Distribuições marginais e condicionais

Tiago M. Magalhães

Departamento de Estatística - ICE-UFJF

Juiz de Fora, 27 de agosto de 2025

Roteiro

Roteiro

1. Distribuições de probabilidade marginal

2. Distribuições de probabilidade condicional

3. Variáveis aleatórias independentes

4. Bibliografia

Distribuições de probabilidade marginal

A cada variável aleatória bidimensional $(X, Y)^\top$, nós associamos duas variáveis aleatórias unidimensionais, a saber X e Y, individualmente.

Isto é, nós poderemos estar interessados na distribuição de probabilidade de X ou na distribuição de probabilidade de Y.

Distribuições de probabilidade marginal

A cada variável aleatória bidimensional $(X, Y)^\top$, nós associamos duas variáveis aleatórias unidimensionais, a saber X e Y, individualmente.

Isto é, nós poderemos estar interessados na distribuição de probabilidade de X ou na distribuição de probabilidade de Y.

Distribuições de probabilidade marginal

Caso discreto. Desde que $X = x$ deve ocorrer junto com $Y = y$ para algum y e pode ocorrer com $Y = y$ somente para um y,

Distribuições de probabilidade marginal

Caso discreto. Desde que $X = x$ deve ocorrer junto com $Y = y$ para algum y e pode ocorrer com $Y = y$ somente para um y, nós teremos

$$
\begin{aligned}
p_X(x) &= \mathbb{P}(X = x) \\
&= \mathbb{P}(X = x, Y = y \text{ ou } X = x, Y = y \text{ ou } \ldots) \\
&= \sum_{y=-\infty}^{+\infty} p(x, y).
\end{aligned}
$$

Distribuições de probabilidade marginal

Caso discreto. Desde que $X = x$ deve ocorrer junto com $Y = y$ para algum y e pode ocorrer com $Y = y$ somente para um y, nós teremos

$$\begin{aligned} p_X(x) &= \mathbb{P}(X = x) \\ &= \mathbb{P}(X = x, Y = y \text{ ou } X = x, Y = y \text{ ou } \ldots) \\ &= \sum_{y=-\infty}^{+\infty} p(x, y). \end{aligned}$$

Distribuições de probabilidade marginal

A função p_X definida para $x_1, x_2, \ldots$, representa a **distribuição de probabilidade marginal** de X. Analogamente, nós definimos

$$p_Y(y) = \mathbb{P}(Y = y) = \sum_{x=-\infty}^{+\infty} p(x, y)$$

como a distribuição de probabilidade marginal de Y.

Distribuições de probabilidade marginal

A função p_X definida para $x_1, x_2, \ldots$, representa a **distribuição de probabilidade marginal** de X. Analogamente, nós definimos

$$p_Y(y) = \mathbb{P}(Y = y) = \sum_{x=-\infty}^{+\infty} p(x, y)$$

como a distribuição de probabilidade marginal de Y.

Distribuições de probabilidade marginal

Caso contínuo. Seja f a FDP conjunta da variável aleatória bidimensional $(X, Y)^\top$.

Distribuições de probabilidade marginal

Caso contínuo. Seja f a FDP conjunta da variável aleatória bidimensional $(X, Y)^\top$. Nós definiremos f_X e f_Y, respectivamente as **funções densidade de probabilidade marginal** de X e de Y,

Distribuições de probabilidade marginal

Caso contínuo. Seja f a FDP conjunta da variável aleatória bidimensional $(X, Y)^\top$. Nós definiremos f_X e f_Y, respectivamente as **funções densidade de probabilidade marginal** de X e de Y, assim

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy, \quad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx. \tag{1}$$

Distribuições de probabilidade marginal

Caso contínuo. Seja f a FDP conjunta da variável aleatória bidimensional $(X, Y)^\top$. Nós definiremos f_X e f_Y, respectivamente as **funções densidade de probabilidade marginal** de X e de Y, assim

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dy, \quad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dx. \tag{1}$$

Distribuições de probabilidade marginal

As FDP em (1) correspondem às FDP básicas das variáveis aleatórias unidimensionais X e Y, respectivamente. Por exemplo,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(c \leq X \leq d) &= \mathbb{P}(c \leq X \leq d,\ -\infty \leq Y \leq +\infty) \\ &= \int_c^d \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dydx \\ &= \int_c^d f_X(x)dx.\end{aligned}$$

Distribuições de probabilidade marginal

As FDP em (1) correspondem às FDP básicas das variáveis aleatórias unidimensionais X e Y, respectivamente. Por exemplo,

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(c \leq X \leq d) &= \mathbb{P}(c \leq X \leq d,\ -\infty \leq Y \leq +\infty) \\
&= \int_c^d \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy dx \\
&= \int_c^d f_X(x) dx.
\end{aligned}
$$

Exemplos

Exemplo 1. Duas características do desempenho do motor de um foguete são o empuxo X e a taxa de mistura Y.

Exemplos

Exemplo 1. Duas características do desempenho do motor de um foguete são o empuxo X e a taxa de mistura Y. Suponham que $(X, Y)^\top$ seja uma variável aleatória continua bidimensional com FDP conjunta

$$f(x, y) = 2(x + y - 2xy)\,\mathbb{I}_{[0,1]}(x)\,\mathbb{I}_{[0,1]}(y).$$

Exemplo 1. Duas características do desempenho do motor de um foguete são o empuxo X e a taxa de mistura Y. Suponham que $(X, Y)^\top$ seja uma variável aleatória continua bidimensional com FDP conjunta

$$f(x, y) = 2(x + y - 2xy)\,\mathbb{I}_{[0,1]}(x)\,\mathbb{I}_{[0,1]}(y).$$

Encontre as marginais das VAs X e Y.

Exemplos

Exemplo 1. Duas características do desempenho do motor de um foguete são o empuxo X e a taxa de mistura Y. Suponham que $(X, Y)^\top$ seja uma variável aleatória continua bidimensional com FDP conjunta

$$f(x, y) = 2(x + y - 2xy)\,\mathbb{I}_{[0,1]}(x)\,\mathbb{I}_{[0,1]}(y).$$

Encontre as marginais das VAs X e Y.

Roteiro

1. Distribuições de probabilidade marginal
2. Distribuições de probabilidade condicional
3. Variáveis aleatórias independentes
4. Bibliografia

Probabilidade condicional

Sejam X e Y duas variáveis aleatórias em $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ e A e B dois eventos,

nós definimos a distribuição condicional de X dado Y como

Probabilidade condicional

Sejam X e Y duas variáveis aleatórias em $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ e A e B dois eventos, nós definimos a distribuição condicional de X dado Y como

$$\mathbb{P}(\{X \in A\}|\{Y \in B\}) = \frac{\mathbb{P}(\{X \in A\} \cap \{Y \in B\})}{\mathbb{P}(\{Y \in B\})}.$$

Probabilidade condicional

Sejam X e Y duas variáveis aleatórias em $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ e A e B dois eventos, nós definimos a distribuição condicional de X dado Y como

$$\mathbb{P}(\{X \in A\}|\{Y \in B\}) = \frac{\mathbb{P}(\{X \in A\} \cap \{Y \in B\})}{\mathbb{P}(\{Y \in B\})}.$$

Note que $\mathbb{P}(\{Y \in B\}) \neq 0$, pois $\{Y \in B\}$ já ocorreu.

Probabilidade condicional

Sejam X e Y duas variáveis aleatórias em $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ e A e B dois eventos, nós definimos a distribuição condicional de X dado Y como

$$\mathbb{P}(\{X \in A\}|\{Y \in B\}) = \frac{\mathbb{P}(\{X \in A\} \cap \{Y \in B\})}{\mathbb{P}(\{Y \in B\})}.$$

Note que $\mathbb{P}(\{Y \in B\}) \neq 0$, pois $\{Y \in B\}$ já ocorreu.

Distribuições de probabilidade condicional

Caso discreto. Então, é natural definir a distribuição de probabilidade condicional de $X = x$ dado $Y = y$ como

Distribuições de probabilidade condicional

Caso discreto. Então, é natural definir a distribuição de probabilidade condicional de $X = x$ dado $Y = y$ como

$$\begin{aligned} p_{X|Y}(x|y) &= \mathbb{P}(X = x|Y = y) \\ &= \frac{\mathbb{P}(X = x, Y = y)}{\mathbb{P}(Y = y)} \\ &= \frac{p(x,y)}{p_Y(y)}, \end{aligned}$$

para todos os valores de y tal que $p_Y(y) > 0$.

Distribuições de probabilidade condicional

Caso discreto. Então, é natural definir a distribuição de probabilidade condicional de $X = x$ dado $Y = y$ como

$$\begin{aligned} p_{X|Y}(x|y) &= \mathbb{P}(X = x | Y = y) \\ &= \frac{\mathbb{P}(X = x, Y = y)}{\mathbb{P}(Y = y)} \\ &= \frac{p(x, y)}{p_Y(y)}, \end{aligned}$$

para todos os valores de y tal que $p_Y(y) > 0$.

Distribuições de probabilidade condicional

De forma similar, a FDA condicional de X dado $Y = y$ é definida, para todos os valores de y tal que $p_Y(y) > 0$, por

$$F_{X|Y}(a|y) = \mathbb{P}(X \leq a|Y = y)$$
$$= \sum_{x=-\infty}^{a} p_{X|Y}(x|y).$$

Distribuições de probabilidade condicional

De forma similar, a FDA condicional de X dado $Y = y$ é definida, para todos os valores de y tal que $p_Y(y) > 0$, por

$$\begin{aligned} F_{X|Y}(a|y) &= \mathbb{P}(X \leq a|Y = y) \\ &= \sum_{x=-\infty}^{a} p_{X|Y}(x|y). \end{aligned}$$

Distribuições de probabilidade condicional

Caso contínuo. Se $(X, Y)^\top$ é uma variável aleatória bidimensional com FDP conjunta $f(x, y)$,

Distribuições de probabilidade condicional

Caso contínuo. Se $(X, Y)^\top$ é uma variável aleatória bidimensional com FDP conjunta $f(x, y)$, então a FDP condicional de X dado $Y = y$ é definida, para todos os valores de y tal que $f_Y(y) > 0$, por

Distribuições de probabilidade condicional

Caso contínuo. Se $(X, Y)^\top$ é uma variável aleatória bidimensional com FDP conjunta $f(x, y)$, então a FDP condicional de X dado $Y = y$ é definida, para todos os valores de y tal que $f_Y(y) > 0$, por

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)}. \tag{2}$$

Distribuições de probabilidade condicional

Caso contínuo. Se $(X, Y)^\top$ é uma variável aleatória bidimensional com FDP conjunta $f(x, y)$, então a FDP condicional de X dado $Y = y$ é definida, para todos os valores de y tal que $f_Y(y) > 0$, por

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)}. \tag{2}$$

Distribuições de probabilidade condicional

De (2), para qualquer conjunto A, nós temos que

$$\mathbb{P}(X \in A | Y = y) = \int_A f_{X|Y}(x|y) dx.$$

Distribuições de probabilidade condicional

De (2), para qualquer conjunto A, nós temos que

$$\mathbb{P}(X \in A | Y = y) = \int_A f_{X|Y}(x|y) dx.$$

Distribuições de probabilidade condicional

Em particular, se $A = (-\infty, a)$, nós podemos definir a FDA condicional de X dado $Y = y$ por

$$F_{X|Y}(a|y) = \mathbb{P}(X \leq a|Y = y) = \int_{-\infty}^{a} f_{X|Y}(x|y)dx.$$

Em particular, se $A = (-\infty, a)$, nós podemos definir a FDA condicional de X dado $Y = y$ por

$$F_{X|Y}(a|y) = \mathbb{P}(X \leq a|Y = y) = \int_{-\infty}^{a} f_{X|Y}(x|y)dx.$$

Observação

Notem que,

$$\begin{aligned} p(x, y) &= p_X(x) \times p_{Y|X}(y|x) \\ &= p_Y(y) \times p_{X|Y}(x|y), \end{aligned}$$

para o caso discreto.

Observação

Notem que,

$$p(x,y) = p_X(x) \times p_{Y|X}(y|x)$$
$$= p_Y(y) \times p_{X|Y}(x|y),$$

para o caso discreto. Para o caso contínuo,

$$f(x,y) = f_X(x) \times f_{Y|X}(y|x)$$
$$= f_Y(y) \times f_{X|Y}(x|y).$$

Observação

Notem que,

$$
\begin{aligned}
p(x, y) &= p_X(x) \times p_{Y|X}(y|x) \\
&= p_Y(y) \times p_{X|Y}(x|y),
\end{aligned}
$$

para o caso discreto. Para o caso contínuo,

$$
\begin{aligned}
f(x, y) &= f_X(x) \times f_{Y|X}(y|x) \\
&= f_Y(y) \times f_{X|Y}(x|y).
\end{aligned}
$$

Exemplos

Exemplo 2. Seja $(X, Y)^\top$ uma variável aleatória bidimensional

Exemplos

Exemplo 2. Seja $(X, Y)^\top$ uma variável aleatória bidimensional tal que

$$f(x,y) = c\left(x^2 - y^2\right) e^{-x}\, \mathbb{I}_{(0,\infty)}(x)\, \mathbb{I}_{(-x,x)}(y).$$

Exemplos

Exemplo 2. Seja $(X, Y)^\top$ uma variável aleatória bidimensional tal que

$$f(x,y) = c\left(x^2 - y^2\right) e^{-x}\, \mathbb{I}_{(0,\infty)}(x)\, \mathbb{I}_{(-x,x)}(y).$$

1. Encontre o valor de c.
2. Encontre a distribuição de $Y|X = x$.

Exemplos

Exemplo 2. Seja $(X, Y)^\top$ uma variável aleatória bidimensional tal que

$$f(x, y) = c\left(x^2 - y^2\right) e^{-x}\, \mathbb{I}_{(0,\infty)}(x)\, \mathbb{I}_{(-x,x)}(y).$$

1. Encontre o valor de c.
2. Encontre a distribuição de $Y|X = x$.

Exemplos

Exemplo 3. Seja $(X, Y)^\top$ uma variável aleatória bidimensional

Exemplos

Exemplo 3. Seja $(X, Y)^\top$ uma variável aleatória bidimensional tal que

$$f(x, y) = x \exp\{-x(y+1)\} \, \mathbb{I}_{(0,\infty)}(x) \, \mathbb{I}_{(0,\infty)}(y).$$

Exemplos

Exemplo 3. Seja $(X, Y)^\top$ uma variável aleatória bidimensional tal que

$$f(x, y) = x \exp\{-x(y+1)\}\, \mathbb{I}_{(0,\infty)}(x)\, \mathbb{I}_{(0,\infty)}(y).$$

Calcule a FDP de:

1. $X|Y = y$;
2. $Y|X = x$.

Exemplos

Exemplo 3. Seja $(X, Y)^\top$ uma variável aleatória bidimensional tal que

$$f(x, y) = x \exp\{-x(y+1)\}\, \mathbb{I}_{(0,\infty)}(x)\, \mathbb{I}_{(0,\infty)}(y).$$

Calcule a FDP de:

1. $X|Y = y$;
2. $Y|X = x$.

Roteiro

Variáveis aleatórias independentes

Duas variáveis aleatórias, X e Y em $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, são independentes se, e somente, para todo evento A e B,

Variáveis aleatórias independentes

Duas variáveis aleatórias, X e Y em $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, são independentes se, e somente, para todo evento A e B, nós temos que:

$$\mathbb{P}(\{X \in A\} \cap \{Y \in B\}) = \mathbb{P}(X \in A) \times \mathbb{P}(Y \in B).$$

Variáveis aleatórias independentes

Duas variáveis aleatórias, X e Y em $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, são independentes se, e somente, para todo evento A e B, nós temos que:

$$\mathbb{P}(\{X \in A\} \cap \{Y \in B\}) = \mathbb{P}(X \in A) \times \mathbb{P}(Y \in B).$$

Caso discreto

Seja $(X, Y)^\top$ uma variável aleatória discreta bidimensional. Nós diremos que X e Y são variáveis aleatórias independentes se, e somente, se,

Caso discreto

Seja $(X, Y)^\top$ uma variável aleatória discreta bidimensional. Nós diremos que X e Y são variáveis aleatórias independentes se, e somente, se,

$$p(x, y) = p_X(x) \times p_Y(y)$$

para qualquer x e y.

Caso discreto

Seja $(X, Y)^\top$ uma variável aleatória discreta bidimensional. Nós diremos que X e Y são variáveis aleatórias independentes se, e somente, se,

$$p(x, y) = p_X(x) \times p_Y(y)$$

para qualquer x e y. Isto é,

$$\mathbb{P}(X = x, Y = y) = \mathbb{P}(X = x) \times \mathbb{P}(Y = y),$$

para todo x e y.

Caso discreto

Seja $(X, Y)^\top$ uma variável aleatória discreta bidimensional. Nós diremos que X e Y são variáveis aleatórias independentes se, e somente, se,

$$p(x, y) = p_X(x) \times p_Y(y)$$

para qualquer x e y. Isto é,

$$\mathbb{P}(X = x, Y = y) = \mathbb{P}(X = x) \times \mathbb{P}(Y = y),$$

para todo x e y.

Caso contínuo

Seja $(X, Y)^\top$ uma variável aleatória contínua bidimensional. Nós diremos que X e Y são variáveis aleatórias independentes se, e somente, se,

Caso contínuo

Seja $(X, Y)^\top$ uma variável aleatória contínua bidimensional. Nós diremos que X e Y são variáveis aleatórias independentes se, e somente, se,

$$f(x, y) = f_X(x) \times f_Y(y).$$

para todo (x, y).

Caso contínuo

Seja $(X, Y)^\top$ uma variável aleatória contínua bidimensional. Nós diremos que X e Y são variáveis aleatórias independentes se, e somente, se,

$$f(x, y) = f_X(x) \times f_Y(y).$$

para todo (x, y).

Teorema

Caso discreto. Seja $(X, Y)^\top$ uma variável aleatória discreta bidimensional.

Teorema

Caso discreto. Seja $(X, Y)^\top$ uma variável aleatória discreta bidimensional.

Nesse caso, X e Y serão independentes se, e somente, se,

Teorema

Caso discreto. Seja $(X, Y)^\top$ uma variável aleatória discreta bidimensional.

Nesse caso, X e Y serão independentes se, e somente, se, $p_{X|Y}(x|y) = p_X(x)$, para todo x e y.

Teorema

Caso discreto. Seja $(X, Y)^\top$ uma variável aleatória discreta bidimensional. Nesse caso, X e Y serão independentes se, e somente, se, $p_{X|Y}(x|y) = p_X(x)$, para todo x e y.

Caso contínuo.

Teorema

Caso discreto. Seja $(X, Y)^\top$ uma variável aleatória discreta bidimensional. Nesse caso, X e Y serão independentes se, e somente, se, $p_{X|Y}(x|y) = p_X(x)$, para todo x e y.

Caso contínuo. Seja $(X, Y)^\top$ uma variável aleatória contínua bidimensional.

Teorema

Caso discreto. Seja $(X, Y)^\top$ uma variável aleatória discreta bidimensional. Nesse caso, X e Y serão independentes se, e somente, se, $p_{X|Y}(x|y) = p_X(x)$, para todo x e y.

Caso contínuo. Seja $(X, Y)^\top$ uma variável aleatória contínua bidimensional. Nesse caso, X e Y serão independentes se, e somente, se,

Teorema

Caso discreto. Seja $(X, Y)^\top$ uma variável aleatória discreta bidimensional. Nesse caso, X e Y serão independentes se, e somente, se, $p_{X|Y}(x|y) = p_X(x)$, para todo x e y.

Caso contínuo. Seja $(X, Y)^\top$ uma variável aleatória contínua bidimensional. Nesse caso, X e Y serão independentes se, e somente, se, $f_{X|Y}(x|y) = f_X(x)$, para todo x e y.

Teorema

Caso discreto. Seja $(X, Y)^\top$ uma variável aleatória discreta bidimensional. Nesse caso, X e Y serão independentes se, e somente, se, $p_{X|Y}(x|y) = p_X(x)$, para todo x e y.

Caso contínuo. Seja $(X, Y)^\top$ uma variável aleatória contínua bidimensional. Nesse caso, X e Y serão independentes se, e somente, se, $f_{X|Y}(x|y) = f_X(x)$, para todo x e y.

Observação. Analogamente, o teorema vale para Y.

Teorema

Caso discreto. Seja $(X, Y)^\top$ uma variável aleatória discreta bidimensional. Nesse caso, X e Y serão independentes se, e somente, se, $p_{X|Y}(x|y) = p_X(x)$, para todo x e y.

Caso contínuo. Seja $(X, Y)^\top$ uma variável aleatória contínua bidimensional. Nesse caso, X e Y serão independentes se, e somente, se, $f_{X|Y}(x|y) = f_X(x)$, para todo x e y.

Observação. Analogamente, o teorema vale para Y.

Exemplos

Exemplo 4. (Exemplo 2 da aula passada.) Suponhamos que a variável aleatória contínua bidimensional $(X, Y)^\top$ tenha FDP conjunta dada por

Exemplos

Exemplo 4. (Exemplo 2 da aula passada.) Suponhamos que a variável aleatória contínua bidimensional $(X, Y)^\top$ tenha FDP conjunta dada por

$$f(x, y) = 2e^{-x} e^{-2y} \, \mathbb{I}_{(0,+\infty)}(x) \, \mathbb{I}_{(0,+\infty)}(y).$$

Exemplos

Exemplo 4. (Exemplo 2 da aula passada.) Suponhamos que a variável aleatória contínua bidimensional $(X, Y)^\top$ tenha FDP conjunta dada por

$$f(x,y) = 2e^{-x}e^{-2y}\,\mathbb{I}_{(0,+\infty)}(x)\,\mathbb{I}_{(0,+\infty)}(y).$$

1. Calcule a FDP marginal de X e Y;
2. X e Y são independentes?

Exemplo 4. (Exemplo 2 da aula passada.) Suponhamos que a variável aleatória contínua bidimensional $(X, Y)^\top$ tenha FDP conjunta dada por

$$f(x, y) = 2e^{-x}e^{-2y}\,\mathbb{I}_{(0,+\infty)}(x)\,\mathbb{I}_{(0,+\infty)}(y).$$

1. Calcule a FDP marginal de X e Y;
2. X e Y são independentes?

Roteiro

Bibliografia

Magalhães, M. N. (2015), *Probabilidade e variáveis aleatórias*, 3 edn, Editora da Universidade de São Paulo, São Paulo.

Meyer, P. L. (2017), *Probabilidade: aplicações à Estatística*, 2 edn, Livros Técnicos e Científicos Editora Ltda, Rio de Janeiro.

Ross, S. (2010), *Probabilidade: um curso moderno com aplicações*, 8 edn, Bookman, Porto Alegre.

Ross, S. (2019), *A first course in probability*, 10 edn. global edn, Pearson Education, Malaysia.

Obrigado!

✉ tiago.magalhaes@ufjf.br

ufjf.br/tiago_magalhaes

Departamento de Estatística, Sala 319