Método jacobiano

Tiago M. Magalhães

Departamento de Estatística - ICE-UFJF

Juiz de Fora, 26 de setembro de 2025

Roteiro

Roteiro

Introdução

Ao definir uma variável aleatória (VA) X, nós salientamos que X é uma função definida a partir do espaço amostral Ω para números reais.

Introdução

Ao definir uma VA bidimensional $(X, Y)^\top$, nós estaremos interessados em um par de funções,

$$X = X(\omega), Y = Y(\omega),$$

cada uma das quais é definida no espaço amostral de algum experimento e associa um número real a todo $\omega \in \Omega$,

Introdução

Ao definir uma VA bidimensional $(X, Y)^\top$, nós estaremos interessados em um par de funções,

$$X = X(\omega), Y = Y(\omega),$$

cada uma das quais é definida no espaço amostral de algum experimento e associa um número real a todo $\omega \in \Omega$, desse modo fornecendo o vetor bidimensional $[X(\omega), Y(\omega)]^\top$.

Introdução

Ao definir uma VA bidimensional $(X, Y)^\top$, nós estaremos interessados em um par de funções,

$$X = X(\omega), Y = Y(\omega),$$

cada uma das quais é definida no espaço amostral de algum experimento e associa um número real a todo $\omega \in \Omega$, desse modo fornecendo o vetor bidimensional $[X(\omega), Y(\omega)]^\top$.

Introdução

Nós vamos considerar $Z = H_1(X, Y)$, uma função de X e Y. $Z = Z(\omega)$ é também uma VA. Consideremos a sequência de etapas:

Introdução

Nós vamos considerar $Z = H_1(X, Y)$, uma função de X e Y. $Z = Z(\omega)$ é também uma VA. Consideremos a sequência de etapas:

1. Executar o experimento ε e obter o resultado ω.

Introdução

Nós vamos considerar $Z = H_1(X, Y)$, uma função de X e Y. $Z = Z(\omega)$ é também uma VA. Consideremos a sequência de etapas:

1. Executar o experimento ε e obter o resultado ω.
2. Calcular os números $X(\omega)$ e $Y(\omega)$.

Introdução

Nós vamos considerar $Z = H_1(X, Y)$, uma função de X e Y. $Z = Z(\omega)$ é também uma VA. Consideremos a sequência de etapas:

1. Executar o experimento ε e obter o resultado ω.
2. Calcular os números $X(\omega)$ e $Y(\omega)$.
3. Calcular o número $Z = H_1[X(\omega), Y(\omega)]$.

Introdução

Nós vamos considerar $Z = H_1(X, Y)$, uma função de X e Y. $Z = Z(\omega)$ é também uma VA. Consideremos a sequência de etapas:

1. Executar o experimento ε e obter o resultado ω.
2. Calcular os números $X(\omega)$ e $Y(\omega)$.
3. Calcular o número $Z = H_1[X(\omega), Y(\omega)]$.

Introdução

O valor de Z depende evidentemente de ω, o resultado original do experimento. Ou seja, $Z = Z(\omega)$ é uma função que associa um número real $Z(\omega)$ a todo resultado $\omega \in \Omega$.

Introdução

O valor de Z depende evidentemente de ω, o resultado original do experimento. Ou seja, $Z = Z(\omega)$ é uma função que associa um número real $Z(\omega)$ a todo resultado $\omega \in \Omega$. Consequentemente, Z é uma VA.

Introdução

O valor de Z depende evidentemente de ω, o resultado original do experimento. Ou seja, $Z = Z(\omega)$ é uma função que associa um número real $Z(\omega)$ a todo resultado $\omega \in \Omega$. Consequentemente, Z é uma VA.

Introdução

Motivação

A questão que surge é a seguinte: dada a distribuição de probabilidade conjunta $(X, Y)^\top$, qual é a distribuição de probabilidades de $Z = H_1(X, Y)$?

Introdução

Motivação

A questão que surge é a seguinte: dada a distribuição de probabilidade conjunta $(X, Y)^\top$, qual é a distribuição de probabilidades de $Z = H_1(X, Y)$?

Roteiro

Caso discreto

Se $(X, Y)^\top$ for uma VA discreta, encontrar a distribuição de probabilidades de $Z = H_1(X, Y)$ é uma tarefa relativamente simples.

Exemplo

Qual é a distribuição de probabilidades de $Z = \min(X, Y)$, em que $(X, Y)^\top$ tem distribuição de probabilidade dada por:

Tabela 1: Distribuição de probabilidade conjunta de X e Y.

Y	X					
	0	1	2	3	4	5
0	0,00	0,01	0,03	0,05	0,07	0,09
1	0,01	0,02	0,04	0,05	0,06	0,08
2	0,01	0,03	0,05	0,05	0,05	0,06
3	0,01	0,02	0,04	0,06	0,06	0,05

Exemplo

Qual é a distribuição de probabilidades de $Z = \min(X, Y)$, em que $(X, Y)^\top$ tem distribuição de probabilidade dada por:

Tabela 1: Distribuição de probabilidade conjunta de X e Y.

Y	X					
	0	1	2	3	4	5
0	0,00	0,01	0,03	0,05	0,07	0,09
1	0,01	0,02	0,04	0,05	0,06	0,08
2	0,01	0,03	0,05	0,05	0,05	0,06
3	0,01	0,02	0,04	0,06	0,06	0,05

Exemplo

Notem que, o suporte de Z é $\mathcal{Z} = \{0, 1, 2, 3\}$, obtido da seguinte maneira:

Z	(X, Y)								
0	(0,0)	(0,1)	(0,2)	(0,3)	(1,0)	(2,0)	(3,0)	(4,0)	(5,0)
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(2,1)	(3,1)	(4,1)	(5,1)		
2	(2,2)	(2,3)	(3,2)	(4,2)	(5,2)				
3	(3,3)	(4,3)	(5,3)						

Exemplo

Notem que, o suporte de Z é $\mathcal{Z} = \{0, 1, 2, 3\}$, obtido da seguinte maneira:

Z	(X, Y)								
0	(0,0)	(0,1)	(0,2)	(0,3)	(1,0)	(2,0)	(3,0)	(4,0)	(5,0)
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(2,1)	(3,1)	(4,1)	(5,1)		
2	(2,2)	(2,3)	(3,2)	(4,2)	(5,2)				
3	(3,3)	(4,3)	(5,3)						

Exemplo

Com as probabilidades,

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(Z=0) &= \mathbb{P}(X=0,Y=0)+\mathbb{P}(X=0,Y=1)+\mathbb{P}(X=0,Y=2)\\
&+\mathbb{P}(X=0,Y=3)+\mathbb{P}(X=1,Y=0)+\mathbb{P}(X=2,Y=0)\\
&+\mathbb{P}(X=3,Y=0)+\mathbb{P}(X=4,Y=0)+\mathbb{P}(X=5,Y=0);\\
\mathbb{P}(Z=1) &= \mathbb{P}(X=1,Y=1)+\mathbb{P}(X=1,Y=2)+\mathbb{P}(X=1,Y=3)\\
&+\mathbb{P}(X=2,Y=1)+\mathbb{P}(X=3,Y=1)+\mathbb{P}(X=4,Y=1)\\
&+\mathbb{P}(X=5,Y=1);
\end{aligned}
$$

Exemplo

$$\mathbb{P}(Z=2) = \mathbb{P}(X=2, Y=2) + \mathbb{P}(X=2, Y=3) + \mathbb{P}(X=3, Y=2)$$
$$+ \mathbb{P}(X=4, Y=2) + \mathbb{P}(X=5, Y=2);$$
$$\mathbb{P}(Z=3) = \mathbb{P}(X=3, Y=3) + \mathbb{P}(X=4, Y=3) + \mathbb{P}(X=5, Y=3).$$

Exemplo

A distribuição de probabilidade da VA $Z = \min(X, Y)$ é dada por:

Tabela 2: Distribuição de probabilidade de $Z = \min(X, Y)$.

Z	0	1	2	3
$\mathbb{P}(Z)$	0,28	0,30	0,25	0,17

Exemplo

A distribuição de probabilidade da VA $Z = \min(X, Y)$ é dada por:

Tabela 2: Distribuição de probabilidade de $Z = \min(X, Y)$.

Z	0	1	2	3
$\mathbb{P}(Z)$	0,28	0,30	0,25	0,17

Roteiro

Caso contínuo

Se $(X, Y)^\top$ for uma VA bidimensional contínua e se $Z = H_1(X, Y)$ for uma função contínua de (X, Y), então Z será uma VA contínua (unidimensional) e o procedimento de achar sua função densidade de probabilidade (FDP) é um pouco mais complicado. A fim de encontrar a FDP de Z, nós precisaremos do **Método jacobiano**.

Caso contínuo

Se $(X, Y)^\top$ for uma VA bidimensional contínua e se $Z = H_1(X, Y)$ for uma função contínua de (X, Y), então Z será uma VA contínua (unidimensional) e o procedimento de achar sua função densidade de probabilidade (FDP) é um pouco mais complicado. A fim de encontrar a FDP de Z, nós precisaremos do **Método jacobiano**.

Método jacobiano

A busca pela FDP de $Z = H_1(X, Y)$ é simplificada com a introdução de uma segunda VA $W = H_2(X, Y)$ e obtenção da FDP conjunta de Z e W, $g(z, w)$. Com o conhecimento de $g(z, w)$, nós poderemos então obter a FDP marginal de Z, $g_Z(z)$, pela integração de $g(z, w)$ com relação a w,

$$g_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(z, w)\, dw.$$

Método jacobiano

A busca pela FDP de $Z = H_1(X, Y)$ é simplificada com a introdução de uma segunda VA $W = H_2(X, Y)$ e obtenção da FDP conjunta de Z e W, $g(z, w)$. Com o conhecimento de $g(z, w)$, nós poderemos então obter a FDP marginal de Z, $g_Z(z)$, pela integração de $g(z, w)$ com relação a w,

$$g_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(z, w)\, dw.$$

Método jacobiano

Os problemas restantes são:

1. como encontrar a FDP conjunta de Z e W,

Método jacobiano

Os problemas restantes são:

1. como encontrar a FDP conjunta de Z e W,
2. como escolher a VA apropriada $W = H_2(X, Y)$.

Método jacobiano

Os problemas restantes são:

1. como encontrar a FDP conjunta de Z e W,
2. como escolher a VA apropriada $W = H_2(X, Y)$.

Para resolver o último problema, nós devemos dizer que geralmente se faz a mais simples escolha possível para W.

Método jacobiano

Os problemas restantes são:

1. como encontrar a FDP conjunta de Z e W,
2. como escolher a VA apropriada $W = H_2(X, Y)$.

Para resolver o último problema, nós devemos dizer que geralmente se faz a mais simples escolha possível para W. Nesta passagem, W possui apenas papel intermediário, e nós não estamos realmente interessados nela (isso nem sempre é verdade).

Método jacobiano

Os problemas restantes são:

1. como encontrar a FDP conjunta de Z e W,
2. como escolher a VA apropriada $W = H_2(X, Y)$.

Para resolver o último problema, nós devemos dizer que geralmente se faz a mais simples escolha possível para W. Nesta passagem, W possui apenas papel intermediário, e nós não estamos realmente interessados nela (isso nem sempre é verdade).

Método jacobiano

Suponhamos que $(X, Y)^\top$ seja uma VA contínua bidimensional com FDP conjunta f. Sejam $Z = H_1(X, Y)$ e $W = H_2(X, Y)$, e admitamos que as funções H_1 e H_2 satisfaçam as seguintes condições

Método jacobiano

Suponhamos que $(X,Y)^\top$ seja uma VA contínua bidimensional com FDP conjunta f. Sejam $Z = H_1(X,Y)$ e $W = H_2(X,Y)$, e admitamos que as funções H_1 e H_2 satisfaçam as seguintes condições

- As equações $z = H_1(x,y)$ e $w = H_2(x,y)$ podem ser **univocamente** resolvidas para x e y, em termos de z e w, isto é, $x = H_1^{-1}(z,w) = G_1(z,w)$ e $y = H_2^{-1}(z,w) = G_2(z,w)$.

Método jacobiano

Suponhamos que $(X, Y)^\top$ seja uma VA contínua bidimensional com FDP conjunta f. Sejam $Z = H_1(X, Y)$ e $W = H_2(X, Y)$, e admitamos que as funções H_1 e H_2 satisfaçam as seguintes condições

- As equações $z = H_1(x, y)$ e $w = H_2(x, y)$ podem ser **univocamente** resolvidas para x e y, em termos de z e w, isto é, $x = H_1^{-1}(z, w) = G_1(z, w)$ e $y = H_2^{-1}(z, w) = G_2(z, w)$.

Distribuição normal multivariada

- As derivadas parciais $\partial z/\partial x$, $\partial w/\partial x$, $\partial z/\partial y$ e $\partial w/\partial y$ existem, são contínuas e de tal forma que:

$$J(x, y) = \frac{\partial(z, w)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial z}{\partial x} & \dfrac{\partial z}{\partial y} \\ \dfrac{\partial w}{\partial x} & \dfrac{\partial w}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0, \qquad (1)$$

em todos os pontos (x, y).

Distribuição normal multivariada

- As derivadas parciais $\partial z/\partial x$, $\partial w/\partial x$, $\partial z/\partial y$ e $\partial w/\partial y$ existem, são contínuas e de tal forma que:

$$J(x,y) = \frac{\partial(z,w)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial z}{\partial x} & \dfrac{\partial z}{\partial y} \\ \dfrac{\partial w}{\partial x} & \dfrac{\partial w}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0, \qquad (1)$$

em todos os pontos (x, y).

Método jacobiano

Nestas circunstâncias, a FDP conjunta de $(Z, W)^\top$, isto é, $g(z, w)$ é dada pela seguinte expressão

$$g(z, w) = f\left[G_1(z, w), G_2(z, w)\right] |J(x, y)|^{-1} \, \mathbb{I}_{\mathcal{J}}(z, w), \tag{2}$$

em que $x = G_1(z, w)$, $y = G_2(z, w)$ e $\mathcal{J}$ é o suporte de $(Z, W)^\top$, isto é, região com $g(z, w) > 0$.

Método jacobiano

Nestas circunstâncias, a FDP conjunta de $(Z, W)^\top$, isto é, $g(z, w)$ é dada pela seguinte expressão

$$g(z, w) = f\left[G_1(z, w), G_2(z, w)\right] \left|J(x, y)\right|^{-1} \mathbb{I}_{\mathcal{J}}(z, w), \tag{2}$$

em que $x = G_1(z, w)$, $y = G_2(z, w)$ e $\mathcal{J}$ é o suporte de $(Z, W)^\top$, isto é, região com $g(z, w) > 0$. O determinante em (1) é denominado **jacobiano** da transformação $(x, y) \to (z, w)$.

Método jacobiano

Nestas circunstâncias, a FDP conjunta de $(Z, W)^\top$, isto é, $g(z, w)$ é dada pela seguinte expressão

$$g(z,w) = f\left[G_1(z,w), G_2(z,w)\right] \left|J(x,y)\right|^{-1} \mathbb{I}_{\mathcal{J}}(z,w), \tag{2}$$

em que $x = G_1(z, w)$, $y = G_2(z, w)$ e $\mathcal{J}$ é o suporte de $(Z, W)^\top$, isto é, região com $g(z, w) > 0$. O determinante em (1) é denominado **jacobiano** da transformação $(x, y) \to (z, w)$.

Exemplos

Exemplo 1. Se X e Y são duas VA independentes com distribuições gama de parâmetros (α, λ) e (β, λ), respectivamente, calcule a FDP conjunta de $U = X + Y$ e $V = X/(X + Y)$.

Exemplos

Exemplo 1. Se X e Y são duas VA independentes com distribuições gama de parâmetros (α, λ) e (β, λ), respectivamente, calcule a FDP conjunta de $U = X + Y$ e $V = X/(X + Y)$.

Exemplos

Exemplo 2. Sejam U e V duas variáveis aleatórias independentes com distribuição qui-quadrado(m) e qui-quadrado(n), respectivamente. Seja

$$X = \frac{U/m}{V/n}.$$

Qual é a distribuição de X?

Exemplos

Exemplo 2. Sejam U e V duas variáveis aleatórias independentes com distribuição qui-quadrado(m) e qui-quadrado(n), respectivamente. Seja

$$X = \frac{U/m}{V/n}.$$

Qual é a distribuição de X?

Roteiro

Quando a função $Z = H_1(X, Y)$ não for biunívoca (bijetora), o método do jacobiano, descrito em (2), não pode ser usado de imediato.

Método jacobiano

Primeiramente, o suporte em X e/ou de Y precisa ser subdividido em regiões onde $H_1(X, Y)$ seja biunívoca.

Após isso, o método pode ser aplicado em cada uma das regiões e a FDP de Z é a soma das FDPs obtidas para cada $H_1(X, Y)$ da região.

Método jacobiano

Primeiramente, o suporte em X e/ou de Y precisa ser subdividido em regiões onde $H_1(X, Y)$ seja biunívoca.

Após isso, o método pode ser aplicado em cada uma das regiões e a FDP de Z é a soma das FDPs obtidas para cada $H_1(X, Y)$ da região.

Método jacobiano

Isto é, a FDP conjunta de $(Z, W)^\top$ será dada pela expressão

$$g(z, w) = \sum_{i=1}^{n} f\left[G_{1i}(z, w), G_{2i}(z, w)\right] |J_i(x, y)|^{-1} \mathbb{I}_{\mathcal{J}_i}(z, w), \qquad (3)$$

em que $x = G_{1i}(z, w)$, $y = G_{2i}(z, w)$, $\mathcal{J}_i$ é o i-ésimo suporte de $(Z, W)^\top$ e n é o número de subdivisões.

Método jacobiano

Isto é, a FDP conjunta de $(Z, W)^\top$ será dada pela expressão

$$g(z,w) = \sum_{i=1}^{n} f\left[G_{1i}(z,w), G_{2i}(z,w)\right] \left|J_i(x,y)\right|^{-1} \mathbb{I}_{\mathcal{J}_i}(z,w), \qquad (3)$$

em que $x = G_{1i}(z,w)$, $y = G_{2i}(z,w)$, $\mathcal{J}_i$ é o i-ésimo suporte de $(Z, W)^\top$ e n é o número de subdivisões.

Roteiro

Bibliografia

Meyer, P. L. (2017), *Probabilidade: aplicações à Estatística*, 2 edn, Livros Técnicos e Científicos Editora Ltda, Rio de Janeiro.

Ross, S. (2010), *Probabilidade: um curso moderno com aplicações*, 8 edn, Bookman, Porto Alegre.

Ross, S. (2019), *A first course in probability*, 10 edn. global edn, Pearson Education, Malaysia.

Obrigado!

✉ tiago.magalhaes@ufjf.br

ufjf.br/tiago_magalhaes

Departamento de Estatística, Sala 319