

Vetores aleatórios

Tiago M. Magalhães

Departamento de Estatística - ICE-UFJF

Juiz de Fora, 19 de setembro de 2025



Roteiro

- 1 Vetores aleatórios
- 2 Função (densidade) de probabilidades
- 3 Função de distribuição acumulada
- 4 Exemplos
- 5 Bibliografia



Roteiro

- 1 Vetores aleatórios
- 2 Função (densidade) de probabilidades
- 3 Função de distribuição acumulada
- 4 Exemplos
- 5 Bibliografia



Vetores aleatórios

Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade e n funções, $X_1(\omega)$, $X_2(\omega)$, $\dots$, $X_n(\omega)$, cada uma associando um número real a cada resultado $\omega \in \Omega$.



Vetores aleatórios

Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade e n funções, $X_1(\omega)$, $X_2(\omega)$, $\dots$, $X_n(\omega)$, cada uma associando um número real a cada resultado $\omega \in \Omega$.

Dessa forma, nós denominaremos $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)^\top$ como uma variável aleatória n -dimensional, multidimensional, multivariada ou, ainda, de um **vetor aleatório**.



Vetores aleatórios

Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade e n funções, $X_1(\omega)$, $X_2(\omega)$, $\dots$, $X_n(\omega)$, cada uma associando um número real a cada resultado $\omega \in \Omega$.

Dessa forma, nós denominaremos $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)^\top$ como uma variável aleatória n -dimensional, multidimensional, multivariada ou, ainda, de um **vetor aleatório**.



Vetores aleatórios

Sem perda de generalidade e para simplificar os enunciados, nós iremos apresentar os conceitos e as definições para o caso de **variáveis aleatórias bidimensionais** $(X_1, X_2)^\top$ ou $(X, Y)^\top$.



Vetores aleatórios

Sem perda de generalidade e para simplificar os enunciados, nós iremos apresentar os conceitos e as definições para o caso de **variáveis aleatórias bidimensionais** $(X_1, X_2)^\top$ ou $(X, Y)^\top$.



Variável aleatória discreta bidimensional

O vetor $(X, Y)^T$ será uma **variável aleatória discreta bidimensional** se os valores possíveis (suporte) de $(X, Y)^T$ forem finitos ou infinitos numeráveis,



Variável aleatória discreta bidimensional

O vetor $(X, Y)^T$ será uma **variável aleatória discreta bidimensional** se os valores possíveis (suporte) de $(X, Y)^T$ forem finitos ou infinitos numeráveis, isto é, os valores possíveis de $(X, Y)^T$ possam ser representados por (x, y) , $x \in \mathbb{Z}$ e $y \in \mathbb{Z}$.



Variável aleatória discreta bidimensional

O vetor $(X, Y)^\top$ será uma **variável aleatória discreta bidimensional** se os valores possíveis (suporte) de $(X, Y)^\top$ forem finitos ou infinitos numeráveis, isto é, os valores possíveis de $(X, Y)^\top$ possam ser representados por (x, y) , $x \in \mathbb{Z}$ e $y \in \mathbb{Z}$.



Variável aleatória contínua bidimensional

O vetor $(X, Y)^T$ será uma **variável aleatória contínua bidimensional** se $(X, Y)^T$ puder tomar todos os valores em algum conjunto não numerável do plano euclidiano.



Variável aleatória contínua bidimensional

O vetor $(X, Y)^T$ será uma **variável aleatória contínua bidimensional** se $(X, Y)^T$ puder tomar todos os valores em algum conjunto não numerável do plano euclidiano.



Variável aleatória bidimensional

Observação

O vetor $(X, Y)^T$ pode ser composto por uma variável aleatória discreta e uma variável aleatória contínua.

Variável aleatória bidimensional

Observação

O vetor $(X, Y)^T$ pode ser composto por uma variável aleatória discreta e uma variável aleatória contínua.

Roteiro

- 1 Vetores aleatórios
- 2 Função (densidade) de probabilidades
- 3 Função de distribuição acumulada
- 4 Exemplos
- 5 Bibliografia



Função de probabilidades

Seja $(X, Y)^{\top}$ uma variável aleatória discreta bidimensional.



Função de probabilidades

Seja $(X, Y)^T$ uma variável aleatória discreta bidimensional. A cada resultado possível (x, y) associaremos um número $p(x, y)$ representando $\mathbb{P}(X = x, Y = y)$



Função de probabilidades

Seja $(X, Y)^T$ uma variável aleatória discreta bidimensional. A cada resultado possível (x, y) associaremos um número $p(x, y)$ representando $\mathbb{P}(X = x, Y = y)$ e satisfazendo às seguintes condições:



Função de probabilidades

Seja $(X, Y)^T$ uma variável aleatória discreta bidimensional. A cada resultado possível (x, y) associaremos um número $p(x, y)$ representando $\mathbb{P}(X = x, Y = y)$ e satisfazendo às seguintes condições:

- $p(x, y) \geq 0$, para todo (x, y) ;



Função de probabilidades

Seja $(X, Y)^T$ uma variável aleatória discreta bidimensional. A cada resultado possível (x, y) associaremos um número $p(x, y)$ representando $\mathbb{P}(X = x, Y = y)$ e satisfazendo às seguintes condições:

- $p(x, y) \geq 0$, para todo (x, y) ;
- $\sum_{y=-\infty}^{+\infty} \sum_{x=-\infty}^{+\infty} p(x, y) = 1$.



Função de probabilidades

Seja $(X, Y)^T$ uma variável aleatória discreta bidimensional. A cada resultado possível (x, y) associaremos um número $p(x, y)$ representando $\mathbb{P}(X = x, Y = y)$ e satisfazendo às seguintes condições:

- $p(x, y) \geq 0$, para todo (x, y) ;
- $\sum_{y=-\infty}^{+\infty} \sum_{x=-\infty}^{+\infty} p(x, y) = 1$.



Função de probabilidades

A função p definida para todo (x, y) no contradomínio de $(X, Y)^T$ é denominada **função de probabilidade** de $(X, Y)^T$. O conjunto dos termos $[x, y, p(x, y)]$, $x \in \mathbb{Z}$ e $y \in \mathbb{Z}$,



Função de probabilidades

A função p definida para todo (x, y) no contradomínio de $(X, Y)^T$ é denominada **função de probabilidade** de $(X, Y)^T$. O conjunto dos termos $[x, y, p(x, y)]$, $x \in \mathbb{Z}$ e $y \in \mathbb{Z}$, é, algumas vezes, denominado distribuição de probabilidade de $(X, Y)^T$.



Função de probabilidades

A função p definida para todo (x, y) no contradomínio de $(X, Y)^T$ é denominada **função de probabilidade** de $(X, Y)^T$. O conjunto dos termos $[x, y, p(x, y)]$, $x \in \mathbb{Z}$ e $y \in \mathbb{Z}$, é, algumas vezes, denominado distribuição de probabilidade de $(X, Y)^T$.



Função densidade de probabilidade

Seja $(X, Y)^T$ uma variável aleatória contínua tomando todos os valores em alguma região R do plano euclidiano.



Função densidade de probabilidade

Seja $(X, Y)^T$ uma variável aleatória contínua tomando todos os valores em alguma região R do plano euclidiano. A **função densidade de probabilidade conjunta** (FDP) f é uma função que satisfaz às seguintes condições:



Função densidade de probabilidade

Seja $(X, Y)^T$ uma variável aleatória contínua tomando todos os valores em alguma região R do plano euclidiano. A **função densidade de probabilidade conjunta** (FDP) f é uma função que satisfaz às seguintes condições:

- $f(x, y) \geq 0$, para todo $(x, y) \in R$;



Função densidade de probabilidade

Seja $(X, Y)^T$ uma variável aleatória contínua tomando todos os valores em alguma região R do plano euclidiano. A **função densidade de probabilidade conjunta** (FDP) f é uma função que satisfaz às seguintes condições:

- $f(x, y) \geq 0$, para todo $(x, y) \in R$;
- $\int \int_R f(x, y) dx dy = 1$.



Função densidade de probabilidade

Seja $(X, Y)^T$ uma variável aleatória contínua tomando todos os valores em alguma região R do plano euclidiano. A **função densidade de probabilidade conjunta** (FDP) f é uma função que satisfaz às seguintes condições:

- $f(x, y) \geq 0$, para todo $(x, y) \in R$;
- $\int \int_R f(x, y) dx dy = 1$.



Roteiro

- 1 Vetores aleatórios
- 2 Função (densidade) de probabilidades
- 3 Função de distribuição acumulada**
- 4 Exemplos
- 5 Bibliografia



Função de distribuição acumulada

Seja $(X, Y)^T$ uma variável aleatória bidimensional.



Função de distribuição acumulada

Seja $(X, Y)^T$ uma variável aleatória bidimensional. A **função de distribuição acumulada (FDA)** F da variável aleatória bidimensional $(X, Y)^T$ é definida por



Função de distribuição acumulada

Seja $(X, Y)^T$ uma variável aleatória bidimensional. A **função de distribuição acumulada** (FDA) F da variável aleatória bidimensional $(X, Y)^T$ é definida por

$$F(x, y) = \mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y).$$



Função de distribuição acumulada

Seja $(X, Y)^T$ uma variável aleatória bidimensional. A **função de distribuição acumulada** (FDA) F da variável aleatória bidimensional $(X, Y)^T$ é definida por

$$F(x, y) = \mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y).$$



Função de distribuição acumulada

A FDA de uma variável aleatória bidimensional $(X, Y)^T$ tem propriedades análogas de uma FDA unidimensional. Entre elas, se F for a FDA de uma variável aleatória bidimensional com FDP f ,



Função de distribuição acumulada

A FDA de uma variável aleatória bidimensional $(X, Y)^T$ tem propriedades análogas de uma FDA unidimensional. Entre elas, se F for a FDA de uma variável aleatória bidimensional com FDP f , então

$$\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} = f(x, y),$$

sempre que F for derivável.



Função de distribuição acumulada

A FDA de uma variável aleatória bidimensional $(X, Y)^T$ tem propriedades análogas de uma FDA unidimensional. Entre elas, se F for a FDA de uma variável aleatória bidimensional com FDP f , então

$$\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} = f(x, y),$$

sempre que F for derivável.



Roteiro

- 1 Vetores aleatórios
- 2 Função (densidade) de probabilidades
- 3 Função de distribuição acumulada
- 4 Exemplos**
- 5 Bibliografia



Exemplos

Exemplo 1. Suponhamos que a variável aleatória contínua bidimensional $(X, Y)^\top$ tenha FDP conjunta dada por

$$f(x, y) = x^2 + \frac{xy}{3} \mathbb{I}_{[0,1]}(x) \mathbb{I}_{[0,2]}(y). \quad (1)$$

- ① Mostre que $f(x, y)$ em (1) é uma FDP conjunta.
- ② Calcule a probabilidade de $B = \{X + Y \geq 1\}$.



Exemplos

Exemplo 1. Suponhamos que a variável aleatória contínua bidimensional $(X, Y)^\top$ tenha FDP conjunta dada por

$$f(x, y) = x^2 + \frac{xy}{3} \mathbb{I}_{[0,1]}(x) \mathbb{I}_{[0,2]}(y). \quad (1)$$

- ① Mostre que $f(x, y)$ em (1) é uma FDP conjunta.
- ② Calcule a probabilidade de $B = \{X + Y \geq 1\}$.



Exemplos

Exemplo 2. Suponhamos que a variável aleatória contínua bidimensional $(X, Y)^T$ tenha FDP conjunta dada por

$$\begin{aligned} f(x, y) &= 2 \exp\{-(x + 2y)\} \mathbb{I}_{\mathbb{R}_+^2}(x, y) \\ &= 2e^{-x}e^{-2y} \mathbb{I}_{(0, +\infty)}(x) \mathbb{I}_{(0, +\infty)}(y). \end{aligned}$$

Calcular:

- ① $\mathbb{P}(X > 1, Y < 1)$;
- ② $\mathbb{P}(X < Y)$;
- ③ $\mathbb{P}(X < a)$.



Exemplos

Exemplo 2. Suponhamos que a variável aleatória contínua bidimensional $(X, Y)^\top$ tenha FDP conjunta dada por

$$\begin{aligned} f(x, y) &= 2 \exp\{-(x + 2y)\} \mathbb{I}_{\mathbb{R}_+^2}(x, y) \\ &= 2e^{-x}e^{-2y} \mathbb{I}_{(0, +\infty)}(x) \mathbb{I}_{(0, +\infty)}(y). \end{aligned}$$

Calcular:

- ① $\mathbb{P}(X > 1, Y < 1)$;
- ② $\mathbb{P}(X < Y)$;
- ③ $\mathbb{P}(X < a)$.



Roteiro

- 1 Vetores aleatórios
- 2 Função (densidade) de probabilidades
- 3 Função de distribuição acumulada
- 4 Exemplos
- 5 Bibliografia



Bibliografia

- Magalhães, M. N. (2015), *Probabilidade e variáveis aleatórias*, 3 edn, Editora da Universidade de São Paulo, São Paulo.
- Meyer, P. L. (2017), *Probabilidade: aplicações à Estatística*, 2 edn, Livros Técnicos e Científicos Editora Ltda, Rio de Janeiro.
- Ross, S. (2010), *Probabilidade: um curso moderno com aplicações*, 8 edn, Bookman, Porto Alegre.
- Ross, S. (2019), *A first course in probability*, 10 edn. global edn, Pearson Education, Malaysia.



Obrigado!

✉ tiago.magalhaes@ufjf.br

📄 ufjf.br/tiago_magalhaes

🌐 Departamento de Estatística, Sala 319

