Vetores aleatórios

Tiago M. Magalhães

Departamento de Estatística - ICE-UFJF

Juiz de Fora, 22 de agosto de 2025

Roteiro

1. Vetores aleatórios
2. Função (densidade) de probabilidades
3. Função de distribuição acumulada
4. Exemplos
5. Bibliografia

Roteiro

Vetores aleatórios

Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade e n funções, $X_1(\omega)$, $X_2(\omega)$, $\ldots$, $X_n(\omega)$, cada uma associando um número real a cada resultado $\omega \in \Omega$.

Vetores aleatórios

Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade e n funções, $X_1(\omega)$, $X_2(\omega)$, $\ldots$, $X_n(\omega)$, cada uma associando um número real a cada resultado $\omega \in \Omega$.

Dessa forma, nós denominaremos $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)^\top$ como uma variável aleatória n-dimensional, multidimensional, multivariada ou, ainda, de um **vetor aleatório**.

Vetores aleatórios

Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade e n funções, $X_1(\omega)$, $X_2(\omega)$, ..., $X_n(\omega)$, cada uma associando um número real a cada resultado $\omega \in \Omega$.

Dessa forma, nós denominaremos $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)^\top$ como uma variável aleatória n-dimensional, multidimensional, multivariada ou, ainda, de um **vetor aleatório**.

Vetores aleatórios

Sem perda de generalidade e para simplificar os enunciados, nós iremos apresentar os conceitos e as definições para o caso de **variáveis aleatórias bidimensionais** $(X_1, X_2)^\top$ ou $(X, Y)^\top$.

Vetores aleatórios

Sem perda de generalidade e para simplificar os enunciados, nós iremos apresentar os conceitos e as definições para o caso de **variáveis aleatórias bidimensionais** $(X_1, X_2)^\top$ ou $(X, Y)^\top$.

Variável aleatória discreta bidimensional

O vetor $(X, Y)^\top$ será uma **variável aleatória discreta bidimensional** se os valores possíveis (suporte) de $(X, Y)^\top$ forem finitos ou infinitos numeráveis,

Variável aleatória discreta bidimensional

O vetor $(X, Y)^\top$ será uma **variável aleatória discreta bidimensional** se os valores possíveis (suporte) de $(X, Y)^\top$ forem finitos ou infinitos numeráveis, isto é, os valores possíveis de $(X, Y)^\top$ possam ser representados por (x, y), $x \in \mathbb{Z}$ e $y \in \mathbb{Z}$.

Variável aleatória discreta bidimensional

O vetor $(X, Y)^\top$ será uma **variável aleatória discreta bidimensional** se os valores possíveis (suporte) de $(X, Y)^\top$ forem finitos ou infinitos numeráveis, isto é, os valores possíveis de $(X, Y)^\top$ possam ser representados por (x, y), $x \in \mathbb{Z}$ e $y \in \mathbb{Z}$.

Variável aleatória contínua bidimensional

O vetor $(X, Y)^\top$ será uma **variável aleatória contínua bidimensional** se $(X, Y)^\top$ puder tomar todos os valores em algum conjunto não numerável do plano euclidiano.

Variável aleatória contínua bidimensional

O vetor $(X, Y)^\top$ será uma **variável aleatória contínua bidimensional** se $(X, Y)^\top$ puder tomar todos os valores em algum conjunto não numerável do plano euclidiano.

Variável aleatória bidimensional

Observação

O vetor $(X, Y)^\top$ pode ser composto por uma variável aleatória discreta e uma variável aleatória contínua.

Variável aleatória bidimensional

Observação

O vetor $(X, Y)^\top$ pode ser composto por uma variável aleatória discreta e uma variável aleatória contínua.

Roteiro

Função de probabilidades

Seja $(X, Y)^\top$ uma variável aleatória discreta bidimensional.

Função de probabilidades

Seja $(X, Y)^\top$ uma variável aleatória discreta bidimensional. A cada resultado possível (x, y) associaremos um número $p(x, y)$ representando $\mathbb{P}(X = x, Y = y)$

Função de probabilidades

Seja $(X, Y)^\top$ uma variável aleatória discreta bidimensional. A cada resultado possível (x, y) associaremos um número $p(x, y)$ representando $\mathbb{P}(X = x, Y = y)$ e satisfazendo às seguintes condições:

Função de probabilidades

Seja $(X, Y)^\top$ uma variável aleatória discreta bidimensional. A cada resultado possível (x, y) associaremos um número $p(x, y)$ representando $\mathbb{P}(X = x, Y = y)$ e satisfazendo às seguintes condições:

- $p(x, y) \geq 0$, para todo (x, y);

Função de probabilidades

Seja $(X, Y)^\top$ uma variável aleatória discreta bidimensional. A cada resultado possível (x, y) associaremos um número $p(x, y)$ representando $\mathbb{P}(X = x, Y = y)$ e satisfazendo às seguintes condições:

- $p(x, y) \geq 0$, para todo (x, y);
- $\sum_{y=-\infty}^{+\infty} \sum_{x=-\infty}^{+\infty} p(x, y) = 1.$

Função de probabilidades

Seja $(X, Y)^\top$ uma variável aleatória discreta bidimensional. A cada resultado possível (x, y) associaremos um número $p(x, y)$ representando $\mathbb{P}(X = x, Y = y)$ e satisfazendo às seguintes condições:

- $p(x, y) \geq 0$, para todo (x, y);
- $\sum_{y=-\infty}^{+\infty} \sum_{x=-\infty}^{+\infty} p(x, y) = 1$.

Função de probabilidades

A função p definida para todo (x, y) no contradomínio de $(X, Y)^\top$ é denominada **função de probabilidade** de $(X, Y)^\top$. O conjunto dos termos $[x, y, p(x, y)]$, $x \in \mathbb{Z}$ e $y \in \mathbb{Z}$,

Função de probabilidades

A função p definida para todo (x, y) no contradomínio de $(X, Y)^\top$ é denominada **função de probabilidade** de $(X, Y)^\top$. O conjunto dos termos $[x, y, p(x, y)]$, $x \in \mathbb{Z}$ e $y \in \mathbb{Z}$, é, algumas vezes, denominado distribuição de probabilidade de $(X, Y)^\top$.

Função de probabilidades

A função p definida para todo (x, y) no contradomínio de $(X, Y)^\top$ é denominada **função de probabilidade** de $(X, Y)^\top$. O conjunto dos termos $[x, y, p(x, y)]$, $x \in \mathbb{Z}$ e $y \in \mathbb{Z}$, é, algumas vezes, denominado distribuição de probabilidade de $(X, Y)^\top$.

Função densidade de probabilidade

Seja $(X, Y)^{\top}$ uma variável aleatória contínua tomando todos os valores em alguma região R do plano euclidiano.

Função densidade de probabilidade

Seja $(X, Y)^\top$ uma variável aleatória contínua tomando todos os valores em alguma região R do plano euclidiano. A **função densidade de probabilidade conjunta** (FDP) f é uma função que satisfaz às seguintes condições:

Função densidade de probabilidade

Seja $(X, Y)^\top$ uma variável aleatória contínua tomando todos os valores em alguma região R do plano euclidiano. A **função densidade de probabilidade conjunta** (FDP) f é uma função que satisfaz às seguintes condições:

- $f(x, y) \geq 0$, para todo $(x, y) \in R$;

Função densidade de probabilidade

Seja $(X, Y)^\top$ uma variável aleatória contínua tomando todos os valores em alguma região R do plano euclidiano. A **função densidade de probabilidade conjunta** (FDP) f é uma função que satisfaz às seguintes condições:

- $f(x, y) \geq 0$, para todo $(x, y) \in R$;
- $\int \int_R f(x, y) dxdy = 1$.

Função densidade de probabilidade

Seja $(X, Y)^\top$ uma variável aleatória contínua tomando todos os valores em alguma região R do plano euclidiano. A **função densidade de probabilidade conjunta** (FDP) f é uma função que satisfaz às seguintes condições:

- $f(x, y) \geq 0$, para todo $(x, y) \in R$;
- $\int \int_R f(x, y) dx dy = 1$.

Roteiro

Função de distribuição acumulada

Seja $(X, Y)^\top$ uma variável aleatória bidimensional.

Função de distribuição acumulada

Seja $(X, Y)^\top$ uma variável aleatória bidimensional. A **função de distribuição acumulada** (FDA) F da variável aleatória bidimensional $(X, Y)^\top$é definida por

Função de distribuição acumulada

Seja $(X, Y)^\top$ uma variável aleatória bidimensional. A **função de distribuição acumulada** (FDA) F da variável aleatória bidimensional $(X, Y)^\top$ é definida por

$$F(x, y) = \mathbb{P}\left(X \leq x, Y \leq y\right).$$

Função de distribuição acumulada

Seja $(X, Y)^\top$ uma variável aleatória bidimensional. A **função de distribuição acumulada** (FDA) F da variável aleatória bidimensional $(X, Y)^\top$é definida por

$$F(x, y) = \mathbb{P}\left(X \leq x, Y \leq y\right).$$

Função de distribuição acumulada

A FDA de uma variável aleatória bidimensional $(X, Y)^\top$ tem propriedades análogas de uma FDA unidimensional. Entre elas, se F for a FDA de uma variável aleatória bidimensional com FDP f,

Função de distribuição acumulada

A FDA de uma variável aleatória bidimensional $(X, Y)^\top$ tem propriedades análogas de uma FDA unidimensional. Entre elas, se F for a FDA de uma variável aleatória bidimensional com FDP f, então

$$\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} = f(x, y),$$

sempre que F for derivável.

Função de distribuição acumulada

A FDA de uma variável aleatória bidimensional $(X, Y)^\top$ tem propriedades análogas de uma FDA unidimensional. Entre elas, se F for a FDA de uma variável aleatória bidimensional com FDP f, então

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = f(x,y),$$

sempre que F for derivável.

Roteiro

Exemplos

Exemplo 1. Suponhamos que a variável aleatória contínua bidimensional $(X, Y)^\top$ tenha FDP conjunta dada por

$$f(x, y) = x^2 + \frac{xy}{3}\,\mathbb{I}_{[0,1]}(x)\,\mathbb{I}_{[0,2]}(y). \tag{1}$$

1. Mostre que $f(x, y)$ em (1) é uma FDP conjunta.
2. Calcule a probabilidade de $B = \{X + Y \geq 1\}$.

Exemplo 1. Suponhamos que a variável aleatória contínua bidimensional $(X, Y)^\top$ tenha FDP conjunta dada por

$$f(x, y) = x^2 + \frac{xy}{3}\,\mathbb{I}_{[0,1]}(x)\,\mathbb{I}_{[0,2]}(y). \tag{1}$$

1. Mostre que $f(x, y)$ em (1) é uma FDP conjunta.
2. Calcule a probabilidade de $B = \{X + Y \geq 1\}$.

Exemplos

Exemplo 2. Suponhamos que a variável aleatória contínua bidimensional $(X, Y)^\top$ tenha FDP conjunta dada por

$$
\begin{aligned}
f(x, y) &= 2\exp\{-(x + 2y)\}\, \mathbb{I}_{\mathbb{R}^2_+}(x, y) \\
&= 2e^{-x}e^{-2y}\, \mathbb{I}_{(0,+\infty)}(x)\, \mathbb{I}_{(0,+\infty)}(y).
\end{aligned}
$$

Calcular:

1. $\mathbb{P}(X > 1, Y < 1)$;
2. $\mathbb{P}(X < Y)$;
3. $\mathbb{P}(X < a)$.

Exemplos

Exemplo 2. Suponhamos que a variável aleatória contínua bidimensional $(X, Y)^\top$ tenha FDP conjunta dada por

$$\begin{aligned} f(x, y) &= 2\exp\{-(x + 2y)\}\, \mathbb{I}_{\mathbb{R}_+^2}(x, y) \\ &= 2e^{-x}e^{-2y}\, \mathbb{I}_{(0,+\infty)}(x)\, \mathbb{I}_{(0,+\infty)}(y). \end{aligned}$$

Calcular:

1. $\mathbb{P}(X > 1, Y < 1)$;
2. $\mathbb{P}(X < Y)$;
3. $\mathbb{P}(X < a)$.

Roteiro

Bibliografia

Magalhães, M. N. (2015), *Probabilidade e variáveis aleatórias*, 3 edn, Editora da Universidade de São Paulo, São Paulo.

Meyer, P. L. (2017), *Probabilidade: aplicações à Estatística*, 2 edn, Livros Técnicos e Científicos Editora Ltda, Rio de Janeiro.

Ross, S. (2010), *Probabilidade: um curso moderno com aplicações*, 8 edn, Bookman, Porto Alegre.

Ross, S. (2019), *A first course in probability*, 10 edn. global edn, Pearson Education, Malaysia.

Obrigado!

✉ tiago.magalhaes@ufjf.br

ufjf.br/tiago_magalhaes

Departamento de Estatística, Sala 319