

Distribuições amostrais

Tiago M. Magalhães

Departamento de Estatística - ICE-UFJF

Juiz de Fora, 03 de outubro de 2025



Roteiro

- 1 Média amostral
- 2 Variância amostral
- 3 Distribuição conjunta da média e da variância amostral
- 4 Duas populações
- 5 Bibliografia



Roteiro

1 Média amostral

2 Variância amostral

3 Distribuição conjunta da média e da variância amostral

4 Duas populações

5 Bibliografia



Média amostral

Sejam X_1, X_2, \dots, X_n variáveis aleatórias (VA) independentes e identicamente distribuídas (IID), com função distribuição \mathcal{D} , valor esperado μ e variância σ^2 ,



Média amostral

Sejam X_1, X_2, \dots, X_n variáveis aleatórias (VA) independentes e identicamente distribuídas (IID), com função distribuição \mathcal{D} , valor esperado μ e variância σ^2 , isto é, $X_i \sim \mathcal{D}(\mu, \sigma^2)$, $i = 1, 2, \dots, n$.



Média amostral

Sejam X_1, X_2, \dots, X_n variáveis aleatórias (VA) independentes e identicamente distribuídas (IID), com função distribuição \mathcal{D} , valor esperado μ e variância σ^2 , isto é, $X_i \sim \mathcal{D}(\mu, \sigma^2)$, $i = 1, 2, \dots, n$. Diz-se que tal sequência de VA constitui uma amostra da distribuição \mathcal{D} .



Média amostral

Sejam X_1, X_2, \dots, X_n variáveis aleatórias (VA) independentes e identicamente distribuídas (IID), com função distribuição \mathcal{D} , valor esperado μ e variância σ^2 , isto é, $X_i \sim \mathcal{D}(\mu, \sigma^2)$, $i = 1, 2, \dots, n$. Diz-se que tal sequência de VA constitui uma amostra da distribuição \mathcal{D} .



Média amostral

A quantidade,

$$\bar{X} = \sum_{i=1}^n \frac{X_i}{n} \quad (1)$$

é chamada de média amostral.



Média amostral

Notem que,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\bar{X}) &= \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n \frac{X_i}{n}\right) = \frac{1}{n} \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mu = \mu,\end{aligned}$$



Média amostral

Notem que,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\bar{X}) &= \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n \frac{X_i}{n}\right) = \frac{1}{n} \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mu = \mu,\end{aligned}$$

isto é, o valor esperado de uma média amostral é μ , a média da distribuição.



Média amostral

Notem que,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\bar{X}) &= \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n \frac{X_i}{n}\right) = \frac{1}{n} \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mu = \mu,\end{aligned}$$

isto é, o valor esperado de uma média amostral é μ , a média da distribuição. Quando a média da distribuição é desconhecida, a média amostral é frequentemente utilizada para estimá-la.



Média amostral

Notem que,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\bar{X}) &= \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n \frac{X_i}{n}\right) = \frac{1}{n} \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mu = \mu,\end{aligned}$$

isto é, o valor esperado de uma média amostral é μ , a média da distribuição. Quando a média da distribuição é desconhecida, a média amostral é frequentemente utilizada para estimá-la.



Média amostral

Adicionalmente,

$$\text{Var}(\bar{X}) = \text{Var}\left(\sum_{i=1}^n \frac{X_i}{n}\right) = \left(\frac{1}{n}\right)^2 \text{Var}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)$$

$$\stackrel{\text{Ind.}}{=} \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}.$$



Média amostral

Adicionalmente,

$$\text{Var}(\bar{X}) = \text{Var}\left(\sum_{i=1}^n \frac{X_i}{n}\right) = \left(\frac{1}{n}\right)^2 \text{Var}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)$$

$$\stackrel{\text{Ind.}}{=} \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}.$$



Desvios

As quantidades,

$$X_i - \bar{X},$$

$i = 1, 2, \dots, n,$



Desvios

As quantidades,

$$X_i - \bar{X},$$

$i = 1, 2, \dots, n$, são chamadas de desvios e elas são iguais às diferenças entre os valores individuais dos dados e a média amostral.



Desvios

As quantidades,

$$X_i - \bar{X},$$

$i = 1, 2, \dots, n$, são chamadas de desvios e elas são iguais às diferenças entre os valores individuais dos dados e a média amostral.



Desvios

E nós temos ainda a seguinte relação,

$$\begin{aligned}\text{Cov}(X_i - \bar{X}, \bar{X}) &= \text{Cov}(X_i, \bar{X}) - \text{Cov}(\bar{X}, \bar{X}) \\ &= \text{Cov}\left(X_i, \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j\right) - \text{Var}(\bar{X}) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \text{Cov}(X_i, X_j) - \frac{\sigma^2}{n} \\ &= \frac{\sigma^2}{n} - \frac{\sigma^2}{n} = 0.\end{aligned}\tag{2}$$



Desvios

E nós temos ainda a seguinte relação,

$$\begin{aligned}\text{Cov}(X_i - \bar{X}, \bar{X}) &= \text{Cov}(X_i, \bar{X}) - \text{Cov}(\bar{X}, \bar{X}) \\ &= \text{Cov}\left(X_i, \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j\right) - \text{Var}(\bar{X}) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \text{Cov}(X_i, X_j) - \frac{\sigma^2}{n} \\ &= \frac{\sigma^2}{n} - \frac{\sigma^2}{n} = 0.\end{aligned}\tag{2}$$



Desvios

Embora \bar{X} e o desvio $X_i - \bar{X}$ sejam não correlacionados, eles não são, em geral, independentes.



Desvios

Embora \bar{X} e o desvio $X_i - \bar{X}$ sejam não correlacionados, eles não são, em geral, independentes.

Entretanto, no caso especial em que as VA X_i são VA normais,



Desvios

Embora \bar{X} e o desvio $X_i - \bar{X}$ sejam não correlacionados, eles não são, em geral, independentes.

Entretanto, no caso especial em que as VA X_i são VA normais, \bar{X} é independente de toda a sequência de desvios $X_i - \bar{X}$, $i = 1, 2, \dots, n$.



Desvios

Embora \bar{X} e o desvio $X_i - \bar{X}$ sejam não correlacionados, eles não são, em geral, independentes.

Entretanto, no caso especial em que as VA X_i são VA normais, \bar{X} é independente de toda a sequência de desvios $X_i - \bar{X}$, $i = 1, 2, \dots, n$.



Roteiro

1 Média amostral

2 Variância amostral

3 Distribuição conjunta da média e da variância amostral

4 Duas populações

5 Bibliografia



Variância amostral

Sejam $X_i \sim \mathcal{D}(\mu, \sigma^2)$, $i = 1, 2, \dots, n$ e \bar{X} , a média amostral, definida em (1). A VA,

$$S^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(X_i - \bar{X})^2}{n-1} \quad (3)$$

é chamada de variância amostral.



Variância amostral

Sejam $X_i \sim \mathcal{D}(\mu, \sigma^2)$, $i = 1, 2, \dots, n$ e \bar{X} , a média amostral, definida em (1). A VA,

$$S^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(X_i - \bar{X})^2}{n-1} \quad (3)$$

é chamada de variância amostral.



Variância amostral

Nós podemos escrever (3) da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}(n-1)S^2 &= \sum_{i=1}^n (X_i - \mu + \mu - \bar{X})^2 = \sum_{i=1}^n [(X_i - \mu) - (\bar{X} - \mu)]^2 \\&= \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 - 2(\bar{X} - \mu) \sum_{i=1}^n (X_i - \mu) + \sum_{i=1}^n (\bar{X} - \mu)^2 \\&= \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 - 2(\bar{X} - \mu)n(\bar{X} - \mu) + n(\bar{X} - \mu)^2 \\&= \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 - n(\bar{X} - \mu)^2.\end{aligned}\tag{4}$$



Variância amostral

Nós podemos escrever (3) da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}(n - 1) S^2 &= \sum_{i=1}^n (X_i - \mu + \mu - \bar{X})^2 = \sum_{i=1}^n [(X_i - \mu) - (\bar{X} - \mu)]^2 \\&= \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 - 2(\bar{X} - \mu) \sum_{i=1}^n (X_i - \mu) + \sum_{i=1}^n (\bar{X} - \mu)^2 \\&= \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 - 2(\bar{X} - \mu)n(\bar{X} - \mu) + n(\bar{X} - \mu)^2 \\&= \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 - n(\bar{X} - \mu)^2.\end{aligned}\tag{4}$$



Variância amostral

Calculando a esperança da equação anterior, nós obtemos:

$$\begin{aligned}(n - 1) \mathbb{E}(S^2) &= \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[(X_i - \mu)^2] - n\mathbb{E}[(\bar{X} - \mu)^2] \\&= n\sigma^2 - n\text{Var}(\bar{X}) = (n - 1)\sigma^2 \\ \Rightarrow \mathbb{E}(S^2) &= \sigma^2.\end{aligned}$$



Variância amostral

Calculando a esperança da equação anterior, nós obtemos:

$$\begin{aligned}(n - 1) \mathbb{E}(S^2) &= \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[(X_i - \mu)^2] - n\mathbb{E}[(\bar{X} - \mu)^2] \\&= n\sigma^2 - n\text{Var}(\bar{X}) = (n - 1)\sigma^2 \\ \Rightarrow \mathbb{E}(S^2) &= \sigma^2.\end{aligned}$$

Logo, o valor esperado da variância amostral é a variância da distribuição \mathcal{D} .



Variância amostral

Calculando a esperança da equação anterior, nós obtemos:

$$\begin{aligned}(n - 1) \mathbb{E}(S^2) &= \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[(X_i - \mu)^2] - n\mathbb{E}[(\bar{X} - \mu)^2] \\&= n\sigma^2 - n\text{Var}(\bar{X}) = (n - 1)\sigma^2 \\ \Rightarrow \mathbb{E}(S^2) &= \sigma^2.\end{aligned}$$

Logo, o valor esperado da variância amostral é a variância da distribuição \mathcal{D} .



Roteiro

- 1 Média amostral
- 2 Variância amostral
- 3 Distribuição conjunta da média e da variância amostral
- 4 Duas populações
- 5 Bibliografia



Distribuição conjunta da média e da variância amostral

Sejam X_1, X_2, \dots, X_n VA IID normais com valor esperado μ e variância σ^2 .

Seja também \bar{X} , a média amostral, definida em (1).



Distribuição conjunta da média e da variância amostral

Sejam X_1, X_2, \dots, X_n VA IID normais com valor esperado μ e variância σ^2 .

Seja também \bar{X} , a média amostral, definida em (1). Nós temos que,

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right). \quad (5)$$



Distribuição conjunta da média e da variância amostral

Sejam X_1, X_2, \dots, X_n VA IID normais com valor esperado μ e variância σ^2 .

Seja também \bar{X} , a média amostral, definida em (1). Nós temos que,

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right). \quad (5)$$



Distribuição conjunta da média e da variância amostral

Para provar (5), nós podemos utilizar a função geradora de momentos (FGM). Lembrando que a FGM de $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $i = 1, 2, \dots, n$, é dada por:

$$M_{X_i}(t) = \exp \left\{ \mu t + \frac{1}{2} \sigma^2 t^2 \right\}.$$



Distribuição conjunta da média e da variância amostral

Para provar (5), nós podemos utilizar a função geradora de momentos (FGM). Lembrando que a FGM de $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $i = 1, 2, \dots, n$, é dada por:

$$M_{X_i}(t) = \exp \left\{ \mu t + \frac{1}{2} \sigma^2 t^2 \right\}.$$



Distribuição conjunta da média e da variância amostral

A FGM de \bar{X} , $M_{\bar{X}}(t)$, é dada por:

$$\begin{aligned}M_{\bar{X}}(t) &= \mathbb{E}\left[e^{t\bar{X}}\right] = \mathbb{E}\left[e^{t\sum_{i=1}^n \frac{X_i}{n}}\right] = \mathbb{E}\left[e^{\frac{1}{n}tX_1} \times e^{\frac{1}{n}tX_2} \times \cdots \times e^{\frac{1}{n}tX_n}\right] \\&\stackrel{\text{Ind.}}{=} \mathbb{E}\left[e^{\frac{1}{n}tX_1}\right] \times \mathbb{E}\left[e^{\frac{1}{n}tX_2}\right] \times \cdots \times \mathbb{E}\left[e^{\frac{1}{n}tX_n}\right] \\&= M_{X_1}\left(\frac{t}{n}\right) \times M_{X_2}\left(\frac{t}{n}\right) \times \cdots \times M_{X_n}\left(\frac{t}{n}\right) \\&\stackrel{\text{I.D.}}{=} \left[M_{X_1}\left(\frac{t}{n}\right)\right]^n = \left\{\exp\left[\mu\left(\frac{t}{n}\right) + \frac{\sigma^2}{2}\left(\frac{t}{n}\right)^2\right]\right\}^n \\&= \exp\left\{n\left[\mu\left(\frac{t}{n}\right) + \frac{\sigma^2}{2}\left(\frac{t}{n}\right)^2\right]\right\} = \exp\left\{\mu t + \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{n}t^2\right\}.\end{aligned}$$



Distribuição conjunta da média e da variância amostral

A FGM de \bar{X} , $M_{\bar{X}}(t)$, é dada por:

$$\begin{aligned} M_{\bar{X}}(t) &= \mathbb{E}\left[e^{t\bar{X}}\right] = \mathbb{E}\left[e^{t\sum_{i=1}^n \frac{X_i}{n}}\right] = \mathbb{E}\left[e^{\frac{1}{n}tX_1} \times e^{\frac{1}{n}tX_2} \times \cdots \times e^{\frac{1}{n}tX_n}\right] \\ &\stackrel{\text{Ind.}}{=} \mathbb{E}\left[e^{\frac{1}{n}tX_1}\right] \times \mathbb{E}\left[e^{\frac{1}{n}tX_2}\right] \times \cdots \times \mathbb{E}\left[e^{\frac{1}{n}tX_n}\right] \\ &= M_{X_1}\left(\frac{t}{n}\right) \times M_{X_2}\left(\frac{t}{n}\right) \times \cdots \times M_{X_n}\left(\frac{t}{n}\right) \\ &\stackrel{\text{I.D.}}{=} \left[M_{X_1}\left(\frac{t}{n}\right)\right]^n = \left\{\exp\left[\mu\left(\frac{t}{n}\right) + \frac{\sigma^2}{2}\left(\frac{t}{n}\right)^2\right]\right\}^n \\ &= \exp\left\{n\left[\mu\left(\frac{t}{n}\right) + \frac{\sigma^2}{2}\left(\frac{t}{n}\right)^2\right]\right\} = \exp\left\{\mu t + \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{n}t^2\right\}. \end{aligned}$$

Logo, $\bar{X} \sim N\left(\mu, \sigma^2/n\right)$.



Distribuição conjunta da média e da variância amostral

A FGM de \bar{X} , $M_{\bar{X}}(t)$, é dada por:

$$\begin{aligned} M_{\bar{X}}(t) &= \mathbb{E}\left[e^{t\bar{X}}\right] = \mathbb{E}\left[e^{t\sum_{i=1}^n \frac{X_i}{n}}\right] = \mathbb{E}\left[e^{\frac{1}{n}tX_1} \times e^{\frac{1}{n}tX_2} \times \cdots \times e^{\frac{1}{n}tX_n}\right] \\ &\stackrel{\text{Ind.}}{=} \mathbb{E}\left[e^{\frac{1}{n}tX_1}\right] \times \mathbb{E}\left[e^{\frac{1}{n}tX_2}\right] \times \cdots \times \mathbb{E}\left[e^{\frac{1}{n}tX_n}\right] \\ &= M_{X_1}\left(\frac{t}{n}\right) \times M_{X_2}\left(\frac{t}{n}\right) \times \cdots \times M_{X_n}\left(\frac{t}{n}\right) \\ &\stackrel{\text{I.D.}}{=} \left[M_{X_1}\left(\frac{t}{n}\right)\right]^n = \left\{\exp\left[\mu\left(\frac{t}{n}\right) + \frac{\sigma^2}{2}\left(\frac{t}{n}\right)^2\right]\right\}^n \\ &= \exp\left\{n\left[\mu\left(\frac{t}{n}\right) + \frac{\sigma^2}{2}\left(\frac{t}{n}\right)^2\right]\right\} = \exp\left\{\mu t + \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{n}t^2\right\}. \end{aligned}$$

Logo, $\bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2/n)$.



Distribuição conjunta da média e da variância amostral

Da mesma forma, sejam $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $i = 1, 2, \dots, n$ e S^2 , a variância amostral, como definida em (3). Para encontrar a distribuição de S^2 , primeiramente, nós precisamos reescrevê-lo da seguinte maneira, ver (4):



Distribuição conjunta da média e da variância amostral

Da mesma forma, sejam $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $i = 1, 2, \dots, n$ e S^2 , a variância amostral, como definida em (3). Para encontrar a distribuição de S^2 , primeiramente, nós precisamos reescrevê-lo da seguinte maneira, ver (4):

$$\begin{aligned}(n-1)S^2 &= \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 - n(\bar{X} - \mu)^2 \\ \Rightarrow \frac{1}{\sigma^2}(n-1)S^2 &= \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 - \frac{1}{\sigma^2} n (\bar{X} - \mu)^2 \\ \Rightarrow \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - \mu}{\sigma} \right)^2 - \left(\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \right)^2.\end{aligned}$$



Distribuição conjunta da média e da variância amostral

Da mesma forma, sejam $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $i = 1, 2, \dots, n$ e S^2 , a variância amostral, como definida em (3). Para encontrar a distribuição de S^2 , primeiramente, nós precisamos reescrevê-lo da seguinte maneira, ver (4):

$$\begin{aligned}(n-1)S^2 &= \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 - n(\bar{X} - \mu)^2 \\ \Rightarrow \frac{1}{\sigma^2}(n-1)S^2 &= \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 - \frac{1}{\sigma^2} n(\bar{X} - \mu)^2 \\ \Rightarrow \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - \mu}{\sigma} \right)^2 - \left(\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \right)^2.\end{aligned}$$



Distribuição conjunta da média e da variância amostral

Como $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $i = 1, 2, \dots, n$, $(X_i - \mu)/\sigma \sim N(0, 1)$, $[(X_i - \mu)/\sigma]^2 \sim$ qui-quadrado, com 1 grau de liberdade (visto em Cálculo de Probabilidades I) e $\sum_{i=1}^n [(X_i - \mu)/\sigma]^2 \sim$ qui-quadrado, com n graus de liberdade.

E, como $\bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2/n)$, logo $\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)/\sigma \sim N(0, 1)$ e $[\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)/\sigma]^2 \sim$ qui-quadrado, com 1 grau de liberdade.



Distribuição conjunta da média e da variância amostral

Como $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $i = 1, 2, \dots, n$, $(X_i - \mu)/\sigma \sim N(0, 1)$, $[(X_i - \mu)/\sigma]^2 \sim$ qui-quadrado, com 1 grau de liberdade (visto em Cálculo de Probabilidades I) e $\sum_{i=1}^n [(X_i - \mu)/\sigma]^2 \sim$ qui-quadrado, com n graus de liberdade.

E, como $\bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2/n)$, logo $\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)/\sigma \sim N(0, 1)$ e $[\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)/\sigma]^2 \sim$ qui-quadrado, com 1 grau de liberdade.



Distribuição conjunta da média e da variância amostral

Portanto,

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - \bar{X}}{\sigma} \right)^2 \sim \text{qui-quadrado}(n-1) \quad (\chi_{n-1}^2). \quad (6)$$



Distribuição conjunta da média e da variância amostral

Portanto,

$$\frac{(n - 1) S^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - \bar{X}}{\sigma} \right)^2 \sim \text{qui-quadrado}(n - 1) \quad (\chi_{n-1}^2). \quad (6)$$

Observação: Por (2),



Distribuição conjunta da média e da variância amostral

Portanto,

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - \bar{X}}{\sigma} \right)^2 \sim \text{qui-quadrado}(n-1) \quad (\chi_{n-1}^2). \quad (6)$$

Observação: Por (2), \bar{X} e S^2 são VA independentes.



Distribuição conjunta da média e da variância amostral

Portanto,

$$\frac{(n - 1) S^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - \bar{X}}{\sigma} \right)^2 \sim \text{qui-quadrado}(n - 1) \quad (\chi_{n-1}^2). \quad (6)$$

Observação: Por (2), \bar{X} e S^2 são VA independentes.



Distribuição conjunta da média e da variância amostral

Resultado

Sejam X_1, X_2, \dots, X_n VA IID normais com valor esperado μ e variância σ^2 , então a média amostral \bar{X} e a variância amostral S^2 são independentes.



Distribuição conjunta da média e da variância amostral

Resultado

Sejam X_1, X_2, \dots, X_n VA IID normais com valor esperado μ e variância σ^2 , então a média amostral \bar{X} e a variância amostral S^2 são independentes. \bar{X} é uma VA normal de média μ e variância σ^2/n e S^2 é uma VA qui-quadrado com $n - 1$ graus de liberdade.



Distribuição conjunta da média e da variância amostral

Resultado

Sejam X_1, X_2, \dots, X_n VA IID normais com valor esperado μ e variância σ^2 , então a média amostral \bar{X} e a variância amostral S^2 são independentes. \bar{X} é uma VA normal de média μ e variância σ^2/n e S^2 é uma VA qui-quadrado com $n - 1$ graus de liberdade.



Roteiro

- 1 Média amostral
- 2 Variância amostral
- 3 Distribuição conjunta da média e da variância amostral
- 4 Duas populações
- 5 Bibliografia



Duas populações

Sejam duas amostras independentes, tais que $X_{11}, X_{12}, \dots, X_{1n_1}$ são VA IID normais com valor esperado μ_1 e variância σ_1^2 e $X_{21}, X_{22}, \dots, X_{2n_2}$ são VA IID normais com valor esperado μ_2 e variância σ_2^2 . Por (6), nós temos que,

$$Q_1 = \frac{(n_1 - 1) S_1^2}{\sigma_1^2} \sim \chi_{n_1 - 1}^2 \text{ e } Q_2 = \frac{(n_2 - 1) S_2^2}{\sigma_2^2} \sim \chi_{n_2 - 1}^2,$$



Duas populações

Sejam duas amostras independentes, tais que $X_{11}, X_{12}, \dots, X_{1n_1}$ são VA IID normais com valor esperado μ_1 e variância σ_1^2 e $X_{21}, X_{22}, \dots, X_{2n_2}$ são VA IID normais com valor esperado μ_2 e variância σ_2^2 . Por (6), nós temos que,

$$Q_1 = \frac{(n_1 - 1) S_1^2}{\sigma_1^2} \sim \chi_{n_1 - 1}^2 \text{ e } Q_2 = \frac{(n_2 - 1) S_2^2}{\sigma_2^2} \sim \chi_{n_2 - 1}^2,$$

em que S_1^2 e S_2^2 são as variâncias amostrais das populações 1 e 2, respectivamente.



Duas populações

Sejam duas amostras independentes, tais que $X_{11}, X_{12}, \dots, X_{1n_1}$ são VA IID normais com valor esperado μ_1 e variância σ_1^2 e $X_{21}, X_{22}, \dots, X_{2n_2}$ são VA IID normais com valor esperado μ_2 e variância σ_2^2 . Por (6), nós temos que,

$$Q_1 = \frac{(n_1 - 1) S_1^2}{\sigma_1^2} \sim \chi_{n_1 - 1}^2 \text{ e } Q_2 = \frac{(n_2 - 1) S_2^2}{\sigma_2^2} \sim \chi_{n_2 - 1}^2,$$

em que S_1^2 e S_2^2 são as variâncias amostrais das populações 1 e 2, respectivamente.



Duas populações

Um resultado muito importante diz que, a razão entre as razões das VA Q_1 e Q_2 por seus respectivos graus de liberdade tem distribuição F de Fisher-Snedecor com $n_1 - 1$ e $n_2 - 1$ graus de liberdade, isto é,

$$\frac{Q_1/(n_1 - 1)}{Q_2/(n_2 - 1)} = \frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1). \quad (7)$$



Duas populações

Um resultado muito importante diz que, a razão entre as razões das VA Q_1 e Q_2 por seus respectivos graus de liberdade tem distribuição F de Fisher-Snedecor com $n_1 - 1$ e $n_2 - 1$ graus de liberdade, isto é,

$$\frac{Q_1/(n_1 - 1)}{Q_2/(n_2 - 1)} = \frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1). \quad (7)$$

A razão (7) e, consequentemente, a distribuição F são frequentemente utilizadas na **análise de variância**.



Duas populações

Um resultado muito importante diz que, a razão entre as razões das VA Q_1 e Q_2 por seus respectivos graus de liberdade tem distribuição F de Fisher-Snedecor com $n_1 - 1$ e $n_2 - 1$ graus de liberdade, isto é,

$$\frac{Q_1/(n_1 - 1)}{Q_2/(n_2 - 1)} = \frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1). \quad (7)$$

A razão (7) e, consequentemente, a distribuição F são frequentemente utilizadas na **análise de variância**.



Roteiro

- 1 Média amostral
- 2 Variância amostral
- 3 Distribuição conjunta da média e da variância amostral
- 4 Duas populações
- 5 Bibliografia



Bibliografia

- Meyer, P. L. (2017), *Probabilidade: aplicações à Estatística*, 2 edn, Livros Técnicos e Científicos Editora Ltda, Rio de Janeiro.
- Ross, S. (2010), *Probabilidade: um curso moderno com aplicações*, 8 edn, Bookman, Porto Alegre.
- Ross, S. (2019), *A first course in probability*, 10 edn. global edn, Pearson Education, Malaysia.



Obrigado!

✉ tiago.magalhaes@ufjf.br

✉ ufjf.br/tiago_magalhaes

🌐 Departamento de Estatística, Sala 319

