

Intervalos de confiança

Tiago M. Magalhães

Departamento de Estatística - ICE-UFJF

Juiz de Fora, 07 de maio de 2025



Roteiro

- 1 Introdução
- 2 Intervalo de confiança para β_m
- 3 Intervalos de confiança para μ_h e σ^2
- 4 Intervalos de confiança a partir de estatísticas do teste
- 5 Aplicação
- 6 Referências bibliográficas



Roteiro

- 1 Introdução
- 2 Intervalo de confiança para β_m
- 3 Intervalos de confiança para μ_h e σ^2
- 4 Intervalos de confiança a partir de estatísticas do teste
- 5 Aplicação
- 6 Referências bibliográficas



Modelo de regressão linear

Suponham que $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ tais que

$$Y_\ell = \mathbf{x}_\ell^\top \boldsymbol{\beta} + \varepsilon_\ell, \ell = 1, 2, \dots, n, \quad (1)$$

Modelo de regressão linear

Suponham que $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ tais que

$$Y_\ell = \mathbf{x}_\ell^\top \boldsymbol{\beta} + \varepsilon_\ell, \ell = 1, 2, \dots, n, \quad (1)$$

em que $\mathbf{x}_\ell = (x_{\ell 1}, x_{\ell 2}, \dots, x_{\ell p})^\top$ é conhecido, $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p)^\top$ é um vetor de parâmetros desconhecidos a serem estimados, $\varepsilon_\ell \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ são variáveis aleatórias independentes e com a mesma variância σ^2 , também desconhecida, a ser estimada.



Modelo de regressão linear

Suponham que $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ tais que

$$Y_\ell = \mathbf{x}_\ell^\top \boldsymbol{\beta} + \varepsilon_\ell, \ell = 1, 2, \dots, n, \quad (1)$$

em que $\mathbf{x}_\ell = (x_{\ell 1}, x_{\ell 2}, \dots, x_{\ell p})^\top$ é conhecido, $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p)^\top$ é um vetor de parâmetros desconhecidos a serem estimados, $\varepsilon_\ell \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ são variáveis aleatórias independentes e com a mesma variância σ^2 , também desconhecida, a ser estimada.



Forma matricial

A Equação (1) é o que nós definimos como **modelo de regressão normal linear** (MNL), podendo ser escrita de forma matricial, da seguinte forma:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\beta + \varepsilon, \quad (2)$$



Forma matricial

A Equação (1) é o que nós definimos como **modelo de regressão normal linear** (MNL), podendo ser escrita de forma matricial, da seguinte forma:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (2)$$

em que $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2, \dots, Y_n)^\top$ e $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)^\top$, $\boldsymbol{\varepsilon} \sim \mathcal{N}_n(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I}_n)$, sendo $\mathbf{0}$ o vetor nulo de dimensão n , $\mathbf{I}_n$ a matriz identidade de ordem n e $\mathbf{X} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)^\top$, a matriz de planejamento.



Forma matricial

A Equação (1) é o que nós definimos como **modelo de regressão normal linear** (MNL), podendo ser escrita de forma matricial, da seguinte forma:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (2)$$

em que $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2, \dots, Y_n)^\top$ e $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)^\top$, $\boldsymbol{\varepsilon} \sim \mathcal{N}_n(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I}_n)$, sendo $\mathbf{0}$ o vetor nulo de dimensão n , $\mathbf{I}_n$ a matriz identidade de ordem n e $\mathbf{X} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)^\top$, a matriz de planejamento.



Método de máxima verossimilhança

O **estimador de máxima verossimilhança** (EMV) de β e σ^2 são dados, respectivamente, por:

$$\begin{aligned}\hat{\beta} &= (\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^\top \mathbf{Y}, \\ \hat{\sigma}_{\text{MV}}^2 &= \frac{1}{n} \left(\mathbf{Y} - \mathbf{X} \hat{\beta} \right)^\top \left(\mathbf{Y} - \mathbf{X} \hat{\beta} \right).\end{aligned}\tag{3}$$

Método de máxima verossimilhança

O **estimador de máxima verossimilhança** (EMV) de β e σ^2 são dados, respectivamente, por:

$$\begin{aligned}\hat{\beta} &= (\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^\top \mathbf{Y}, \\ \hat{\sigma}_{\text{MV}}^2 &= \frac{1}{n} \left(\mathbf{Y} - \mathbf{X} \hat{\beta} \right)^\top \left(\mathbf{Y} - \mathbf{X} \hat{\beta} \right).\end{aligned}\tag{3}$$

Observação: o EMV de σ^2 também pode ser escrito como função do quadrado médio do resíduo (QMRes).



Método de máxima verossimilhança

O **estimador de máxima verossimilhança** (EMV) de β e σ^2 são dados, respectivamente, por:

$$\begin{aligned}\hat{\beta} &= (\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^\top \mathbf{Y}, \\ \hat{\sigma}_{\text{MV}}^2 &= \frac{1}{n} \left(\mathbf{Y} - \mathbf{X} \hat{\beta} \right)^\top \left(\mathbf{Y} - \mathbf{X} \hat{\beta} \right).\end{aligned}\tag{3}$$

Observação: o EMV de σ^2 também pode ser escrito como função do quadrado médio do resíduo (QMRes).



Método de máxima verossimilhança

Sob as condições de regularidades, nós temos que:

$$\begin{aligned}\hat{\beta} &\sim \mathcal{N}_p \left\{ \beta, \sigma^2 \left(\mathbf{X}^\top \mathbf{X} \right)^{-1} \right\}, \\ \hat{\sigma}_{\text{MV}}^2 &\sim \mathcal{N} \left\{ \sigma^2, \frac{2(\sigma^2)^2}{n} \right\},\end{aligned}\tag{4}$$

Método de máxima verossimilhança

Sob as condições de regularidades, nós temos que:

$$\begin{aligned}\hat{\beta} &\sim \mathcal{N}_p \left\{ \beta, \sigma^2 \left(\mathbf{X}^\top \mathbf{X} \right)^{-1} \right\}, \\ \hat{\sigma}_{\text{MV}}^2 &\sim \mathcal{N} \left\{ \sigma^2, \frac{2(\sigma^2)^2}{n} \right\},\end{aligned}\tag{4}$$

quando o tamanho de amostra é grande, adicionalmente, $\hat{\beta}$ e $\hat{\sigma}_{\text{MV}}^2$ são ortogonais.

Método de máxima verossimilhança

Sob as condições de regularidades, nós temos que:

$$\begin{aligned}\hat{\beta} &\sim \mathcal{N}_p \left\{ \beta, \sigma^2 (\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \right\}, \\ \hat{\sigma}_{\text{MV}}^2 &\sim \mathcal{N} \left\{ \sigma^2, \frac{2(\sigma^2)^2}{n} \right\},\end{aligned}\tag{4}$$

quando o tamanho de amostra é grande, adicionalmente, $\hat{\beta}$ e $\hat{\sigma}_{\text{MV}}^2$ são ortogonais.

Introdução

Motivação

O resultado (4) é muito importante, pois ele permite a construção de procedimentos inferenciais como **intervalos de confiança** e testes de hipóteses.



Roteiro

- 1 Introdução
- 2 Intervalo de confiança para β_m
- 3 Intervalos de confiança para μ_h e σ^2
- 4 Intervalos de confiança a partir de estatísticas do teste
- 5 Aplicação
- 6 Referências bibliográficas



Intervalo de confiança

Seja $c_{mm'}$, o (m, m') -ésimo elemento da matriz $\mathbf{C} = (\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1}$, com $m, m' = 1, 2, \dots, p$, i.e, $\text{Cov}(\hat{\beta}_m, \hat{\beta}_{m'}) = \sigma^2 c_{mm'}$. Por (4), nós temos que,

$$\frac{\hat{\beta}_m - \beta_m}{\sqrt{\sigma^2 c_{mm}}} \sim \mathcal{N}(0, 1), \quad (5)$$

para $m = 1, 2, \dots, p$.

Intervalo de confiança

Seja $c_{mm'}$, o (m, m') -ésimo elemento da matriz $\mathbf{C} = (\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1}$, com $m, m' = 1, 2, \dots, p$, i.e, $\text{Cov}(\hat{\beta}_m, \hat{\beta}_{m'}) = \sigma^2 c_{mm'}$. Por (4), nós temos que,

$$\frac{\hat{\beta}_m - \beta_m}{\sqrt{\sigma^2 c_{mm}}} \sim \mathcal{N}(0, 1), \quad (5)$$

para $m = 1, 2, \dots, p$.

Intervalo de confiança

Como a estatística em (5) depende de um parâmetro desconhecido σ^2 , nós precisamos substituí-lo por uma estimativa não viesada, no caso, pelo QMRes, e, assim, nós temos que

$$\frac{\hat{\beta}_m - \beta_m}{\sqrt{\text{QMRes } c_{mm}}} \sim t(n - p), \quad (6)$$

Intervalo de confiança

Como a estatística em (5) depende de um parâmetro desconhecido σ^2 , nós precisamos substituí-lo por uma estimativa não viesada, no caso, pelo QMRes, e, assim, nós temos que

$$\frac{\hat{\beta}_m - \beta_m}{\sqrt{\text{QMRes } c_{mm}}} \sim t(n - p), \quad (6)$$

em que $t(n - p)$ é a distribuição t de Student (Gosset “Student”, 1908), com $n - p$ graus de liberdade, $m = 1, 2, \dots, p$.



Intervalo de confiança

Como a estatística em (5) depende de um parâmetro desconhecido σ^2 , nós precisamos substituí-lo por uma estimativa não viesada, no caso, pelo QMRes, e, assim, nós temos que

$$\frac{\hat{\beta}_m - \beta_m}{\sqrt{\text{QMRes } c_{mm}}} \sim t(n - p), \quad (6)$$

em que $t(n - p)$ é a distribuição t de Student (Gosset “Student”, 1908), com $n - p$ graus de liberdade, $m = 1, 2, \dots, p$.



Intervalo de confiança para β_m

Por (6), o intervalo de confiança para β_m , com coeficiente de confiança $(1 - \alpha)$ é dado por

$$IC(\beta_m; 1 - \alpha) = \hat{\beta}_m \mp t(1 - \alpha/2; n - p) \sqrt{QMRes c_{mm}},$$

Intervalo de confiança para β_m

Por (6), o intervalo de confiança para β_m , com coeficiente de confiança $(1 - \alpha)$ é dado por

$$\text{IC}(\beta_m; 1 - \alpha) = \hat{\beta}_m \mp t(1 - \alpha/2; n - p) \sqrt{\text{QMRes } c_{mm}},$$

em que $t(1 - \alpha/2; n - p)$ é o quantil $100(1 - \alpha/2)\%$ da distribuição t de Student, com $n - p$ graus de liberdade, $m = 1, 2, \dots, p$.

Intervalo de confiança para β_m

Por (6), o intervalo de confiança para β_m , com coeficiente de confiança $(1 - \alpha)$ é dado por

$$\text{IC}(\beta_m; 1 - \alpha) = \hat{\beta}_m \mp t(1 - \alpha/2; n - p) \sqrt{\text{QMRes } c_{mm}},$$

em que $t(1 - \alpha/2; n - p)$ é o quantil $100(1 - \alpha/2)\%$ da distribuição t de Student, com $n - p$ graus de liberdade, $m = 1, 2, \dots, p$.

Roteiro

- 1 Introdução
- 2 Intervalo de confiança para β_m
- 3 Intervalos de confiança para μ_h e σ^2
- 4 Intervalos de confiança a partir de estatísticas do teste
- 5 Aplicação
- 6 Referências bibliográficas



Inferência sobre μ_h

Nós podemos também nos interessar pela a estimação de μ_h , a média de Y_h , para um vetor de observações $\mathbf{x}_h = (x_{h1}, x_{h2}, \dots, x_{hp})^\top$, que, pelo princípio da invariância, tem seu estimador dado por

$$\hat{\mu}_h = \mathbf{x}_h^\top \hat{\boldsymbol{\beta}}. \quad (7)$$



Inferência sobre μ_h

Nós podemos também nos interessar pela a estimação de μ_h , a média de Y_h , para um vetor de observações $\mathbf{x}_h = (x_{h1}, x_{h2}, \dots, x_{hp})^\top$, que, pelo princípio da invariância, tem seu estimador dado por

$$\hat{\mu}_h = \mathbf{x}_h^\top \hat{\boldsymbol{\beta}}. \quad (7)$$



Inferência sobre μ_h

Por (7), nós temos que

$$\mathbb{E}(\hat{\mu}_h) = \mathbb{E}(\mathbf{x}_h^\top \hat{\boldsymbol{\beta}}) = \mathbf{x}_h^\top \mathbb{E}(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = \mathbf{x}_h^\top \boldsymbol{\beta} = \mu_h$$

Inferência sobre μ_h

Por (7), nós temos que

$$\mathbb{E}(\hat{\mu}_h) = \mathbb{E}(\mathbf{x}_h^\top \hat{\boldsymbol{\beta}}) = \mathbf{x}_h^\top \mathbb{E}(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = \mathbf{x}_h^\top \boldsymbol{\beta} = \mu_h$$

e

$$\text{Var}(\hat{\mu}_h) = \text{Var}(\mathbf{x}_h^\top \hat{\boldsymbol{\beta}}) = \mathbf{x}_h^\top \text{Var}(\hat{\boldsymbol{\beta}}) \mathbf{x}_h = \sigma^2 \mathbf{x}_h^\top (\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \mathbf{x}_h.$$

Inferência sobre μ_h

Por (7), nós temos que

$$\mathbb{E}(\hat{\mu}_h) = \mathbb{E}(\mathbf{x}_h^\top \hat{\boldsymbol{\beta}}) = \mathbf{x}_h^\top \mathbb{E}(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = \mathbf{x}_h^\top \boldsymbol{\beta} = \mu_h$$

e

$$\text{Var}(\hat{\mu}_h) = \text{Var}(\mathbf{x}_h^\top \hat{\boldsymbol{\beta}}) = \mathbf{x}_h^\top \text{Var}(\hat{\boldsymbol{\beta}}) \mathbf{x}_h = \sigma^2 \mathbf{x}_h^\top (\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \mathbf{x}_h.$$



Inferência sobre μ_h

Por (7) e pelo método delta (Dorfman, 1938), a distribuição de $\hat{\mu}_h$ é dada por:

$$\hat{\mu}_h \sim \mathcal{N} \left\{ \mu_h, \sigma^2 \mathbf{x}_h^\top \left(\mathbf{X}^\top \mathbf{X} \right)^{-1} \mathbf{x}_h \right\}.$$

Inferência sobre μ_h

Por (7) e pelo método delta (Dorfman, 1938), a distribuição de $\hat{\mu}_h$ é dada por:

$$\hat{\mu}_h \sim \mathcal{N} \left\{ \mu_h, \sigma^2 \mathbf{x}_h^\top \left(\mathbf{X}^\top \mathbf{X} \right)^{-1} \mathbf{x}_h \right\}.$$

O estimador da variância de $\hat{\mu}_h$ é dada por:

$$\hat{\text{Var}}(\hat{\mu}_h) = \text{QMRes} \mathbf{x}_h^\top \left(\mathbf{X}^\top \mathbf{X} \right)^{-1} \mathbf{x}_h.$$

Inferência sobre μ_h

Por (7) e pelo método delta (Dorfman, 1938), a distribuição de $\hat{\mu}_h$ é dada por:

$$\hat{\mu}_h \sim \mathcal{N} \left\{ \mu_h, \sigma^2 \mathbf{x}_h^\top \left(\mathbf{X}^\top \mathbf{X} \right)^{-1} \mathbf{x}_h \right\}.$$

O estimador da variância de $\hat{\mu}_h$ é dada por:

$$\hat{\text{Var}}(\hat{\mu}_h) = \text{QMRes} \mathbf{x}_h^\top \left(\mathbf{X}^\top \mathbf{X} \right)^{-1} \mathbf{x}_h.$$

Intervalo de confiança para μ_h

O intervalo de confiança para μ_h :

$$IC(\mu_h; 1 - \alpha) = \hat{\mu}_h \mp t(1 - \alpha/2; n - p) \sqrt{\text{QMRes } \mathbf{x}_h^\top (\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \mathbf{x}_h},$$



Intervalo de confiança para μ_h

O intervalo de confiança para μ_h :

$$\text{IC}(\mu_h; 1 - \alpha) = \hat{\mu}_h \mp t(1 - \alpha/2; n - p) \sqrt{\text{QMRes } \mathbf{x}_h^\top (\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \mathbf{x}_h},$$

em que $t(1 - \alpha/2; n - p)$ é o quantil $100(1 - \alpha/2)\%$ da distribuição t de Student, com $n - p$ graus de liberdade.



Intervalo de confiança para μ_h

O intervalo de confiança para μ_h :

$$\text{IC}(\mu_h; 1 - \alpha) = \hat{\mu}_h \mp t(1 - \alpha/2; n - p) \sqrt{\text{QMRes } \mathbf{x}_h^\top (\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \mathbf{x}_h},$$

em que $t(1 - \alpha/2; n - p)$ é o quantil 100(1 - $\alpha/2$)% da distribuição t de Student, com $n - p$ graus de liberdade.



Intervalo de confiança para μ_h

Uma alternativa ao IC anterior, o método de Working-Hotelling (Working e Hotelling, 1929) é utilizado para a construção de uma banda de confiança para μ_h :

$$\text{IC}(\mu_h; 1 - \alpha) = \hat{\mu}_h \mp W \sqrt{\text{QMRes } \mathbf{x}_h^\top (\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \mathbf{x}_h},$$

Intervalo de confiança para μ_h

Uma alternativa ao IC anterior, o método de Working-Hotelling (Working e Hotelling, 1929) é utilizado para a construção de uma banda de confiança para μ_h :

$$\text{IC}(\mu_h; 1 - \alpha) = \hat{\mu}_h \mp W \sqrt{\text{QMRes } \mathbf{x}_h^\top (\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \mathbf{x}_h},$$

em que $W^2 = pF(1 - \alpha; p, n - p)$ e $F(1 - \alpha; p, n - p)$ é o quantil $100(1 - \alpha)\%$ da distribuição F , com p e $n - p$ graus de liberdade.



Intervalo de confiança para μ_h

Uma alternativa ao IC anterior, o método de Working-Hotelling (Working e Hotelling, 1929) é utilizado para a construção de uma banda de confiança para μ_h :

$$\text{IC}(\mu_h; 1 - \alpha) = \hat{\mu}_h \mp W \sqrt{\text{QMRes } \mathbf{x}_h^\top (\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \mathbf{x}_h},$$

em que $W^2 = pF(1 - \alpha; p, n - p)$ e $F(1 - \alpha; p, n - p)$ é o quantil $100(1 - \alpha)\%$ da distribuição F , com p e $n - p$ graus de liberdade.



Intervalo de confiança para μ_h

Observação

O método também é conhecido como Bandas de Confiança Working-Hotelling-Scheffé, pela semelhança do Método de Working-Hotelling com o método de Scheffé (1959) na análise de contraste em uma Análise de Variância.

Intervalo de confiança para σ^2

O intervalo de confiança para σ^2 :

$$IC(\sigma^2; 1 - \alpha) = \left[\frac{(n - p)Q\text{MRes}}{\chi^2(\alpha/2; n - p)}; \frac{(n - p)Q\text{MRes}}{\chi^2(1 - \alpha/2; n - p)} \right],$$

Intervalo de confiança para σ^2

O intervalo de confiança para σ^2 :

$$IC(\sigma^2; 1 - \alpha) = \left[\frac{(n - p)QMR_{es}}{\chi^2(\alpha/2; n - p)}; \frac{(n - p)QMR_{es}}{\chi^2(1 - \alpha/2; n - p)} \right],$$

em que $\chi^2(\alpha/2; n - p)$ e $\chi^2(1 - \alpha/2; n - p)$ são, respectivamente, os quantis 100 $\alpha/2\%$ e 100(1 - $\alpha/2$)% da distribuição qui-quadrado, com $n - p$ graus de liberdade.



Intervalo de confiança para σ^2

O intervalo de confiança para σ^2 :

$$IC(\sigma^2; 1 - \alpha) = \left[\frac{(n - p)QMR_{\text{es}}}{\chi^2(\alpha/2; n - p)}; \frac{(n - p)QMR_{\text{es}}}{\chi^2(1 - \alpha/2; n - p)} \right],$$

em que $\chi^2(\alpha/2; n - p)$ e $\chi^2(1 - \alpha/2; n - p)$ são, respectivamente, os quantis 100 $\alpha/2\%$ e 100(1 - $\alpha/2$)% da distribuição qui-quadrado, com $n - p$ graus de liberdade.



Roteiro

- 1 Introdução
- 2 Intervalo de confiança para β_m
- 3 Intervalos de confiança para μ_h e σ^2
- 4 Intervalos de confiança a partir de estatísticas do teste
- 5 Aplicação
- 6 Referências bibliográficas



Intervalos de confiança a partir de estatísticas do teste

Sejam S_1 a S_4 , respectivamente, as estatísticas dos testes da razão de verossimilhanças (Wilks, 1938), Wald (Wald, 1943), escore (Rao, 1948) e gradiente (Terrell, 2002). Nós vimos que, quando $n \rightarrow \infty$,

$$S_i \sim \chi_q^2, \quad i = 1, 2, 3, 4,$$



Intervalos de confiança a partir de estatísticas do teste

Sejam S_1 a S_4 , respectivamente, as estatísticas dos testes da razão de verossimilhanças (Wilks, 1938), Wald (Wald, 1943), escore (Rao, 1948) e gradiente (Terrell, 2002). Nós vimos que, quando $n \rightarrow \infty$,

$$S_i \sim \chi_q^2, \quad i = 1, 2, 3, 4,$$

em que q é o número de parâmetros na hipótese nula, a dimensão do vetor $\beta_1^{(0)}$.



Intervalos de confiança a partir de estatísticas do teste

Sejam S_1 a S_4 , respectivamente, as estatísticas dos testes da razão de verossimilhanças (Wilks, 1938), Wald (Wald, 1943), escore (Rao, 1948) e gradiente (Terrell, 2002). Nós vimos que, quando $n \rightarrow \infty$,

$$S_i \sim \chi_q^2, \quad i = 1, 2, 3, 4,$$

em que q é o número de parâmetros na hipótese nula, a dimensão do vetor $\beta_1^{(0)}$.



Intervalos de confiança a partir de estatísticas do teste

Intervalos de confiança a partir das estatística S_i é construído através de um conjunto de valores tais que,

$$S_i \leq \chi^2(1 - \alpha; q),$$

Intervalos de confiança a partir de estatísticas do teste

Intervalos de confiança a partir das estatística S_i é construído através de um conjunto de valores tais que,

$$S_i \leq \chi^2(1 - \alpha; q),$$

em que $\chi^2(1 - \alpha; q)$ é o quantil $100(1 - \alpha)\%$ de uma distribuição qui-quadrado com q graus de liberdade, $i = 1, 2, 3, 4$.



Intervalos de confiança a partir de estatísticas do teste

Intervalos de confiança a partir das estatística S_i é construído através de um conjunto de valores tais que,

$$S_i \leq \chi^2(1 - \alpha; q),$$

em que $\chi^2(1 - \alpha; q)$ é o quantil $100(1 - \alpha)\%$ de uma distribuição qui-quadrado com q graus de liberdade, $i = 1, 2, 3, 4$.



Intervalos de confiança a partir de estatísticas do teste

Suponham que o nosso interesse é testar,

$$\begin{cases} \mathcal{H}: \beta_1 = \beta^* \\ \mathcal{A}: \beta_1 \neq \beta^* \end{cases}, \quad (8)$$

Intervalos de confiança a partir de estatísticas do teste

Suponham que o nosso interesse é testar,

$$\begin{cases} \mathcal{H}: \beta_1 = \beta^* \\ \mathcal{A}: \beta_1 \neq \beta^* \end{cases}, \quad (8)$$

a estatística da razão de verossimilhança (RV) pode ser escrita como

$$S_1 = 2 \left[\ell(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \hat{\sigma}^2) - \ell(\beta^*, \tilde{\beta}_2, \tilde{\sigma}^2) \right].$$



Intervalos de confiança a partir de estatísticas do teste

Suponham que o nosso interesse é testar,

$$\begin{cases} \mathcal{H}: \beta_1 = \beta^* \\ \mathcal{A}: \beta_1 \neq \beta^* \end{cases}, \quad (8)$$

a estatística da razão de verossimilhança (RV) pode ser escrita como

$$S_1 = 2 \left[\ell(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \hat{\sigma}^2) - \ell(\beta^*, \tilde{\beta}_2, \tilde{\sigma}^2) \right].$$



IC baseado na estatística RV

O IC construído a partir da estatística RV é construído da seguinte forma, (algoritmo adaptado de Hosmer et al., 2013, p. 19),

- 1 definir um conjunto de β^* tal que $\mathcal{H}$, em (8), não seja rejeitado;



IC baseado na estatística RV

O IC construído a partir da estatística RV é construído da seguinte forma, (algoritmo adaptado de Hosmer et al., 2013, p. 19),

- ① definir um conjunto de β^* tal que $\mathcal{H}$, em (8), não seja rejeitado;
- ② os limites inferior e superior do intervalo serão os percentis 2,5 e 97,5 do conjunto de valores de β^* .



IC baseado na estatística RV

O IC construído a partir da estatística RV é construído da seguinte forma, (algoritmo adaptado de Hosmer et al., 2013, p. 19),

- ① definir um conjunto de β^* tal que $\mathcal{H}$, em (8), não seja rejeitado;
- ② os limites inferior e superior do intervalo serão os percentis 2,5 e 97,5 do conjunto de valores de β^* .



IC baseado na estatística RV

Observações:

- 1 O procedimento é válido para todos os β_m , $m = 1, 2, \dots, p$;

IC baseado na estatística RV

Observações:

- ① O procedimento é válido para todos os β_m , $m = 1, 2, \dots, p$;
- ② Para a construção de regiões de confiança, somente será necessário mudar as restrições em $\mathcal{H}$. Por exemplo, $\mathcal{H} : \beta_m = \beta^*, \beta_{m'} = \beta^{**}$;



IC baseado na estatística RV

Observações:

- ① O procedimento é válido para todos os β_m , $m = 1, 2, \dots, p$;
- ② Para a construção de regiões de confiança, somente será necessário mudar as restrições em $\mathcal{H}$. Por exemplo, $\mathcal{H} : \beta_m = \beta^*, \beta_{m'} = \beta^{**}$;
- ③ Como mencionado, IC baseados nas estatísticas de Wald, escore e gradiente também podem ser construído. Em alguns casos, poderão ter forma fechada.



IC baseado na estatística RV

Observações:

- ① O procedimento é válido para todos os β_m , $m = 1, 2, \dots, p$;
- ② Para a construção de regiões de confiança, somente será necessário mudar as restrições em $\mathcal{H}$. Por exemplo, $\mathcal{H} : \beta_m = \beta^*, \beta_{m'} = \beta^{**}$;
- ③ Como mencionado, IC baseados nas estatísticas de Wald, escore e gradiente também podem ser construído. Em alguns casos, poderão ter forma fechada.



Roteiro

- 1 Introdução
- 2 Intervalo de confiança para β_m
- 3 Intervalos de confiança para μ_h e σ^2
- 4 Intervalos de confiança a partir de estatísticas do teste
- 5 Aplicação
- 6 Referências bibliográficas



Aplicação 1. Conjunto de dados *Westwood Company* (Neter et al., 1983, p. 36). Após o ajuste, nós temos o seguinte modelo estimado,

$$\hat{Y}_\ell = 10 + 2x_{\ell 2},$$

Aplicação 1. Conjunto de dados *Westwood Company* (Neter et al., 1983, p. 36). Após o ajuste, nós temos o seguinte modelo estimado,

$$\hat{Y}_\ell = 10 + 2x_{\ell 2},$$

em que Y_ℓ : horas trabalhadas, $x_{\ell 2}$: tamanho do lote, $\ell = 1, 2, \dots, 10$.

Aplicação 1. Conjunto de dados *Westwood Company* (Neter et al., 1983, p. 36). Após o ajuste, nós temos o seguinte modelo estimado,

$$\hat{Y}_\ell = 10 + 2x_{\ell 2},$$

em que Y_ℓ : horas trabalhadas, $x_{\ell 2}$: tamanho do lote, $\ell = 1, 2, \dots, 10$.

Exemplo

Nós temos também que:

Tabela 1: Estimativas do parâmetros.

Parâmetro	Estimativa	EP	t_c
β_1	10	2,503	3,995
β_2	2	0,047	42,583

$$QMRes = 7,5.$$

Exemplo

Para $\alpha = 0,05$, $t(0,975; 8) = 2,31$. Então, o intervalo de confiança baseado na estatística t , é dado por:

$$IC(\beta_1; 0,95) = [4,23; 15,77] ,$$

$$IC(\beta_2; 0,95) = [1,89; 2,11] .$$

Aplicação 2. (Neter et al., 1983, p. 247) Conjunto de dados da *Zarthan Company*. Após o ajuste, nós temos o seguinte modelo estimado,

$$\hat{Y}_\ell = 3,453 + 0,496x_{\ell 2} + 0,009x_{\ell 3},$$

Aplicação 2. (Neter et al., 1983, p. 247) Conjunto de dados da *Zarthan Company*. Após o ajuste, nós temos o seguinte modelo estimado,

$$\hat{Y}_\ell = 3,453 + 0,496x_{\ell 2} + 0,009x_{\ell 3},$$

em que Y_ℓ : dúzias vendidas, $x_{\ell 2}$: tamanho da população (por mil habitantes), $x_{\ell 3}$: renda per capita (em dólares), $\ell = 1, 2, \dots, 15$.

Aplicação 2. (Neter et al., 1983, p. 247) Conjunto de dados da *Zarthan Company*. Após o ajuste, nós temos o seguinte modelo estimado,

$$\hat{Y}_\ell = 3,453 + 0,496x_{\ell 2} + 0,009x_{\ell 3},$$

em que Y_ℓ : dúzias vendidas, $x_{\ell 2}$: tamanho da população (por mil habitantes), $x_{\ell 3}$: renda per capita (em dólares), $\ell = 1, 2, \dots, 15$.

Exemplo

Nós temos também que:

Tabela 2: Estimativas do parâmetros.

Parâmetro	Estimativa	EP	t_c
β_1	3,453	2,431	1,420
β_2	0,496	0,006	81,924
β_3	0,009	0,001	9,502

$QM_{Res} = 4,74$.

Exemplo

Para $\alpha = 0,05$, $t(0,975; 12) = 2,179$. Então, o intervalo de confiança baseado na estatística t , é dado por:

$$IC(\beta_1; 0,95) = [-1,843; 8,749] ,$$

$$IC(\beta_2; 0,95) = [0,483; 0,509] ,$$

$$IC(\beta_3; 0,95) = [0,007; 0,011] .$$

Exemplo

Para $\alpha = 0,05$, $t(0,975; 12) = 2,179$. Então, o intervalo de confiança baseado na estatística t , é dado por:

$$IC(\beta_1; 0,95) = [-1,843; 8,749],$$

$$IC(\beta_2; 0,95) = [0,483; 0,509],$$

$$IC(\beta_3; 0,95) = [0,007; 0,011].$$

Como nós podemos ver, o IC para β_1 contém o zero, isto é, o intercepto não foi significativo.



Exemplo

Para $\alpha = 0,05$, $t(0,975; 12) = 2,179$. Então, o intervalo de confiança baseado na estatística t , é dado por:

$$IC(\beta_1; 0,95) = [-1,843; 8,749],$$

$$IC(\beta_2; 0,95) = [0,483; 0,509],$$

$$IC(\beta_3; 0,95) = [0,007; 0,011].$$

Como nós podemos ver, o IC para β_1 contém o zero, isto é, o intercepto não foi significativo.



Exemplo

A Tabela 3 apresenta o ajuste considerando um modelo sem intercepto:

Tabela 3: Estimativas do parâmetros.

Parâmetro	Estimativa	EP	t_c
β_2	0,495	0,006	78,99
β_3	0,010	0,001	18,83

QMRes = 5,111.

Exemplo

Para $\alpha = 0,05$, $t(0,975; 12) = 2,18$. Então, o intervalo de confiança baseado na estatística t , é dado por:

$$IC(\beta_2; 0,95) = [0,482; 0,509] ,$$

$$IC(\beta_3; 0,95) = [0,009; 0,012] .$$

Exemplo

Para $\alpha = 0,05$, $t(0,975; 12) = 2,18$. Então, o intervalo de confiança baseado na estatística t , é dado por:

$$IC(\beta_2; 0,95) = [0,482; 0,509],$$

$$IC(\beta_3; 0,95) = [0,009; 0,012].$$

Roteiro

- 1 Introdução
- 2 Intervalo de confiança para β_m
- 3 Intervalos de confiança para μ_h e σ^2
- 4 Intervalos de confiança a partir de estatísticas do teste
- 5 Aplicação
- 6 Referências bibliográficas

Referências bibliográficas I

Dorfman, R. (1938), 'A note on the δ -method for finding variance formulae', *The Biometric Bulletin* **1**, 129–137.

Gosset "Student", W. S. (1908), 'The probable error of a mean', *Biometrika* **6**(1), 1–25.

Hosmer, D. W., Lemeshow, S. e Sturdivant, R. X. (2013), *Applied logistic regression*, 3rd edn, Wiley, New Jersey.

Neter, J., Wasserman, W. e Kutner, M. H. (1983), *Applied linear regression models*, Richard D. Irwin Inc, Homewood, Illinois.



Referências bibliográficas II

Rao, C. R. (1948), 'Large sample tests of statistical hypotheses concerning several parameters with applications to problems of estimation', *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* **44**(1), 50–57.

Scheffé, H. (1959), *The Analysis of Variance*, Wiley, New York.

Terrell, G. R. (2002), 'The gradient statistic', *Computing Science and Statistics* **34**, 206–215.

Wald, A. (1943), 'Test of statistical hypotheses concerning several parameter when the number of observations is large', *Transactions of the American Mathematical Society* **54**(3), 426–482.



Referências bibliográficas III

Wilks, S. S. (1938), 'The large-sample distribution of likelihood ratio for testing composite hypotheses', *The Annals of Mathematical Statistics* **9**(1), 60–62.

Working, H. e Hotelling, H. (1929), 'Applications of the theory of error to the interpretation of trends', *Journal of the American Statistical Association* **24**(165A), 73–85.



Obrigado!

✉ tiago.magalhaes@ufjf.br

🔗 ufjf.br/tiago_magalhaes

🌐 Departamento de Estatística, Sala 319

