac{t}{\sigma\sqrt{n}} Y_n \right\} \right) \\ &\stackrel{\text{Ind.}}{=} \mathbb{E} \left( \exp \left\{ \frac{t}{\sigma\sqrt{n}} Y_1 \right\} \right) \times \cdots \times \mathbb{E} \left( \exp \left\{ \frac{t}{\sigma\sqrt{n}} Y_n \right\} \right) \quad (1) \\ &\stackrel{\text{I.D.}}{=} \left[ \mathbb{E} \left( \exp \left\{ \frac{t}{\sigma\sqrt{n}} Y_1 \right\} \right) \right]^n = \left[ M_{Y_1} \left( \frac{t}{\sigma\sqrt{n}} \right) \right]^n. \end{aligned}$$

Ou seja, a FGM da VA  $Z_n$ , avaliada no ponto  $t$ , pode ser escrita como uma função da FGM da VA  $Y_1 = X_1 - \mu$ ,





# Teorema central do limite

Dando prosseguimento, nós temos que

$$\begin{aligned} M_{Z_n}(t) &= \mathbb{E} \left( \exp \left\{ \frac{t}{\sigma\sqrt{n}} Y_1 \right\} \times \cdots \times \exp \left\{ \frac{t}{\sigma\sqrt{n}} Y_n \right\} \right) \\ &\stackrel{\text{Ind.}}{=} \mathbb{E} \left( \exp \left\{ \frac{t}{\sigma\sqrt{n}} Y_1 \right\} \right) \times \cdots \times \mathbb{E} \left( \exp \left\{ \frac{t}{\sigma\sqrt{n}} Y_n \right\} \right) \quad (1) \\ &\stackrel{\text{I.D.}}{=} \left[ \mathbb{E} \left( \exp \left\{ \frac{t}{\sigma\sqrt{n}} Y_1 \right\} \right) \right]^n = \left[ M_{Y_1} \left( \frac{t}{\sigma\sqrt{n}} \right) \right]^n. \end{aligned}$$

Ou seja, a FGM da VA  $Z_n$ , avaliada no ponto  $t$ , pode ser escrita como uma função da FGM da VA  $Y_1 = X_1 - \mu$ , avaliada no ponto  $t/\sigma\sqrt{n}$ .



# Teorema central do limite

Dando prosseguimento, nós temos que

$$\begin{aligned} M_{Z_n}(t) &= \mathbb{E} \left( \exp \left\{ \frac{t}{\sigma\sqrt{n}} Y_1 \right\} \times \cdots \times \exp \left\{ \frac{t}{\sigma\sqrt{n}} Y_n \right\} \right) \\ &\stackrel{\text{Ind.}}{=} \mathbb{E} \left( \exp \left\{ \frac{t}{\sigma\sqrt{n}} Y_1 \right\} \right) \times \cdots \times \mathbb{E} \left( \exp \left\{ \frac{t}{\sigma\sqrt{n}} Y_n \right\} \right) \quad (1) \\ &\stackrel{\text{I.D.}}{=} \left[ \mathbb{E} \left( \exp \left\{ \frac{t}{\sigma\sqrt{n}} Y_1 \right\} \right) \right]^n = \left[ M_{Y_1} \left( \frac{t}{\sigma\sqrt{n}} \right) \right]^n. \end{aligned}$$

Ou seja, a FGM da VA  $Z_n$ , avaliada no ponto  $t$ , pode ser escrita como uma função da FGM da VA  $Y_1 = X_1 - \mu$ , avaliada no ponto  $t/\sigma\sqrt{n}$ .



# Teorema central do limite

Antes de nós continuarmos, nós iremos discutir algumas propriedades da FGM de  $Y_1 = X_1 - \mu$



# Teorema central do limite

Antes de nós continuarmos, nós iremos discutir algumas propriedades da FGM de  $Y_1 = X_1 - \mu$  e, por simplicidade, avaliada no ponto  $t$ .



# Teorema central do limite

Antes de nós continuarmos, nós iremos discutir algumas propriedades da FGM de  $Y_1 = X_1 - \mu$  e, por simplicidade, avaliada no ponto  $t$ . Usando série de Taylor (1715) até o primeiro termo



# Teorema central do limite

Antes de nós continuarmos, nós iremos discutir algumas propriedades da FGM de  $Y_1 = X_1 - \mu$  e, por simplicidade, avaliada no ponto  $t$ . Usando série de Taylor (1715) até o primeiro termo e em torno de  $t = 0$ ,



# Teorema central do limite

Antes de nós continuarmos, nós iremos discutir algumas propriedades da FGM de  $Y_1 = X_1 - \mu$  e, por simplicidade, avaliada no ponto  $t$ . Usando série de Taylor (1715) até o primeiro termo e em torno de  $t = 0$ , nós temos que



# Teorema central do limite

Antes de nós continuarmos, nós iremos discutir algumas propriedades da FGM de  $Y_1 = X_1 - \mu$  e, por simplicidade, avaliada no ponto  $t$ . Usando série de Taylor (1715) até o primeiro termo e em torno de  $t = 0$ , nós temos que

$$M_{Y_1}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{M_{Y_1}^{(n)}(0)}{n!} t^n = M_{Y_1}^{(0)}(0) + t M_{Y_1}^{(1)}(0) + \frac{t^2}{2} M_{Y_1}^{(2)}(s), \quad (2)$$





# Teorema central do limite

Antes de nós continuarmos, nós iremos discutir algumas propriedades da FGM de  $Y_1 = X_1 - \mu$  e, por simplicidade, avaliada no ponto  $t$ . Usando série de Taylor (1715) até o primeiro termo e em torno de  $t = 0$ , nós temos que

$$M_{Y_1}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{M_{Y_1}^{(n)}(0)}{n!} t^n = M_{Y_1}^{(0)}(0) + t M_{Y_1}^{(1)}(0) + \frac{t^2}{2} M_{Y_1}^{(2)}(s), \quad (2)$$

em que  $0 < s < t$



# Teorema central do limite

Antes de nós continuarmos, nós iremos discutir algumas propriedades da FGM de  $Y_1 = X_1 - \mu$  e, por simplicidade, avaliada no ponto  $t$ . Usando série de Taylor (1715) até o primeiro termo e em torno de  $t = 0$ , nós temos que

$$M_{Y_1}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{M_{Y_1}^{(n)}(0)}{n!} t^n = M_{Y_1}^{(0)}(0) + t M_{Y_1}^{(1)}(0) + \frac{t^2}{2} M_{Y_1}^{(2)}(s), \quad (2)$$

em que  $0 < s < t$  e  $M_{Y_1}^{(n)}(\cdot)$  é a  $n$ -ésima derivada de  $M_{Y_1}(\cdot)$ .



# Teorema central do limite

Antes de nós continuarmos, nós iremos discutir algumas propriedades da FGM de  $Y_1 = X_1 - \mu$  e, por simplicidade, avaliada no ponto  $t$ . Usando série de Taylor (1715) até o primeiro termo e em torno de  $t = 0$ , nós temos que

$$M_{Y_1}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{M_{Y_1}^{(n)}(0)}{n!} t^n = M_{Y_1}^{(0)}(0) + t M_{Y_1}^{(1)}(0) + \frac{t^2}{2} M_{Y_1}^{(2)}(s), \quad (2)$$

em que  $0 < s < t$  e  $M_{Y_1}^{(n)}(\cdot)$  é a  $n$ -ésima derivada de  $M_{Y_1}(\cdot)$ .



# Teorema central do limite

Notem que, pelas propriedades da FGM,



# Teorema central do limite

Notem que, pelas propriedades da FGM, nós temos que



# Teorema central do limite

Notem que, pelas propriedades da FGM, nós temos que

$$M_{Y_1}^{(0)}(0) = M_{Y_1}(0) = 1,$$

$$M_{Y_1}^{(1)}(0) = \mathbb{E}(Y_1) = \mathbb{E}(X_1 - \mu) = 0,$$

$$M_{Y_1}^{(2)}(0) = \mathbb{E}(Y_1^2) = \mathbb{E}[(X_1 - \mu)^2] = \sigma^2.$$



# Teorema central do limite

Notem que, pelas propriedades da FGM, nós temos que

$$M_{Y_1}^{(0)}(0) = M_{Y_1}(0) = 1,$$

$$M_{Y_1}^{(1)}(0) = \mathbb{E}(Y_1) = \mathbb{E}(X_1 - \mu) = 0,$$

$$M_{Y_1}^{(2)}(0) = \mathbb{E}(Y_1^2) = \mathbb{E}[(X_1 - \mu)^2] = \sigma^2.$$



# Teorema central do limite

Usando os dois primeiros resultados anteriores, nós podemos simplificar (2),





# Teorema central do limite

Usando os dois primeiros resultados anteriores, nós podemos simplificar (2),  
da seguinte forma



# Teorema central do limite

Usando os dois primeiros resultados anteriores, nós podemos simplificar (2), da seguinte forma

$$M_{Y_1}(t) = 1 + \frac{t^2}{2} M_{Y_1}^{(2)}(s).$$



# Teorema central do limite

Usando os dois primeiros resultados anteriores, nós podemos simplificar (2), da seguinte forma

$$M_{Y_1}(t) = 1 + \frac{t^2}{2} M_{Y_1}^{(2)}(s).$$

Somando e subtraindo  $\sigma^2 t^2/2$  na equação acima,



# Teorema central do limite

Usando os dois primeiros resultados anteriores, nós podemos simplificar (2), da seguinte forma

$$M_{Y_1}(t) = 1 + \frac{t^2}{2} M_{Y_1}^{(2)}(s).$$

Somando e subtraindo  $\sigma^2 t^2/2$  na equação acima,

$$\begin{aligned} M_{Y_1}(t) &= 1 + \frac{\sigma^2 t^2}{2} - \frac{\sigma^2 t^2}{2} + \frac{t^2}{2} M_{Y_1}^{(2)}(s) \\ &= 1 + \frac{\sigma^2 t^2}{2} + \left[ M_{Y_1}^{(2)}(s) - \sigma^2 \right] \frac{t^2}{2}. \end{aligned} \tag{3}$$



# Teorema central do limite

Usando os dois primeiros resultados anteriores, nós podemos simplificar (2), da seguinte forma

$$M_{Y_1}(t) = 1 + \frac{t^2}{2} M_{Y_1}^{(2)}(s).$$

Somando e subtraindo  $\sigma^2 t^2/2$  na equação acima,

$$\begin{aligned} M_{Y_1}(t) &= 1 + \frac{\sigma^2 t^2}{2} - \frac{\sigma^2 t^2}{2} + \frac{t^2}{2} M_{Y_1}^{(2)}(s) \\ &= 1 + \frac{\sigma^2 t^2}{2} + \left[ M_{Y_1}^{(2)}(s) - \sigma^2 \right] \frac{t^2}{2}. \end{aligned} \tag{3}$$



# Teorema central do limite

A equação (3) é a FGM de  $Y_1$ . Como visto anteriormente,



# Teorema central do limite

A equação (3) é a FGM de  $Y_1$ . Como visto anteriormente, a FGM de  $Z_n$  é uma função da FGM de  $Y_1$ ,



# Teorema central do limite

A equação (3) é a FGM de  $Y_1$ . Como visto anteriormente, a FGM de  $Z_n$  é uma função da FGM de  $Y_1$ , avaliada em  $t/\sigma\sqrt{n}$ .





# Teorema central do limite

A equação (3) é a FGM de  $Y_1$ . Como visto anteriormente, a FGM de  $Z_n$  é uma função da FGM de  $Y_1$ , avaliada em  $t/\sigma\sqrt{n}$ . Substituindo (3),



# Teorema central do limite

A equação (3) é a FGM de  $Y_1$ . Como visto anteriormente, a FGM de  $Z_n$  é uma função da FGM de  $Y_1$ , avaliada em  $t/\sigma\sqrt{n}$ . Substituindo (3), avaliando no ponto  $t/\sigma\sqrt{n}$ ,



# Teorema central do limite

A equação (3) é a FGM de  $Y_1$ . Como visto anteriormente, a FGM de  $Z_n$  é uma função da FGM de  $Y_1$ , avaliada em  $t/\sigma\sqrt{n}$ . Substituindo (3), avaliando no ponto  $t/\sigma\sqrt{n}$ , em (1),



# Teorema central do limite

A equação (3) é a FGM de  $Y_1$ . Como visto anteriormente, a FGM de  $Z_n$  é uma função da FGM de  $Y_1$ , avaliada em  $t/\sigma\sqrt{n}$ . Substituindo (3), avaliando no ponto  $t/\sigma\sqrt{n}$ , em (1), nós temos que



# Teorema central do limite

A equação (3) é a FGM de  $Y_1$ . Como visto anteriormente, a FGM de  $Z_n$  é uma função da FGM de  $Y_1$ , avaliada em  $t/\sigma\sqrt{n}$ . Substituindo (3), avaliando no ponto  $t/\sigma\sqrt{n}$ , em (1), nós temos que

$$M_{Z_n}(t) = \left\{ 1 + \frac{t^2}{2n} + \left[ M_{Y_1}^{(2)}(s) - \sigma^2 \right] \frac{t^2}{2n\sigma^2} \right\}^n, \quad (4)$$

# Teorema central do limite

A equação (3) é a FGM de  $Y_1$ . Como visto anteriormente, a FGM de  $Z_n$  é uma função da FGM de  $Y_1$ , avaliada em  $t/\sigma\sqrt{n}$ . Substituindo (3), avaliando no ponto  $t/\sigma\sqrt{n}$ , em (1), nós temos que

$$M_{Z_n}(t) = \left\{ 1 + \frac{t^2}{2n} + \left[ M_{Y_1}^{(2)}(s) - \sigma^2 \right] \frac{t^2}{2n\sigma^2} \right\}^n, \quad (4)$$

em que  $0 < s < t/\sigma\sqrt{n}$



# Teorema central do limite

A equação (3) é a FGM de  $Y_1$ . Como visto anteriormente, a FGM de  $Z_n$  é uma função da FGM de  $Y_1$ , avaliada em  $t/\sigma\sqrt{n}$ . Substituindo (3), avaliando no ponto  $t/\sigma\sqrt{n}$ , em (1), nós temos que

$$M_{Z_n}(t) = \left\{ 1 + \frac{t^2}{2n} + \left[ M_{Y_1}^{(2)}(s) - \sigma^2 \right] \frac{t^2}{2n\sigma^2} \right\}^n, \quad (4)$$

em que  $0 < s < t/\sigma\sqrt{n}$  e  $-h\sigma\sqrt{n} < t < h\sigma\sqrt{n}$ .

# Teorema central do limite

A equação (3) é a FGM de  $Y_1$ . Como visto anteriormente, a FGM de  $Z_n$  é uma função da FGM de  $Y_1$ , avaliada em  $t/\sigma\sqrt{n}$ . Substituindo (3), avaliando no ponto  $t/\sigma\sqrt{n}$ , em (1), nós temos que

$$M_{Z_n}(t) = \left\{ 1 + \frac{t^2}{2n} + \left[ M_{Y_1}^{(2)}(s) - \sigma^2 \right] \frac{t^2}{2n\sigma^2} \right\}^n, \quad (4)$$

em que  $0 < s < t/\sigma\sqrt{n}$  e  $-h\sigma\sqrt{n} < t < h\sigma\sqrt{n}$ .



# Teorema central do limite

Para  $n \rightarrow \infty$  segue-se que



# Teorema central do limite

Para  $n \rightarrow \infty$  segue-se que  $s \rightarrow 0$

# Teorema central do limite

Para  $n \rightarrow \infty$  segue-se que  $s \rightarrow 0$  e como  $M_{Y_1}^{(2)}$  é contínua na origem,



# Teorema central do limite

Para  $n \rightarrow \infty$  segue-se que  $s \rightarrow 0$  e como  $M_{Y_1}^{(2)}$  é contínua na origem,

$$\lim_{s \rightarrow 0} [M_{Y_1}^{(2)}(s) - \sigma^2] = 0. \quad (5)$$



# Teorema central do limite

Para  $n \rightarrow \infty$  segue-se que  $s \rightarrow 0$  e como  $M_{Y_1}^{(2)}$  é contínua na origem,

$$\lim_{s \rightarrow 0} [M_{Y_1}^{(2)}(s) - \sigma^2] = 0. \quad (5)$$

Lembrando o seguinte resultado do cálculo,



# Teorema central do limite

Para  $n \rightarrow \infty$  segue-se que  $s \rightarrow 0$  e como  $M_{Y_1}^{(2)}$  é contínua na origem,

$$\lim_{s \rightarrow 0} [M_{Y_1}^{(2)}(s) - \sigma^2] = 0. \quad (5)$$

Lembrando o seguinte resultado do cálculo,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a_n}{n}\right)^n = e^a, \quad (6)$$



# Teorema central do limite

Para  $n \rightarrow \infty$  segue-se que  $s \rightarrow 0$  e como  $M_{Y_1}^{(2)}$  é contínua na origem,

$$\lim_{s \rightarrow 0} [M_{Y_1}^{(2)}(s) - \sigma^2] = 0. \quad (5)$$

Lembrando o seguinte resultado do cálculo,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a_n}{n}\right)^n = e^a, \quad (6)$$

quando  $a_n \rightarrow a$ .



# Teorema central do limite

Para  $n \rightarrow \infty$  segue-se que  $s \rightarrow 0$  e como  $M_{Y_1}^{(2)}$  é contínua na origem,

$$\lim_{s \rightarrow 0} [M_{Y_1}^{(2)}(s) - \sigma^2] = 0. \quad (5)$$

Lembrando o seguinte resultado do cálculo,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a_n}{n}\right)^n = e^a, \quad (6)$$

quando  $a_n \rightarrow a$ .





# Teorema central do limite

Por (5) e (6), nós concluimos a partir de (4) que



# Teorema central do limite

Por (5) e (6), nós concluimos a partir de (4) que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M_{Z_n}(t) = e^{t^2/2},$$

# Teorema central do limite

Por (5) e (6), nós concluimos a partir de (4) que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M_{Z_n}(t) = e^{t^2/2},$$

ou seja,



# Teorema central do limite

Por (5) e (6), nós concluimos a partir de (4) que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M_{Z_n}(t) = e^{t^2/2},$$

ou seja, quando  $n \rightarrow \infty$ ,



# Teorema central do limite

Por (5) e (6), nós concluimos a partir de (4) que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M_{Z_n}(t) = e^{t^2/2},$$

ou seja, quando  $n \rightarrow \infty$ , o limite da FGM de  $Z_n$



# Teorema central do limite

Por (5) e (6), nós concluimos a partir de (4) que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M_{Z_n}(t) = e^{t^2/2},$$

ou seja, quando  $n \rightarrow \infty$ , o limite da FGM de  $Z_n$  é a FGM de uma VA com distribuição normal padrão.



# Teorema central do limite

Por (5) e (6), nós concluimos a partir de (4) que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M_{Z_n}(t) = e^{t^2/2},$$

ou seja, quando  $n \rightarrow \infty$ , o limite da FGM de  $Z_n$  é a FGM de uma VA com distribuição normal padrão.

Ufa!!!



# Teorema central do limite

Por (5) e (6), nós concluimos a partir de (4) que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M_{Z_n}(t) = e^{t^2/2},$$

ou seja, quando  $n \rightarrow \infty$ , o limite da FGM de  $Z_n$  é a FGM de uma VA com distribuição normal padrão.

Ufa!!!





# Teorema central do limite

O teorema central do limite foi demonstrado por Lyapunov (1901).



# Teorema central do limite

O teorema central do limite foi demonstrado por Lyapunov (1901). Antes,



# Teorema central do limite

O teorema central do limite foi demonstrado por Lyapunov (1901). Antes, a demonstração foi originalmente feita por de Moivre (1733),



# Teorema central do limite

O teorema central do limite foi demonstrado por Lyapunov (1901). Antes, a demonstração foi originalmente feita por de Moivre (1733), para o caso de uma sequência de variáveis aleatórias com distribuição Bernoulli,



# Teorema central do limite

O teorema central do limite foi demonstrado por Lyapunov (1901). Antes, a demonstração foi originalmente feita por de Moivre (1733), para o caso de uma sequência de variáveis aleatórias com distribuição Bernoulli, com  $p = 1/2$ .



# Teorema central do limite

O teorema central do limite foi demonstrado por Lyapunov (1901). Antes, a demonstração foi originalmente feita por de Moivre (1733), para o caso de uma sequência de variáveis aleatórias com distribuição Bernoulli, com  $p = 1/2$ . Laplace (1812) estendeu este caso para um  $p$  arbitrário,



# Teorema central do limite

O teorema central do limite foi demonstrado por Lyapunov (1901). Antes, a demonstração foi originalmente feita por de Moivre (1733), para o caso de uma sequência de variáveis aleatórias com distribuição Bernoulli, com  $p = 1/2$ . Laplace (1812) estendeu este caso para um  $p$  arbitrário, nestas condições,



# Teorema central do limite

O teorema central do limite foi demonstrado por Lyapunov (1901). Antes, a demonstração foi originalmente feita por de Moivre (1733), para o caso de uma sequência de variáveis aleatórias com distribuição Bernoulli, com  $p = 1/2$ . Laplace (1812) estendeu este caso para um  $p$  arbitrário, nestas condições,

$$\frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \xrightarrow{d} N(0, 1).$$





# Teorema central do limite

O teorema central do limite foi demonstrado por Lyapunov (1901). Antes, a demonstração foi originalmente feita por de Moivre (1733), para o caso de uma sequência de variáveis aleatórias com distribuição Bernoulli, com  $p = 1/2$ . Laplace (1812) estendeu este caso para um  $p$  arbitrário, nestas condições,

$$\frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \xrightarrow{d} N(0, 1).$$



# Teorema central do limite

Seja  $X_1, X_2, \dots$  uma sequência de variáveis aleatórias independentes,



# Teorema central do limite

Seja  $X_1, X_2, \dots$  uma sequência de variáveis aleatórias independentes, com  $\mathbb{E}(X_i) = \mu_i$  e  $\text{Var}(X_i) = \sigma_i^2$ .



# Teorema central do limite

Seja  $X_1, X_2, \dots$  uma sequência de variáveis aleatórias independentes, com  $\mathbb{E}(X_i) = \mu_i$  e  $\text{Var}(X_i) = \sigma_i^2$ . Se (a) as variáveis aleatórias  $X_i$  forem limitadas uniformemente,



# Teorema central do limite

Seja  $X_1, X_2, \dots$  uma sequência de variáveis aleatórias independentes, com  $\mathbb{E}(X_i) = \mu_i$  e  $\text{Var}(X_i) = \sigma_i^2$ . Se (a) as variáveis aleatórias  $X_i$  forem limitadas uniformemente, isto é, para algum  $M$ ,



# Teorema central do limite

Seja  $X_1, X_2, \dots$  uma sequência de variáveis aleatórias independentes, com  $\mathbb{E}(X_i) = \mu_i$  e  $\text{Var}(X_i) = \sigma_i^2$ . Se (a) as variáveis aleatórias  $X_i$  forem limitadas uniformemente, isto é, para algum  $M$ ,  $\mathbb{P}(|X_i| < M) = 1$ ,



# Teorema central do limite

Seja  $X_1, X_2, \dots$  uma sequência de variáveis aleatórias independentes, com  $\mathbb{E}(X_i) = \mu_i$  e  $\text{Var}(X_i) = \sigma_i^2$ . Se (a) as variáveis aleatórias  $X_i$  forem limitadas uniformemente, isto é, para algum  $M$ ,  $\mathbb{P}(|X_i| < M) = 1$ , para todo  $i$ ,



# Teorema central do limite

Seja  $X_1, X_2, \dots$  uma sequência de variáveis aleatórias independentes, com  $\mathbb{E}(X_i) = \mu_i$  e  $\text{Var}(X_i) = \sigma_i^2$ . Se (a) as variáveis aleatórias  $X_i$  forem limitadas uniformemente, isto é, para algum  $M$ ,  $\mathbb{P}(|X_i| < M) = 1$ , para todo  $i$ , e (b)

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i^2 = \infty,$$




# Teorema central do limite

Seja  $X_1, X_2, \dots$  uma sequência de variáveis aleatórias independentes, com  $\mathbb{E}(X_i) = \mu_i$  e  $\text{Var}(X_i) = \sigma_i^2$ . Se (a) as variáveis aleatórias  $X_i$  forem limitadas uniformemente, isto é, para algum  $M$ ,  $\mathbb{P}(|X_i| < M) = 1$ , para todo  $i$ , e (b)  $\sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i^2 = \infty$ , então



# Teorema central do limite

Seja  $X_1, X_2, \dots$  uma sequência de variáveis aleatórias independentes, com  $\mathbb{E}(X_i) = \mu_i$  e  $\text{Var}(X_i) = \sigma_i^2$ . Se (a) as variáveis aleatórias  $X_i$  forem limitadas uniformemente, isto é, para algum  $M$ ,  $\mathbb{P}(|X_i| < M) = 1$ , para todo  $i$ , e (b)  $\sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i^2 = \infty$ , então

$$\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu_i)}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \sigma_i^2}} \xrightarrow{d} N(0, 1).$$

# Teorema central do limite

Seja  $X_1, X_2, \dots$  uma sequência de variáveis aleatórias independentes, com  $\mathbb{E}(X_i) = \mu_i$  e  $\text{Var}(X_i) = \sigma_i^2$ . Se (a) as variáveis aleatórias  $X_i$  forem limitadas uniformemente, isto é, para algum  $M$ ,  $\mathbb{P}(|X_i| < M) = 1$ , para todo  $i$ , e (b)  $\sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i^2 = \infty$ , então

$$\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu_i)}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \sigma_i^2}} \xrightarrow{d} N(0, 1).$$

Resultado demonstrado por Lindeberg (1922).



# Teorema central do limite

Seja  $X_1, X_2, \dots$  uma sequência de variáveis aleatórias independentes, com  $\mathbb{E}(X_i) = \mu_i$  e  $\text{Var}(X_i) = \sigma_i^2$ . Se (a) as variáveis aleatórias  $X_i$  forem limitadas uniformemente, isto é, para algum  $M$ ,  $\mathbb{P}(|X_i| < M) = 1$ , para todo  $i$ , e (b)  $\sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i^2 = \infty$ , então

$$\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu_i)}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \sigma_i^2}} \xrightarrow{d} N(0, 1).$$

Resultado demonstrado por Lindeberg (1922).



# Roteiro

- 1 Motivação
- 2 Lei fraca dos grandes números
- 3 Lei forte dos grandes números
- 4 Teorema central do limite
- 5 Limites de binomiais para Poisson**
- 6 Referências bibliográficas



# Limites de binomiais para Poisson

Se  $X_n \sim \text{binomial}(n, p_n)$ ,  $n \geq 1$

# Limites de binomiais para Poisson

Se  $X_n \sim \text{binomial}(n, p_n)$ ,  $n \geq 1$  e  $\lim_{n \rightarrow \infty} np_n = \lambda > 0$ ,

# Limites de binomiais para Poisson

Se  $X_n \sim \text{binomial}(n, p_n)$ ,  $n \geq 1$  e  $\lim_{n \rightarrow \infty} np_n = \lambda > 0$ , então

$$X_n \xrightarrow{d} \text{Poisson}(\lambda).$$



# Limites de binomiais para Poisson

Se  $X_n \sim \text{binomial}(n, p_n)$ ,  $n \geq 1$  e  $\lim_{n \rightarrow \infty} np_n = \lambda > 0$ , então

$$X_n \xrightarrow{d} \text{Poisson}(\lambda).$$

# Roteiro

- 1 Motivação
- 2 Lei fraca dos grandes números
- 3 Lei forte dos grandes números
- 4 Teorema central do limite
- 5 Limites de binomiais para Poisson
- 6 Referências bibliográficas



# Referências bibliográficas I

Bernoulli, J. (1713). *Ars conjectandi*. Basel: Thurneysen Brothers.

Borel, M. E. (1909). Les probabilités dénombrables et leurs applications arithmétiques. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo* 27(1), 247–271.

Chebyshev, P. (1867). Des valeurs moyennes. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées 2e série* 12, 177–184.

de Moivre, A. (1733). Approximatio ad summam terminorum binomii  $(a + b)^n$  in seriem expansi.



## Referências bibliográficas II

Khinchine, A. Y. (1929). Sur la loi des grands nombres. *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* 189, 477–479.

Kolmogorov, A. N. (1933). *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*. Berlin: Springer.

Laplace, P.-S. (1812). *Théorie analytique des probabilités*. Paris: Courcier.

Lindeberg, J. W. (1922). Eine neue herleitung des exponentialgesetzes in der wahrscheinlichkeitsrechnung. *Mathematische Zeitschrift* 15, 211–225.



## Referências bibliográficas III

- Lyapunov, A. M. (1901). Nouvelle forme du théorème sur la limite de probabilité. *Mémoires de l'Académie Impériale des Sciences de St.-Petersbourg VIIe Série, Classe Physico-Mathématique* 12, 1–24.
- Ross, S. (2010). *Probabilidade: um curso moderno com aplicações* (8 ed.). Porto Alegre: Bookman.
- Taylor, B. (1715). *Methodus Incrementorum Directa et Inversa*. Londini: Typis Pearsonianis prostant apud Gul. Innys ad Insignia Principis in Coemeterio Paulino.



# Obrigado!

✉ tiago.magalhaes@ufjf.br

🔗 ufjf.br/tiago\_magalhaes

🌐 Departamento de Estatística, Sala 319

