Conceitos iniciais

Tiago M. Magalhães

Departamento de Estatística - ICE-UFJF

Juiz de Fora, 20 de agosto de 2025

Roteiro

Roteiro

Motivação

Introdução às probabilidades

Em cursos básicos, as variáveis aleatórias estudadas eram unidimensionais, isto é, o resultado de um experimento era relacionado com um único número real.

Motivação

Em muitas situações, no entanto, nós podemos estar interessados em observar dois ou mais números reais associados a um único experimento.

A motivação da primeira metade deste curso é abordar os conceitos da Probabilidade neste contexto.

Motivação

Em muitas situações, no entanto, nós podemos estar interessados em observar dois ou mais números reais associados a um único experimento.

A motivação da primeira metade deste curso é abordar os conceitos da Probabilidade neste contexto. Nesta aula, nós iremos rever e apresentar algumas definições importantes para o desenrolar desta disciplina.

Motivação

Em muitas situações, no entanto, nós podemos estar interessados em observar dois ou mais números reais associados a um único experimento.

A motivação da primeira metade deste curso é abordar os conceitos da Probabilidade neste contexto. Nesta aula, nós iremos rever e apresentar algumas definições importantes para o desenrolar desta disciplina.

Roteiro

Experimento

Teste ou conjunto de testes com a finalidade de verificar uma suposição.

Um experimento pode ser classificado como:

Experimento

Teste ou conjunto de testes com a finalidade de verificar uma suposição.

Um experimento pode ser classificado como:

- Determinístico:

Experimento

Teste ou conjunto de testes com a finalidade de verificar uma suposição.

Um experimento pode ser classificado como:

- Determinístico: Nós conhecemos o resultado antecipadamente.

Experimento

Teste ou conjunto de testes com a finalidade de verificar uma suposição.

Um experimento pode ser classificado como:

- Determinístico: Nós conhecemos o resultado antecipadamente.
- Probabilístico:

Experimento

Teste ou conjunto de testes com a finalidade de verificar uma suposição.

Um experimento pode ser classificado como:

- Determinístico: Nós conhecemos o resultado antecipadamente.
- Probabilístico: Nós conhecemos o resultado somente após a realização.

Experimento

Teste ou conjunto de testes com a finalidade de verificar uma suposição.

Um experimento pode ser classificado como:

- Determinístico: Nós conhecemos o resultado antecipadamente.
- Probabilístico: Nós conhecemos o resultado somente após a realização.

Experimento

Exemplos:

- Lançamento de um dado e uma moeda;

Experimento

Exemplos:

- Lançamento de um dado e uma moeda;
- Em uma amostra de solo, a proporção de Antimônio, Arsênio e Nióbio;

Experimento

Exemplos:

- Lançamento de um dado e uma moeda;
- Em uma amostra de solo, a proporção de Antimônio, Arsênio e Nióbio;
- Em um determinado dia, o tempo de duração e a quantidade de chuva.

Experimento

Exemplos:

- Lançamento de um dado e uma moeda;
- Em uma amostra de solo, a proporção de Antimônio, Arsênio e Nióbio;
- Em um determinado dia, o tempo de duração e a quantidade de chuva.

Experimento

Espaço amostral (Ω)

São todos os resultados possíveis de um experimento.

Experimento

Espaço amostral (Ω)

São todos os resultados possíveis de um experimento. Por convenção, é denotado pela letra grega Ω.

Experimento

Espaço amostral (Ω)

São todos os resultados possíveis de um experimento. Por convenção, é denotado pela letra grega Ω.

Experimento

Lançamento de um dado e uma moeda

$\Omega = \{(\text{cara, }1), (\text{cara, }2), \ldots, (\text{cara, }6), (\text{coroa, }1), \ldots, (\text{coroa, }6)\}.$

Experimento

Lançamento de um dado e uma moeda

$\Omega = \{(\text{cara, } 1), (\text{cara, } 2), \ldots, (\text{cara, } 6), (\text{coroa, } 1), \ldots, (\text{coroa, } 6)\}.$

Em uma amostra de solo, a proporção de Sb, As e Nb

Experimento

Lançamento de um dado e uma moeda

$\Omega = \{(\text{cara, } 1), (\text{cara, } 2), \dots, (\text{cara, } 6), (\text{coroa, } 1), \dots, (\text{coroa, } 6)\}.$

Em uma amostra de solo, a proporção de Sb, As e Nb

$\Omega = \{(\omega_1, \omega_2, \omega_3);\ \omega_1 \in [0,1], \omega_2 \in [0,1], \omega_3 \in [0,1],\ \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 1\}.$

Experimento

Lançamento de um dado e uma moeda

$\Omega = \{(\text{cara, } 1), (\text{cara, } 2), \ldots, (\text{cara, } 6), (\text{coroa, } 1), \ldots, (\text{coroa, } 6)\}.$

Em uma amostra de solo, a proporção de Sb, As e Nb

$\Omega = \{(\omega_1, \omega_2, \omega_3);\ \omega_1 \in [0, 1], \omega_2 \in [0, 1], \omega_3 \in [0, 1],\ \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 1\}.$

Experimento

Em um determinado dia, o tempo de duração e a quantidade de chuva

$\Omega = \{(\omega_1, \omega_2);\, \omega_1 \in \mathbb{R}_+, \omega_2 \in \mathbb{R}_+\}$ ou, equivalentemente, $\Omega = \mathbb{R}^2_+$.

Experimento

Em um determinado dia, o tempo de duração e a quantidade de chuva

$\Omega = \{(\omega_1, \omega_2);\ \omega_1 \in \mathbb{R}_+, \omega_2 \in \mathbb{R}_+\}$ ou, equivalentemente, $\Omega = \mathbb{R}_+^2$.

Evento

Evento (E)

É um subconjunto do espaço amostral.

Evento

Evento (E)

É um subconjunto do espaço amostral.

Evento

Lançamento de um dado e uma moeda

E: face cara na moeda e um número par no dado.

Evento

Lançamento de um dado e uma moeda

E: face cara na moeda e um número par no dado.

Em uma amostra de solo, a proporção de Sb, As e Nb

Evento

Lançamento de um dado e uma moeda

E: face cara na moeda e um número par no dado.

Em uma amostra de solo, a proporção de Sb, As e Nb

E: arsênio ser a metade da composição do solo.

Evento

Lançamento de um dado e uma moeda

E: face cara na moeda e um número par no dado.

Em uma amostra de solo, a proporção de Sb, As e Nb

E: arsênio ser a metade da composição do solo.

Evento

Em um determinado dia, o tempo de duração e a quantidade de chuva

E: a chuva durar mais que uma hora e chover mais 50ml.

Evento

Em um determinado dia, o tempo de duração e a quantidade de chuva

E: a chuva durar mais que uma hora e chover mais 50ml.

Evento

Eventos mutuamente exclusivos

Dois eventos A e B são ditos mutuamente exclusivos (ME),

Evento

Eventos mutuamente exclusivos

Dois eventos A e B são ditos mutuamente exclusivos (ME), quando a interseção entre eles é igual ao conjunto vazio ($A \cap B = \emptyset$).

Evento

Eventos mutuamente exclusivos

Dois eventos A e B são ditos mutuamente exclusivos (ME), quando a interseção entre eles é igual ao conjunto vazio ($A \cap B = \emptyset$). Isto é, não há nada em comum entre A e B.

Evento

Eventos mutuamente exclusivos

Dois eventos A e B são ditos mutuamente exclusivos (ME), quando a interseção entre eles é igual ao conjunto vazio ($A \cap B = \emptyset$). Isto é, não há nada em comum entre A e B.

Evento

Eventos especiais

Existem dois eventos que se destacam entres todos os eventos possíveis de um experimento, são eles:

Evento

Eventos especiais

Existem dois eventos que se destacam entres todos os eventos possíveis de um experimento, são eles:

- O evento impossível: $\emptyset$.

Evento

Eventos especiais

Existem dois eventos que se destacam entres todos os eventos possíveis de um experimento, são eles:

- O evento impossível: $\emptyset$.
- O evento certo: Ω.

Evento

Eventos especiais

Existem dois eventos que se destacam entres todos os eventos possíveis de um experimento, são eles:

- O evento impossível: $\emptyset$.
- O evento certo: Ω.

σ-álgebra

Um subconjunto de Ω, representada por $\mathcal{F}$, é denominada uma σ-álgebra se satisfaz as seguinte propriedades:

1. $\Omega \in \mathcal{F}$;

σ-álgebra

Um subconjunto de Ω, representada por $\mathcal{F}$, é denominada uma σ-álgebra se satisfaz as seguinte propriedades:

1. $\Omega \in \mathcal{F}$;
2. Se $E \in \mathcal{F}$, então $E^c \in \mathcal{F}$;

σ-álgebra

Um subconjunto de Ω, representada por $\mathcal{F}$, é denominada uma σ-álgebra se satisfaz as seguinte propriedades:

1. $\Omega \in \mathcal{F}$;
2. Se $E \in \mathcal{F}$, então $E^c \in \mathcal{F}$;
3. Se $E_i \in \mathcal{F}$, $i \geq 1$, então $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathcal{F}$.

σ-álgebra

Um subconjunto de Ω, representada por $\mathcal{F}$, é denominada uma σ-álgebra se satisfaz as seguinte propriedades:

1. $\Omega \in \mathcal{F}$;
2. Se $E \in \mathcal{F}$, então $E^c \in \mathcal{F}$;
3. Se $E_i \in \mathcal{F}$, $i \geq 1$, então $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathcal{F}$.

Roteiro

Probabilidade

Motivação

A Probabilidade é uma quantificação da incerteza.

Probabilidade

Motivação

A Probabilidade é uma quantificação da incerteza. Ela é um peso dado para cada possível resultado de um experimento.

Probabilidade

Motivação

A Probabilidade é uma quantificação da incerteza. Ela é um peso dado para cada possível resultado de um experimento.

Axiomas da Probabilidade

Uma função $\mathbb{P}$, definida na σ-álgebra $\mathcal{F}$ de subconjuntos de Ω e com valores em $[0, 1]$, é uma probabilidade se satisfaz os Axiomas de Kolmogorov (1933):

1. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$;

Axiomas da Probabilidade

Uma função $\mathbb{P}$, definida na σ-álgebra $\mathcal{F}$ de subconjuntos de Ω e com valores em $[0, 1]$, é uma probabilidade se satisfaz os Axiomas de Kolmogorov (1933):

1. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$;
2. Para todo subconjunto $E \in \mathcal{F}$, $0 \leq \mathbb{P}(E) \leq 1$;

Axiomas da Probabilidade

Uma função $\mathbb{P}$, definida na σ-álgebra $\mathcal{F}$ de subconjuntos de Ω e com valores em $[0, 1]$, é uma probabilidade se satisfaz os Axiomas de Kolmogorov (1933):

1. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$;
2. Para todo subconjunto $E \in \mathcal{F}$, $0 \leq \mathbb{P}(E) \leq 1$;
3. Para toda sequência $E_1, E_2, \ldots \in \mathcal{F}$, **ME**,

Axiomas da Probabilidade

Uma função $\mathbb{P}$, definida na σ-álgebra $\mathcal{F}$ de subconjuntos de Ω e com valores em $[0, 1]$, é uma probabilidade se satisfaz os Axiomas de Kolmogorov (1933):

1. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$;
2. Para todo subconjunto $E \in \mathcal{F}$, $0 \leq \mathbb{P}(E) \leq 1$;
3. Para toda sequência $E_1, E_2, \ldots \in \mathcal{F}$, **ME**, nós temos que:

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(E_i).$$

Axiomas da Probabilidade

Uma função $\mathbb{P}$, definida na σ-álgebra $\mathcal{F}$ de subconjuntos de Ω e com valores em $[0,1]$, é uma probabilidade se satisfaz os Axiomas de Kolmogorov (1933):

1. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$;
2. Para todo subconjunto $E \in \mathcal{F}$, $0 \leq \mathbb{P}(E) \leq 1$;
3. Para toda sequência $E_1, E_2, \ldots \in \mathcal{F}$, **ME**, nós temos que:

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(E_i).$$

Probabilidade

A trinca $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ é denominada espaço de probabilidade. Os subconjuntos que estão em $\mathcal{F}$ são denominados eventos

Probabilidade

A trinca $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ é denominada espaço de probabilidade. Os subconjuntos que estão em $\mathcal{F}$ são denominados eventos e é somente a eles que atribui probabilidade.

Probabilidade

A trinca $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ é denominada espaço de probabilidade. Os subconjuntos que estão em $\mathcal{F}$ são denominados eventos e é somente a eles que atribui probabilidade.

Teoremas da Probabilidade

Sejam $E_1, E_2, \ldots$ eventos quaisquer, pertencentes ao mesmo espaço de probabilidade.

Teoremas da Probabilidade

Sejam $E_1, E_2, \ldots$ eventos quaisquer, pertencentes ao mesmo espaço de probabilidade. A partir dos Axiomas, nós temos as seguintes propriedades:

Teoremas da Probabilidade

Sejam $E_1, E_2, \ldots$ eventos quaisquer, pertencentes ao mesmo espaço de probabilidade. A partir dos Axiomas, nós temos as seguintes propriedades:

1. $\mathbb{P}(E^c) = 1 - \mathbb{P}(E)$;

Teoremas da Probabilidade

Sejam $E_1, E_2, \ldots$ eventos quaisquer, pertencentes ao mesmo espaço de probabilidade. A partir dos Axiomas, nós temos as seguintes propriedades:

1. $\mathbb{P}(E^c) = 1 - \mathbb{P}(E)$;
2. $\mathbb{P}(E_i) = \mathbb{P}(E_i \cap E_j) + \mathbb{P}(E_i \cap E_j^c)$;

Teoremas da Probabilidade

Sejam $E_1, E_2, \ldots$ eventos quaisquer, pertencentes ao mesmo espaço de probabilidade. A partir dos Axiomas, nós temos as seguintes propriedades:

1. $\mathbb{P}(E^c) = 1 - \mathbb{P}(E)$;
2. $\mathbb{P}(E_i) = \mathbb{P}(E_i \cap E_j) + \mathbb{P}(E_i \cap E_j^c)$;
3. $\mathbb{P}(E_i \cup E_j) = \mathbb{P}(E_i) + \mathbb{P}(E_j) - \mathbb{P}(E_i \cap E_j)$;

Teoremas da Probabilidade

Sejam $E_1, E_2, \ldots$ eventos quaisquer, pertencentes ao mesmo espaço de probabilidade. A partir dos Axiomas, nós temos as seguintes propriedades:

1. $\mathbb{P}(E^c) = 1 - \mathbb{P}(E)$;
2. $\mathbb{P}(E_i) = \mathbb{P}(E_i \cap E_j) + \mathbb{P}(E_i \cap E_j^c)$;
3. $\mathbb{P}(E_i \cup E_j) = \mathbb{P}(E_i) + \mathbb{P}(E_j) - \mathbb{P}(E_i \cap E_j)$;
4. Se $E_i \subset E_j$, então $\mathbb{P}(E_i) \leq \mathbb{P}(E_j)$;

Teoremas da Probabilidade

Sejam $E_1, E_2, \ldots$ eventos quaisquer, pertencentes ao mesmo espaço de probabilidade. A partir dos Axiomas, nós temos as seguintes propriedades:

1. $\mathbb{P}(E^c) = 1 - \mathbb{P}(E)$;
2. $\mathbb{P}(E_i) = \mathbb{P}(E_i \cap E_j) + \mathbb{P}(E_i \cap E_j^c)$;
3. $\mathbb{P}(E_i \cup E_j) = \mathbb{P}(E_i) + \mathbb{P}(E_j) - \mathbb{P}(E_i \cap E_j)$;
4. Se $E_i \subset E_j$, então $\mathbb{P}(E_i) \leq \mathbb{P}(E_j)$;
5. Para uma sequência de eventos,

Teoremas da Probabilidade

Sejam $E_1, E_2, \ldots$ eventos quaisquer, pertencentes ao mesmo espaço de probabilidade. A partir dos Axiomas, nós temos as seguintes propriedades:

1. $\mathbb{P}(E^c) = 1 - \mathbb{P}(E)$;
2. $\mathbb{P}(E_i) = \mathbb{P}(E_i \cap E_j) + \mathbb{P}(E_i \cap E_j^c)$;
3. $\mathbb{P}(E_i \cup E_j) = \mathbb{P}(E_i) + \mathbb{P}(E_j) - \mathbb{P}(E_i \cap E_j)$;
4. Se $E_i \subset E_j$, então $\mathbb{P}(E_i) \leq \mathbb{P}(E_j)$;
5. Para uma sequência de eventos,

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(E_i).$$

Teoremas da Probabilidade

Sejam $E_1, E_2, \ldots$ eventos quaisquer, pertencentes ao mesmo espaço de probabilidade. A partir dos Axiomas, nós temos as seguintes propriedades:

1. $\mathbb{P}(E^c) = 1 - \mathbb{P}(E)$;
2. $\mathbb{P}(E_i) = \mathbb{P}(E_i \cap E_j) + \mathbb{P}(E_i \cap E_j^c)$;
3. $\mathbb{P}(E_i \cup E_j) = \mathbb{P}(E_i) + \mathbb{P}(E_j) - \mathbb{P}(E_i \cap E_j)$;
4. Se $E_i \subset E_j$, então $\mathbb{P}(E_i) \leq \mathbb{P}(E_j)$;
5. Para uma sequência de eventos,
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(E_i).$$

Probabilidade

Observação

Ainda que o interesse seja em observar mais do que uma situação a partir de um experimento, a definição de probabilidade não se altera.

Observação

Ainda que o interesse seja em observar mais do que uma situação a partir de um experimento, a definição de probabilidade não se altera. Logo, conceitos como Probabilidade Condicional, Teorema de Bayes e Independência continuam válidos.

Probabilidade

Observação

Ainda que o interesse seja em observar mais do que uma situação a partir de um experimento, a definição de probabilidade não se altera. Logo, conceitos como Probabilidade Condicional, Teorema de Bayes e Independência continuam válidos.

Roteiro

Referências

Kolmogorov, A. N. (1933), *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Springer, Berlin.

Obrigado!

✉ tiago.magalhaes@ufjf.br

🖱 ufjf.br/tiago_magalhaes

🌍 Departamento de Estatística, Sala 319