Estatísticas de ordem

Tiago M. Magalhães

Departamento de Estatística - ICE-UFJF

Juiz de Fora, 08 de outubro de 2025

Roteiro

Roteiro

Estatísticas de ordem

Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ VA IID, com distribuição $\mathcal{D}$, função densidade de probabilidade (FDP) f e função de distribuição acumulada (FDA) F. Definam:

$$X_{(1)} = \text{o menor valor entre } X_1, X_2, \ldots, X_n;$$

$$X_{(2)} = \text{o segundo menor valor entre } X_1, X_2, \ldots, X_n;$$

$$\vdots$$

$$X_{(j)} = \text{o } j\text{-ésimo menor valor entre } X_1, X_2, \ldots, X_n;$$

$$\vdots$$

$$X_{(n)} = \text{o maior valor entre } X_1, X_2, \ldots, X_n.$$

Estatísticas de ordem

Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ VA IID, com distribuição $\mathcal{D}$, função densidade de probabilidade (FDP) f e função de distribuição acumulada (FDA) F. Definam:

$$
\begin{aligned}
X_{(1)} &= \text{o menor valor entre } X_1, X_2, \ldots, X_n;\\
X_{(2)} &= \text{o segundo menor valor entre } X_1, X_2, \ldots, X_n;\\
&\vdots\\
X_{(j)} &= \text{o } j\text{-ésimo menor valor entre } X_1, X_2, \ldots, X_n;\\
&\vdots\\
X_{(n)} &= \text{o maior valor entre } X_1, X_2, \ldots, X_n.
\end{aligned}
$$

Estatísticas de ordem

Os valores ordenados $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \cdots \leq X_{(n)}$ são denominados de **estatísticas de ordem** correspondentes as VA $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Em outras palavras, $X_{(1)}, X_{(2)}, \ldots, X_{(n)}$ são os valores ordenados de $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Estatísticas de ordem

Os valores ordenados $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \cdots \leq X_{(n)}$ são denominados de **estatísticas de ordem** correspondentes as VA $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Em outras palavras, $X_{(1)}, X_{(2)}, \ldots, X_{(n)}$ são os valores ordenados de $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Estatísticas de ordem

Observação

Os valores extremos $X_{(1)}$ e $X_{(n)}$ são frenquentemente os mais interessantes.

Observação

Os valores extremos $X_{(1)}$ e $X_{(n)}$ são frenquentemente os mais interessantes.

Pois, eles são, respectivamente, o **mínimo** e o **máximo**, isto é, $X_{(1)} = \min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ e $X_{(n)} = \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$.

Estatísticas de ordem

Observação

Os valores extremos $X_{(1)}$ e $X_{(n)}$ são frenquentemente os mais interessantes.

Pois, eles são, respectivamente, o **mínimo** e o **máximo**, isto é, $X_{(1)} = \min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ e $X_{(n)} = \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$.

Exemplos

Exemplo 1. Se $X_1, \ldots, X_5$ são VA IID a uma exponencial com parâmetro λ, calcule:

(a) $\mathbb{P}\left(\min\{X_1, \ldots, X_5\} \leq a\right)$;

(b) $\mathbb{P}\left(\max\{X_1, \ldots, X_5\} \leq a\right)$.

Exemplos

Exemplo 1. Se $X_1, \ldots, X_5$ são VA IID a uma exponencial com parâmetro λ, calcule:

(a) $\mathbb{P}\left(\min\left\{X_1, \ldots, X_5\right\} \leq a\right)$;

(b) $\mathbb{P}\left(\max\left\{X_1, \ldots, X_5\right\} \leq a\right)$.

Lembrando que, se $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$, então

$$F_X(x) = 1 - \exp\left\{-\lambda x\right\}, \ S_X(x) = 1 - F_X(x) = \exp\left\{-\lambda x\right\}. \qquad (1)$$

Exemplos

Exemplo 1. Se $X_1, \ldots, X_5$ são VA IID a uma exponencial com parâmetro λ, calcule:

(a) $\mathbb{P}\left(\min\left\{X_1, \ldots, X_5\right\} \leq a\right)$;

(b) $\mathbb{P}\left(\max\left\{X_1, \ldots, X_5\right\} \leq a\right)$.

Lembrando que, se $X \sim \text{Exp}(\lambda)$, então

$$F_X(x) = 1 - \exp\left\{-\lambda x\right\}, \; S_X(x) = 1 - F_X(x) = \exp\left\{-\lambda x\right\}. \tag{1}$$

Exemplos

Para o Item (a), nós temos que

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\min\{X_1,\ldots,X_5\} \leq a\right) &= 1 - \mathbb{P}\left(\min\{X_1,\ldots,X_5\} > a\right) \\
&= 1 - \mathbb{P}\left(X_1 > a,\ldots,X_5 > a\right) \\
&\overset{\text{Ind.}}{=} 1 - \left[\mathbb{P}\left(X_1 > a\right) \times \cdots \times \mathbb{P}\left(X_5 > a\right)\right] \\
&\overset{\text{I.D.}}{=} 1 - \left[\mathbb{P}\left(X_1 > a\right)\right]^5 = 1 - \left[S_{X_1}(a)\right]^5 \\
&\overset{(1)}{=} 1 - \left[\exp\{-\lambda a\}\right]^5 = 1 - \exp\{-5\lambda a\}.
\end{aligned}
$$

Exemplos

Para o Item (a), nós temos que

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\min\left\{X_1,\ldots,X_5\right\} \leq a\right) &= 1 - \mathbb{P}\left(\min\left\{X_1,\ldots,X_5\right\} > a\right) \\
&= 1 - \mathbb{P}\left(X_1 > a,\ldots,X_5 > a\right) \\
&\overset{\text{Ind.}}{=} 1 - \left[\mathbb{P}\left(X_1 > a\right) \times \cdots \times \mathbb{P}\left(X_5 > a\right)\right] \\
&\overset{\text{I.D.}}{=} 1 - \left[\mathbb{P}\left(X_1 > a\right)\right]^5 = 1 - \left[S_{X_1}(a)\right]^5 \\
&\overset{(1)}{=} 1 - \left[\exp\left\{-\lambda a\right\}\right]^5 = 1 - \exp\left\{-5\lambda a\right\}.
\end{aligned}
$$

Observem que, $\min\left\{X_1,\ldots,X_5\right\} \sim \mathrm{Exp}(5\lambda)$.

Exemplos

Para o Item (a), nós temos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\min\left\{X_1,\ldots,X_5\right\} \leq a\right) &= 1 - \mathbb{P}\left(\min\left\{X_1,\ldots,X_5\right\} > a\right) \\
&= 1 - \mathbb{P}\left(X_1 > a,\ldots,X_5 > a\right) \\
&\overset{\text{Ind.}}{=} 1 - \left[\mathbb{P}\left(X_1 > a\right) \times \cdots \times \mathbb{P}\left(X_5 > a\right)\right] \\
&\overset{\text{I.D.}}{=} 1 - \left[\mathbb{P}\left(X_1 > a\right)\right]^5 = 1 - \left[S_{X_1}(a)\right]^5 \\
&\overset{(1)}{=} 1 - \left[\exp\left\{-\lambda a\right\}\right]^5 = 1 - \exp\left\{-5\lambda a\right\}.
\end{aligned}$$

Observem que, $\min\left\{X_1,\ldots,X_5\right\} \sim \mathrm{Exp}(5\lambda)$.

Exemplos

Para o Item (b), nós temos que

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\max\left\{X_1, \ldots, X_5\right\} \leq a\right) &= \mathbb{P}\left(X_1 \leq a, \ldots, X_5 \leq a\right) \\
&\overset{\text{Ind.}}{=} \mathbb{P}\left(X_1 \leq a\right) \times \cdots \times \mathbb{P}\left(X_5 \leq a\right) \\
&\overset{\text{I.D.}}{=} \left[\mathbb{P}\left(X_1 \leq a\right)\right]^5 = \left[F_{X_1}(a)\right]^5 \\
&\overset{(1)}{=} \left[1 - \exp\left\{-\lambda a\right\}\right]^5.
\end{aligned}
$$

Exemplos

Para o Item (b), nós temos que

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\max\left\{X_1, \ldots, X_5\right\} \leq a\right) &= \mathbb{P}\left(X_1 \leq a, \ldots, X_5 \leq a\right) \\
&\overset{\text{Ind.}}{=} \mathbb{P}\left(X_1 \leq a\right) \times \cdots \times \mathbb{P}\left(X_5 \leq a\right) \\
&\overset{\text{I.D.}}{=} \left[\mathbb{P}\left(X_1 \leq a\right)\right]^5 = \left[F_{X_1}(a)\right]^5 \\
&\overset{(1)}{=} \left[1 - \exp\left\{-\lambda a\right\}\right]^5 .
\end{aligned}
$$

Roteiro

Estatísticas de ordem

A FDP conjunta de $X_{(1)}, X_{(2)}, \ldots, X_{(n)}$ é dada por

$$f_{X_{(1)},\ldots,X_{(n)}}(x_1, \ldots, x_n) = n! \times f_{X_1}(x_1) \times \cdots \times f_{X_n}(x_n)\, \mathbb{I}_{\mathbb{R}}(x_1 < \cdots < x_n).$$

Estatísticas de ordem

A FDP conjunta de $X_{(1)}, X_{(2)}, \ldots, X_{(n)}$ é dada por

$$f_{X_{(1)},\ldots,X_{(n)}}(x_1, \ldots, x_n) = n! \times f_{X_1}(x_1) \times \cdots \times f_{X_n}(x_n)\, \mathbb{I}_{\mathbb{R}}(x_1 < \cdots < x_n).$$

Estatísticas de ordem

E a FDP marginal da j-ésima estatística de ordem $X_{(j)}$ é dada por

$$f_{X_{(j)}}(x) = \frac{n!}{(n-j)!(j-1)!}\left[F(x)\right]^{j-1}\left[1-F(x)\right]^{n-j} f(x). \tag{2}$$

Estatísticas de ordem

E a FDP marginal da j-ésima estatística de ordem $X_{(j)}$ é dada por

$$f_{X_{(j)}}(x) = \frac{n!}{(n-j)!(j-1)!} \left[F(x)\right]^{j-1} \left[1 - F(x)\right]^{n-j} f(x). \tag{2}$$

Estatísticas de ordem

Para $X_{(1)} = \min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ e $X_{(n)} = \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ a FDP em (2) pode escrita ser, respectivamente, da seguinte forma:

Para $X_{(1)} = \min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ e $X_{(n)} = \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ a FDP em (2) pode escrita ser, respectivamente, da seguinte forma:

$$f_{X_{(1)}}(x) = n\,[1 - F(x)]^{n-1}\, f(x), \quad f_{X_{(n)}}(x) = n\,[F(x)]^{n-1}\, f(x).$$

Estatísticas de ordem

Para $X_{(1)} = \min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ e $X_{(n)} = \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ a FDP em (2) pode escrita ser, respectivamente, da seguinte forma:

$$f_{X_{(1)}}(x) = n\left[1 - F(x)\right]^{n-1} f(x), \quad f_{X_{(n)}}(x) = n\left[F(x)\right]^{n-1} f(x).$$

Exemplos

Exemplo 2. Nós dizemos que uma VA possui uma distribuição *exponencial truncada* de parâmetros $\lambda > 0$ e $\theta > 0$,

Exemplos

Exemplo 2. Nós dizemos que uma VA possui uma distribuição *exponencial truncada* de parâmetros $\lambda > 0$ e $\theta > 0$, $X \sim \mathrm{ET}(\lambda, \theta)$,

Exemplos

Exemplo 2. Nós dizemos que uma VA possui uma distribuição *exponencial truncada* de parâmetros $\lambda > 0$ e $\theta > 0$, $X \sim \text{ET}(\lambda, \theta)$, se sua FDP é da forma

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda(x-\theta)}\, \mathbb{I}_{(\theta,\infty)}(x).$$

Exemplos

Exemplo 2. Nós dizemos que uma VA possui uma distribuição *exponencial truncada* de parâmetros $\lambda > 0$ e $\theta > 0$, $X \sim \text{ET}(\lambda, \theta)$, se sua FDP é da forma

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda(x-\theta)} \, \mathbb{I}_{(\theta,\infty)}(x).$$

Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de $X \sim \text{ET}(1, \theta)$.

Exemplo 2. Nós dizemos que uma VA possui uma distribuição *exponencial truncada* de parâmetros $\lambda > 0$ e $\theta > 0$, $X \sim \mathrm{ET}(\lambda, \theta)$, se sua FDP é da forma

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda(x-\theta)}\, \mathbb{I}_{(\theta,\infty)}(x).$$

Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de $X \sim \mathrm{ET}(1, \theta)$. Encontre a FDP de $Y = \min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$.

Exemplo 2. Nós dizemos que uma VA possui uma distribuição *exponencial truncada* de parâmetros $\lambda > 0$ e $\theta > 0$, $X \sim \text{ET}(\lambda, \theta)$, se sua FDP é da forma

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda(x-\theta)}\, \mathbb{I}_{(\theta,\infty)}(x).$$

Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de $X \sim \text{ET}(1, \theta)$. Encontre a FDP de $Y = \min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$.

Exemplos

Primeiramente, é importante saber que, se $X \sim \mathrm{ET}(\lambda, \theta)$, então

Exemplos

Primeiramente, é importante saber que, se $X \sim \mathrm{ET}(\lambda, \theta)$, então

$$F_X(x) = 1 - \exp\left\{-\lambda(x-\theta)\right\},\ \mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda} + \theta,\ \mathrm{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}. \qquad (3)$$

Exemplos

Primeiramente, é importante saber que, se $X \sim \text{ET}(\lambda, \theta)$, então

$$F_X(x) = 1 - \exp\left\{-\lambda(x-\theta)\right\}, \; \mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda} + \theta, \; \text{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}. \qquad (3)$$

Note quem, $X = Z + \theta$, em que $Z \sim \text{exponencial}(\lambda)$.

Exemplos

Primeiramente, é importante saber que, se $X \sim \text{ET}(\lambda, \theta)$, então

$$F_X(x) = 1 - \exp\{-\lambda(x-\theta)\}, \ \mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda} + \theta, \ \text{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}. \qquad (3)$$

Note quem, $X = Z + \theta$, em que $Z \sim$ exponencial(λ).

Exemplos

Para encontrar a distribuição de Y, nós podemos utilizar a técnica da FDA, da seguinte forma

$$
\begin{aligned}
G(y) &= \mathbb{P}\left(Y \leq y\right) = \mathbb{P}\left(\min\left\{X_1, \ldots, X_n\right\} \leq y\right) \\
&= 1 - \mathbb{P}\left(\min\left\{X_1, \ldots, X_n\right\} > y\right) = 1 - \mathbb{P}\left(X_1 > y, \ldots, X_n > y\right) \\
&\overset{\text{Ind.}}{=} 1 - \left[\mathbb{P}\left(X_1 > y\right) \times \cdots \times \mathbb{P}\left(X_n > y\right)\right] \\
&\overset{\text{I.D.}}{=} 1 - \left[\mathbb{P}\left(X_1 > y\right)\right]^n = 1 - \left[1 - \mathbb{P}\left(X_1 \leq y\right)\right]^n \\
&= 1 - \left[1 - F_{X_1}(y)\right]^n \overset{(3)}{=} 1 - \left[\exp\left\{-(y-\theta)\right\}\right]^n \\
&= 1 - \exp\left\{-n(y-\theta)\right\}.
\end{aligned}
$$

Exemplos

Para encontrar a distribuição de Y, nós podemos utilizar a técnica da FDA, da seguinte forma

$$\begin{aligned}
G(y) &= \mathbb{P}\left(Y \leq y\right) = \mathbb{P}\left(\min\left\{X_1, \ldots, X_n\right\} \leq y\right) \\
&= 1 - \mathbb{P}\left(\min\left\{X_1, \ldots, X_n\right\} > y\right) = 1 - \mathbb{P}\left(X_1 > y, \ldots, X_n > y\right) \\
&\stackrel{\text{Ind.}}{=} 1 - \left[\mathbb{P}\left(X_1 > y\right) \times \cdots \times \mathbb{P}\left(X_n > y\right)\right] \\
&\stackrel{\text{I.D.}}{=} 1 - \left[\mathbb{P}\left(X_1 > y\right)\right]^n = 1 - \left[1 - \mathbb{P}\left(X_1 \leq y\right)\right]^n \\
&= 1 - \left[1 - F_{X_1}(y)\right]^n \stackrel{(3)}{=} 1 - \left[\exp\left\{-(y-\theta)\right\}\right]^n \\
&= 1 - \exp\left\{-n(y-\theta)\right\}.
\end{aligned}$$

Logo, $Y \sim \mathrm{ET}(n, \theta)$.

Exemplos

Para encontrar a distribuição de Y, nós podemos utilizar a técnica da FDA, da seguinte forma

$$
\begin{aligned}
G(y) &= \mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}(\min\{X_1, \ldots, X_n\} \leq y) \\
&= 1 - \mathbb{P}(\min\{X_1, \ldots, X_n\} > y) = 1 - \mathbb{P}(X_1 > y, \ldots, X_n > y) \\
&\stackrel{\text{Ind.}}{=} 1 - [\mathbb{P}(X_1 > y) \times \cdots \times \mathbb{P}(X_n > y)] \\
&\stackrel{\text{I.D.}}{=} 1 - [\mathbb{P}(X_1 > y)]^n = 1 - [1 - \mathbb{P}(X_1 \leq y)]^n \\
&= 1 - [1 - F_{X_1}(y)]^n \stackrel{(3)}{=} 1 - [\exp\{-(y - \theta)\}]^n \\
&= 1 - \exp\{-n(y - \theta)\}.
\end{aligned}
$$

Logo, $Y \sim \mathrm{ET}(n, \theta)$.

Roteiro

Amplitude

Novamente, sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ VA IID, com distribuição $\mathcal{D}$, FDP f e FDA F. A VA

$$R = X_{(n)} - X_{(1)}$$

Amplitude

Novamente, sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ VA IID, com distribuição $\mathcal{D}$, FDP f e FDA F. A VA

$$R = X_{(n)} - X_{(1)}$$

é denominada de **amplitude** das VA observadas.

Amplitude

Novamente, sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ VA IID, com distribuição $\mathcal{D}$, FDP f e FDA F. A VA

$$R = X_{(n)} - X_{(1)}$$

é denominada de **amplitude** das VA observadas.

Amplitude

De maneira geral, a distribuição de R pode ser obtida a partir da definição da FDA, da seguinte forma:

$$G(a) = \mathbb{P}(R \leq a) = n \int_{-\infty}^{+\infty} \left[F(x+a) - F(x)\right]^{n-1} f(x)\, dx. \qquad (4)$$

Amplitude

De maneira geral, a distribuição de R pode ser obtida a partir da definição da FDA, da seguinte forma:

$$G(a) = \mathbb{P}(R \leq a) = n \int_{-\infty}^{+\infty} \left[F(x+a) - F(x)\right]^{n-1} f(x)\, dx. \tag{4}$$

A expressão (4) tem forma explícita para poucos casos.

Amplitude

De maneira geral, a distribuição de R pode ser obtida a partir da definição da FDA, da seguinte forma:

$$G(a) = \mathbb{P}(R \leq a) = n \int_{-\infty}^{+\infty} \left[F(x+a) - F(x)\right]^{n-1} f(x)\, dx. \qquad (4)$$

A expressão (4) tem forma explícita para poucos casos.

Amplitude

Observação

A amplitude é bastante utilizada no Controle Estatístico de Qualidade.

Amplitude

Observação

A amplitude é bastante utilizada no Controle Estatístico de Qualidade.

Exemplos

Exemplo 3. Se $X_1, X_2, \ldots, X_n$ são VA IID uniformes no intervalo (0,1), encontre a distribuição de:

$$R = X_{(n)} - X_{(1)}.$$

Exemplos

Exemplo 3. Se $X_1, X_2, \ldots, X_n$ são VA IID uniformes no intervalo (0,1), encontre a distribuição de:

$$R = X_{(n)} - X_{(1)}.$$

Amplitude

De (4), para $0 < a < 1$, nós temos que:

$$
\begin{aligned}
G(a) &= n \int_0^1 [F(x+a) - F(x)]^{n-1} f(x)\,dx \\
&\overset{*}{=} n \int_0^{1-a} [F(x+a) - F(x)]^{n-1}\ dx + n \int_{1-a}^{1} [F(x+a) - F(x)]^{n-1}\ dx \\
&= n \int_0^{1-a} [(x+a) - x]^{n-1}\ dx + n \int_{1-a}^{1} [1 - x]^{n-1}\ dx \\
&= n(1-a)^{n-1} a^{n-1} + a^n.
\end{aligned}
$$

$*$: Lembrando que, $0 < x + a < 1 \Rightarrow x < 1 - a$.

Amplitude

De (4), para $0 < a < 1$, nós temos que:

$$
\begin{aligned}
G(a) &= n\int_0^1 [F(x+a) - F(x)]^{n-1} f(x)\,dx \\
&\overset{*}{=} n\int_0^{1-a} [F(x+a) - F(x)]^{n-1}\ dx + n\int_{1-a}^1 [F(x+a) - F(x)]^{n-1}\ dx \\
&= n\int_0^{1-a} [(x+a) - x]^{n-1}\ dx + n\int_{1-a}^1 [1-x]^{n-1}\ dx \\
&= n(1-a)^{n-1}a^{n-1} + a^n.
\end{aligned}
$$

$*$: Lembrando que, $0 < x + a < 1 \Rightarrow x < 1 - a$.

Amplitude

A FDP de R é obtida derivando $G(a)$, assim:

$$\begin{aligned} g(a) &= \frac{d}{da} G(a) = n(n-1)a^{n-2}(1-a)\,\mathbb{I}_{(0,1)}(a) \\ &= \frac{1}{B(n-1,2)}\, a^{n-2}(1-a)\,\mathbb{I}_{(0,1)}(a). \end{aligned}$$

Amplitude

A FDP de R é obtida derivando $G(a)$, assim:

$$\begin{aligned} g(a) &= \frac{d}{da} G(a) = n(n-1)a^{n-2}(1-a)\,\mathbb{I}_{(0,1)}(a) \\ &= \frac{1}{B(n-1,2)}\, a^{n-2}(1-a)\,\mathbb{I}_{(0,1)}(a). \end{aligned}$$

Logo, $R = X_{(n)} - X_{(1)} \sim$ beta de parâmetros $n-1$ e 2.

Amplitude

A FDP de R é obtida derivando $G(a)$, assim:

$$\begin{aligned} g(a) &= \frac{d}{da}G(a) = n(n-1)a^{n-2}(1-a)\,\mathbb{I}_{(0,1)}(a) \\ &= \frac{1}{B(n-1,2)}\,a^{n-2}(1-a)\,\mathbb{I}_{(0,1)}(a). \end{aligned}$$

Logo, $R = X_{(n)} - X_{(1)} \sim$ beta de parâmetros $n-1$ e 2.

Roteiro

1. Estatísticas de ordem
2. Distribuição das estatísticas de ordem
3. Distribuição da amplitude
4. Bibliografia

Bibliografia

Meyer, P. L. (2017), *Probabilidade: aplicações à Estatística*, 2 edn, Livros Técnicos e Científicos Editora Ltda, Rio de Janeiro.

Ross, S. (2010), *Probabilidade: um curso moderno com aplicações*, 8 edn, Bookman, Porto Alegre.

Ross, S. (2019), *A first course in probability*, 10 edn. global edn, Pearson Education, Malaysia.

Obrigado!

✉ tiago.magalhaes@ufjf.br

🖱 ufjf.br/tiago_magalhaes

🌍 Departamento de Estatística, Sala 319