

Conceitos iniciais

Tiago M. Magalhães

Departamento de Estatística - ICE-UFJF

Juiz de Fora, 28 de abril de 2025



Roteiro

- 1 Operações
- 2 Resultados matriciais
- 3 Estimação
- 4 Referências bibliográficas



Roteiro

- 1 Operações
- 2 Resultados matriciais
- 3 Estimação
- 4 Referências bibliográficas



Somatórios

Sejam $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$, n números quaisquer. Então,

$$\sum_{i=1}^n Y_i = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n, \quad (1)$$

Somatórios

Sejam $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$, n números quaisquer. Então,

$$\sum_{i=1}^n Y_i = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n, \quad (1)$$

em que $\sum$ é denominado operador soma.

Somatórios

Sejam $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$, n números quaisquer. Então,

$$\sum_{i=1}^n Y_i = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n, \quad (1)$$

em que $\sum$ é denominado operador soma.

Somatórios

De (1), nós temos as seguintes propriedades:

- $\sum_{i=1}^n a = na;$



Somatórios

De (1), nós temos as seguintes propriedades:

- $\sum_{i=1}^n a = na;$
- $\sum_{i=1}^n (Y_i + Z_i) = \sum_{i=1}^n Y_i + \sum_{i=1}^n Z_i;$



Somatórios

De (1), nós temos as seguintes propriedades:

- $\sum_{i=1}^n a = na;$
- $\sum_{i=1}^n (Y_i + Z_i) = \sum_{i=1}^n Y_i + \sum_{i=1}^n Z_i;$
- $\sum_{i=1}^n (b + cZ_i) = nb + c \sum_{i=1}^n Z_i;$



Somatórios

De (1), nós temos as seguintes propriedades:

- $\sum_{i=1}^n a = na$;
- $\sum_{i=1}^n (Y_i + Z_i) = \sum_{i=1}^n Y_i + \sum_{i=1}^n Z_i$;
- $\sum_{i=1}^n (b + cZ_i) = nb + c \sum_{i=1}^n Z_i$;

em que a, b, c são constantes e $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ são números quaisquer.



Somatórios

De (1), nós temos as seguintes propriedades:

- $\sum_{i=1}^n a = na$;
- $\sum_{i=1}^n (Y_i + Z_i) = \sum_{i=1}^n Y_i + \sum_{i=1}^n Z_i$;
- $\sum_{i=1}^n (b + cZ_i) = nb + c \sum_{i=1}^n Z_i$;

em que a, b, c são constantes e $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ são números quaisquer.



Produtórios

Sejam $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$, n números quaisquer. Então,

$$\prod_{i=1}^n Y_i = Y_1 \times Y_2 \times \cdots \times Y_n, \quad (2)$$

Produtórios

Sejam $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$, n números quaisquer. Então,

$$\prod_{i=1}^n Y_i = Y_1 \times Y_2 \times \dots \times Y_n, \quad (2)$$

em que $\prod$ é denominado operador produto.

Produtórios

Sejam $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$, n números quaisquer. Então,

$$\prod_{i=1}^n Y_i = Y_1 \times Y_2 \times \dots \times Y_n, \quad (2)$$

em que $\prod$ é denominado operador produto.



Produtórios

De (2), nós temos as seguintes propriedades:

- $\prod_{i=1}^n a = a^n;$



De (2), nós temos as seguintes propriedades:

- $\prod_{i=1}^n a = a^n$;
- $\prod_{i=1}^n (Y_i \times Z_i) = \prod_{i=1}^n Y_i \times \prod_{i=1}^n Z_i$;

Produtórios

De (2), nós temos as seguintes propriedades:

- $\prod_{i=1}^n a = a^n$;
- $\prod_{i=1}^n (Y_i \times Z_i) = \prod_{i=1}^n Y_i \times \prod_{i=1}^n Z_i$;
- $\prod_{i=1}^n (bZ_i) = b^n \times \prod_{i=1}^n Z_i$;



Produtórios

De (2), nós temos as seguintes propriedades:

- $\prod_{i=1}^n a = a^n$;
- $\prod_{i=1}^n (Y_i \times Z_i) = \prod_{i=1}^n Y_i \times \prod_{i=1}^n Z_i$;
- $\prod_{i=1}^n (bZ_i) = b^n \times \prod_{i=1}^n Z_i$;

em que a, b são constantes e $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ são números quaisquer.



Produtórios

De (2), nós temos as seguintes propriedades:

- $\prod_{i=1}^n a = a^n$;
- $\prod_{i=1}^n (Y_i \times Z_i) = \prod_{i=1}^n Y_i \times \prod_{i=1}^n Z_i$;
- $\prod_{i=1}^n (bZ_i) = b^n \times \prod_{i=1}^n Z_i$;

em que a, b são constantes e $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ são números quaisquer.



Roteiro

- 1 Operações
- 2 Resultados matriciais**
- 3 Estimação
- 4 Referências bibliográficas



Equações lineares

Um sistema de n equações e p incógnitas:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p & = & y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2p}x_p & = & y_2 \\ \vdots & = & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{np}x_p & = & y_n \end{array} \right. ,$$

pode ser escrito na forma matricial,



Equações lineares

Um sistema de n equações e p incógnitas:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p & = & y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2p}x_p & = & y_2 \\ \vdots & = & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{np}x_p & = & y_n \end{array} \right. ,$$

pode ser escrito na forma matricial, como

$$Ax = y,$$



Equações lineares

Um sistema de n equações e p incógnitas:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p & = & y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2p}x_p & = & y_2 \\ \vdots & = & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{np}x_p & = & y_n \end{array} \right. ,$$

pode ser escrito na forma matricial, como

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{y},$$



Equações lineares

em que **A** é uma matriz de coeficientes $n \times p$, **x** é um vetor $p \times 1$



Equações lineares

em que $\mathbf{A}$ é uma matriz de coeficientes $n \times p$, $\mathbf{x}$ é um vetor $p \times 1$ e $\mathbf{y}$ é vetor $n \times 1$,



Equações lineares

em que $\mathbf{A}$ é uma matriz de coeficientes $n \times p$, $\mathbf{x}$ é um vetor $p \times 1$ e $\mathbf{y}$ é vetor $n \times 1$, isto é,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}, \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Equações lineares

em que $\mathbf{A}$ é uma matriz de coeficientes $n \times p$, $\mathbf{x}$ é um vetor $p \times 1$ e $\mathbf{y}$ é vetor $n \times 1$, isto é,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}, \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Raízes características

As raízes características de uma matriz $\mathbf{A}$, $n \times n$, são as soluções em λ da equação

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_n) = 0,$$



Raízes características

As raízes características de uma matriz $\mathbf{A}$, $n \times n$, são as soluções em λ da equação

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_n) = 0,$$

em que $\mathbf{I}_n$ é a matriz identidade de ordem n .



Raízes características

As raízes características de uma matriz $\mathbf{A}$, $n \times n$, são as soluções em λ da equação

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_n) = 0,$$

em que $\mathbf{I}_n$ é a matriz identidade de ordem n . Este determinante é um polinômio de grau n em λ e a equação terá n soluções.



Raízes características

As raízes características de uma matriz $\mathbf{A}$, $n \times n$, são as soluções em λ da equação

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_n) = 0,$$

em que $\mathbf{I}_n$ é a matriz identidade de ordem n . Este determinante é um polinômio de grau n em λ e a equação terá n soluções. Se λ_i é raiz característica de $\mathbf{A}$, a solução em $\mathbf{x}$ da equação $(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I}_n)\mathbf{x} = 0$ é o vetor característico correspondente, $\mathbf{x}_i$.



Raízes características

As raízes características de uma matriz $\mathbf{A}$, $n \times n$, são as soluções em λ da equação

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_n) = 0,$$

em que $\mathbf{I}_n$ é a matriz identidade de ordem n . Este determinante é um polinômio de grau n em λ e a equação terá n soluções. Se λ_i é raiz característica de $\mathbf{A}$, a solução em $\mathbf{x}$ da equação $(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I}_n)\mathbf{x} = 0$ é o vetor característico correspondente, $\mathbf{x}_i$.



Raízes características

Resultados:

- O produto das raízes características de $\mathbf{A}$ é $\det(\mathbf{A})$;



Raízes características

Resultados:

- O produto das raízes características de $\mathbf{A}$ é $\det(\mathbf{A})$;
- A soma das raízes características de $\mathbf{A}$ é o traço de $\mathbf{A}$;



Raízes características

Resultados:

- O produto das raízes características de $\mathbf{A}$ é $\det(\mathbf{A})$;
- A soma das raízes características de $\mathbf{A}$ é o traço de $\mathbf{A}$;
- Se o posto de $\mathbf{A}$ é igual a r , $r(\mathbf{A}) = r$, zero é raiz da equação com multiplicidade $n - r$.



Raízes características

Resultados:

- O produto das raízes características de $\mathbf{A}$ é $\det(\mathbf{A})$;
- A soma das raízes características de $\mathbf{A}$ é o traço de $\mathbf{A}$;
- Se o posto de $\mathbf{A}$ é igual a r , $r(\mathbf{A}) = r$, zero é raiz da equação com multiplicidade $n - r$.



Formas quadráticas

A função $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ de n variáveis reais $x_1, x_2, \dots, x_n$ é uma forma quadrática se

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j = \mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x},$$



Formas quadráticas

A função $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ de n variáveis reais $x_1, x_2, \dots, x_n$ é uma forma quadrática se

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j = \mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x},$$

em que $\mathbf{x} = (x_1 x_2 \cdots x_n)^\top$

Formas quadráticas

A função $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ de n variáveis reais $x_1, x_2, \dots, x_n$ é uma forma quadrática se

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j = \mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x},$$

em que $\mathbf{x} = (x_1 x_2 \cdots x_n)^\top$ e $\mathbf{A} = (a_{ij})$, uma matriz simétrica $n \times n$, é dita matriz da forma quadrática.



Formas quadráticas

A função $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ de n variáveis reais $x_1, x_2, \dots, x_n$ é uma forma quadrática se

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j = \mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x},$$

em que $\mathbf{x} = (x_1 x_2 \cdots x_n)^\top$ e $\mathbf{A} = (a_{ij})$, uma matriz simétrica $n \times n$, é dita matriz da forma quadrática.



Formas quadráticas

Nós podemos classificar as formas quadráticas em:

- 1 $\mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x}$ é positiva definida se $\mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x} > 0$, para todo $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$;



Formas quadráticas

Nós podemos classificar as formas quadráticas em:

- ① $\mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x}$ é positiva definida se $\mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x} > 0$, para todo $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$;
- ② $\mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x}$ é positiva semidefinida se $\mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x} \geq 0$, para pelo menos um $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$;



Formas quadráticas

Nós podemos classificar as formas quadráticas em:

- ① $\mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x}$ é positiva definida se $\mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x} > 0$, para todo $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$;
- ② $\mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x}$ é positiva semidefinida se $\mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x} \geq 0$, para pelo menos um $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$;
- ③ $\mathbf{A}$ é dita não negativa se for positiva definida ou positiva semidefinida;



Formas quadráticas

Nós podemos classificar as formas quadráticas em:

- ① $\mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x}$ é positiva definida se $\mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x} > 0$, para todo $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$;
- ② $\mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x}$ é positiva semidefinida se $\mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x} \geq 0$, para pelo menos um $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$;
- ③ $\mathbf{A}$ é dita não negativa se for positiva definida ou positiva semidefinida;
- ④ $\mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x}$ é não negativa definida se $-\mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x}$ é positiva definida



Formas quadráticas

Nós podemos classificar as formas quadráticas em:

- ① $\mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x}$ é positiva definida se $\mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x} > 0$, para todo $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$;
- ② $\mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x}$ é positiva semidefinida se $\mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x} \geq 0$, para pelo menos um $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$;
- ③ $\mathbf{A}$ é dita não negativa se for positiva definida ou positiva semidefinida;
- ④ $\mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x}$ é não negativa definida se $-\mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x}$ é positiva definida e é negativa semidefinida se $-\mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x}$ é positiva semidefinida.



Formas quadráticas

Nós podemos classificar as formas quadráticas em:

- ① $\mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x}$ é positiva definida se $\mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x} > 0$, para todo $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$;
- ② $\mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x}$ é positiva semidefinida se $\mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x} \geq 0$, para pelo menos um $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$;
- ③ $\mathbf{A}$ é dita não negativa se for positiva definida ou positiva semidefinida;
- ④ $\mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x}$ é não negativa definida se $-\mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x}$ é positiva definida e é negativa semidefinida se $-\mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x}$ é positiva semidefinida.



Formas quadráticas

Exemplo. Seja $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^\top$ um vetor aleatório n -dimensional com matriz de covariâncias Σ . A matriz Σ é não negativa definida,



Formas quadráticas

Exemplo. Seja $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^\top$ um vetor aleatório n -dimensional com matriz de covariâncias Σ . A matriz Σ é não negativa definida, pois, se $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)^\top$ vetor não aleatório

$$\text{Var}(a_1 X_1 + \dots + a_n X_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j \text{Cov}(X_i, X_j) = \mathbf{a}^\top \Sigma \mathbf{a} \geq 0, \quad \forall \mathbf{a} \neq \mathbf{0}.$$



Formas quadráticas

Exemplo. Seja $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^\top$ um vetor aleatório n -dimensional com matriz de covariâncias Σ . A matriz Σ é não negativa definida, pois, se $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)^\top$ vetor não aleatório

$$\text{Var}(a_1X_1 + \dots + a_nX_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j \text{Cov}(X_i, X_j) = \mathbf{a}^\top \Sigma \mathbf{a} \geq 0, \quad \forall \mathbf{a} \neq \mathbf{0}.$$

Observação: A matriz Σ será positiva definida se somente se não existir relações lineares entre as variáveis aleatórias $X_1, \dots, X_n$.



Formas quadráticas

Exemplo. Seja $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^\top$ um vetor aleatório n -dimensional com matriz de covariâncias Σ . A matriz Σ é não negativa definida, pois, se $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)^\top$ vetor não aleatório

$$\text{Var}(a_1X_1 + \dots + a_nX_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j \text{Cov}(X_i, X_j) = \mathbf{a}^\top \Sigma \mathbf{a} \geq 0, \quad \forall \mathbf{a} \neq \mathbf{0}.$$

Observação: A matriz Σ será positiva definida se somente se não existir relações lineares entre as variáveis aleatórias $X_1, \dots, X_n$.



Formas quadráticas

Transformações. Seja $\mathbf{y} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{x}$ uma transformação de $\mathbf{x}$,



Formas quadráticas

Transformações. Seja $\mathbf{y} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{x}$ uma transformação de $\mathbf{x}$, em que $\mathbf{B}$ é uma matriz não singular, isto é $\mathbf{x} = \mathbf{B}\mathbf{y}$.



Formas quadráticas

Transformações. Seja $\mathbf{y} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{x}$ uma transformação de $\mathbf{x}$, em que $\mathbf{B}$ é uma matriz não singular, isto é $\mathbf{x} = \mathbf{B}\mathbf{y}$. Então

$$Q = \mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{y}^\top \mathbf{B}^\top \mathbf{A} \mathbf{B} \mathbf{y} = \mathbf{y}^\top \mathbf{C} \mathbf{y}, \quad (3)$$



Formas quadráticas

Transformações. Seja $\mathbf{y} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{x}$ uma transformação de $\mathbf{x}$, em que $\mathbf{B}$ é uma matriz não singular, isto é $\mathbf{x} = \mathbf{B}\mathbf{y}$. Então

$$Q = \mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{y}^\top \mathbf{B}^\top \mathbf{A} \mathbf{B} \mathbf{y} = \mathbf{y}^\top \mathbf{C} \mathbf{y}, \quad (3)$$

em que $\mathbf{C} = \mathbf{B}^\top \mathbf{A} \mathbf{B}$, é a forma quadrática nas novas variáveis.



Formas quadráticas

Transformações. Seja $\mathbf{y} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{x}$ uma transformação de $\mathbf{x}$, em que $\mathbf{B}$ é uma matriz não singular, isto é $\mathbf{x} = \mathbf{B}\mathbf{y}$. Então

$$Q = \mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{y}^\top \mathbf{B}^\top \mathbf{A} \mathbf{B} \mathbf{y} = \mathbf{y}^\top \mathbf{C} \mathbf{y}, \quad (3)$$

em que $\mathbf{C} = \mathbf{B}^\top \mathbf{A} \mathbf{B}$, é a forma quadrática nas novas variáveis.



Formas quadráticas

Resultados. De (3), nós temos os seguintes resultados



Formas quadráticas

Resultados. De (3), nós temos os seguintes resultados

① Existe uma matriz diagonal $\mathbf{D}$ $n \times n$ tal que

$$Q = \mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{y}^\top \mathbf{B}^\top \mathbf{A} \mathbf{B} \mathbf{y} = \mathbf{y}^\top \mathbf{D} \mathbf{y} = d_1 y_1^2 + \cdots + d_n y_n^2,$$



Formas quadráticas

Resultados. De (3), nós temos os seguintes resultados

① Existe uma matriz diagonal $\mathbf{D}$ $n \times n$ tal que

$$Q = \mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{y}^\top \mathbf{B}^\top \mathbf{A} \mathbf{B} \mathbf{y} = \mathbf{y}^\top \mathbf{D} \mathbf{y} = d_1 y_1^2 + \cdots + d_n y_n^2,$$

em que $d_1, \dots, d_n$ são elementos da diagonal de $\mathbf{D}$.



Formas quadráticas

Resultados. De (3), nós temos os seguintes resultados

- ① Existe uma matriz diagonal $\mathbf{D}$ $n \times n$ tal que

$$Q = \mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{y}^\top \mathbf{B}^\top \mathbf{A} \mathbf{B} \mathbf{y} = \mathbf{y}^\top \mathbf{D} \mathbf{y} = d_1 y_1^2 + \cdots + d_n y_n^2,$$

em que $d_1, \dots, d_n$ são elementos da diagonal de $\mathbf{D}$.

- ② Se $\mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x}$ é positiva definida, existe uma transformação $\mathbf{y} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{x}$ tal que



Formas quadráticas

Resultados. De (3), nós temos os seguintes resultados

- ① Existe uma matriz diagonal $\mathbf{D}$ $n \times n$ tal que

$$Q = \mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{y}^\top \mathbf{B}^\top \mathbf{A} \mathbf{B} \mathbf{y} = \mathbf{y}^\top \mathbf{D} \mathbf{y} = d_1 y_1^2 + \cdots + d_n y_n^2,$$

em que $d_1, \dots, d_n$ são elementos da diagonal de $\mathbf{D}$.

- ② Se $\mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x}$ é positiva definida, existe uma transformação $\mathbf{y} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{x}$ tal que

$$\mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{y}^\top \mathbf{y} = y_1^2 + \cdots + y_n^2.$$



Formas quadráticas

Resultados. De (3), nós temos os seguintes resultados

- ① Existe uma matriz diagonal $\mathbf{D}$ $n \times n$ tal que

$$Q = \mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{y}^\top \mathbf{B}^\top \mathbf{A} \mathbf{B} \mathbf{y} = \mathbf{y}^\top \mathbf{D} \mathbf{y} = d_1 y_1^2 + \cdots + d_n y_n^2,$$

em que $d_1, \dots, d_n$ são elementos da diagonal de $\mathbf{D}$.

- ② Se $\mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x}$ é positiva definida, existe uma transformação $\mathbf{y} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{x}$ tal que

$$\mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{y}^\top \mathbf{y} = y_1^2 + \cdots + y_n^2.$$



Formas quadráticas

Teorema 1. Seja $\mathbf{A}$, $n \times n$ uma matriz positiva semi definida, então



Formas quadráticas

Teorema 1. Seja $\mathbf{A}$, $n \times n$ uma matriz positiva semi definida, então

$$\textcircled{1} \quad r(\mathbf{A}) < n;$$



Formas quadráticas

Teorema 1. Seja $\mathbf{A}$, $n \times n$ uma matriz positiva semi definida, então

- ① $r(\mathbf{A}) < n$;
- ② $a_{ii} \geq 0$, $\forall i = 1, \dots, n$ e se $a_{jj} = 0$, todo elemento da j -ésima linha e j -ésima coluna é zero;



Formas quadráticas

Teorema 1. Seja $\mathbf{A}$, $n \times n$ uma matriz positiva semi definida, então

- ① $r(\mathbf{A}) < n$;
- ② $a_{ii} \geq 0$, $\forall i = 1, \dots, n$ e se $a_{jj} = 0$, todo elemento da j -ésima linha e j -ésima coluna é zero;
- ③ $\mathbf{P}^\top \mathbf{A} \mathbf{P}$ é positiva semi definida, para toda matriz $n \times n$ $\mathbf{P}$.



Formas quadráticas

Teorema 1. Seja $\mathbf{A}$, $n \times n$ uma matriz positiva semi definida, então

- ① $r(\mathbf{A}) < n$;
- ② $a_{ii} \geq 0$, $\forall i = 1, \dots, n$ e se $a_{jj} = 0$, todo elemento da j -ésima linha e j -ésima coluna é zero;
- ③ $\mathbf{P}^\top \mathbf{A} \mathbf{P}$ é positiva semi definida, para toda matriz $n \times n$ $\mathbf{P}$.



Formas quadráticas

Teorema 2. Seja $\mathbf{A}$, $n \times n$ uma matriz positiva definida, então



Formas quadráticas

Teorema 2. Seja $\mathbf{A}$, $n \times n$ uma matriz positiva definida, então

① $r(\mathbf{A}) = n;$



Formas quadráticas

Teorema 2. Seja $\mathbf{A}$, $n \times n$ uma matriz positiva definida, então

① $r(\mathbf{A}) = n$;

② $a_{ii} \geq 0, \forall i = 1, \dots, n$;



Formas quadráticas

Teorema 2. Seja $\mathbf{A}$, $n \times n$ uma matriz positiva definida, então

- ① $r(\mathbf{A}) = n$;
- ② $a_{ii} \geq 0, \forall i = 1, \dots, n$;
- ③ $\mathbf{P}^\top \mathbf{A} \mathbf{P}$ é positiva definida, para qualquer matriz $n \times n$ $\mathbf{P}$ não singular.



Formas quadráticas

Teorema 2. Seja $\mathbf{A}$, $n \times n$ uma matriz positiva definida, então

- ① $r(\mathbf{A}) = n$;
- ② $a_{ii} \geq 0, \forall i = 1, \dots, n$;
- ③ $\mathbf{P}^\top \mathbf{A} \mathbf{P}$ é positiva definida, para qualquer matriz $n \times n$ $\mathbf{P}$ não singular.



Formas quadráticas

Teorema 3. Uma matriz $n \times n$ **A** é positiva semi definida se e só se



Formas quadráticas

Teorema 3. Uma matriz $n \times n$ $\mathbf{A}$ é positiva semi definida se e só se

- ① Existe $\mathbf{B}$, $n \times n$, $r(\mathbf{B}) < n$ tal que $\mathbf{B}^\top \mathbf{B} = \mathbf{A}$;



Formas quadráticas

Teorema 3. Uma matriz $n \times n$ $\mathbf{A}$ é positiva semi definida se e só se

- ① Existe $\mathbf{B}$, $n \times n$, $r(\mathbf{B}) < n$ tal que $\mathbf{B}^\top \mathbf{B} = \mathbf{A}$;
- ② As raízes características de $\mathbf{A}$ são não negativas



Formas quadráticas

Teorema 3. Uma matriz $n \times n$ $\mathbf{A}$ é positiva semi definida se e só se

- ① Existe $\mathbf{B}$, $n \times n$, $r(\mathbf{B}) < n$ tal que $\mathbf{B}^\top \mathbf{B} = \mathbf{A}$;
- ② As raízes características de $\mathbf{A}$ são não negativas e no mínimo uma delas é igual a zero.



Formas quadráticas

Teorema 3. Uma matriz $n \times n$ $\mathbf{A}$ é positiva semi definida se e só se

- ① Existe $\mathbf{B}$, $n \times n$, $r(\mathbf{B}) < n$ tal que $\mathbf{B}^\top \mathbf{B} = \mathbf{A}$;
- ② As raízes características de $\mathbf{A}$ são não negativas e no mínimo uma delas é igual a zero.



Formas quadráticas

Teorema 4. Uma matriz $n \times n$ **A** é positiva definida se e só se



Formas quadráticas

Teorema 4. Uma matriz $n \times n$ $\mathbf{A}$ é positiva definida se e só se

- ① Existe $\mathbf{B}$, $n \times n$, $r(\mathbf{B}) = n$ tal que $\mathbf{B}^\top \mathbf{B} = \mathbf{A}$;



Formas quadráticas

Teorema 4. Uma matriz $n \times n$ $\mathbf{A}$ é positiva definida se e só se

- 1 Existe $\mathbf{B}$, $n \times n$, $r(\mathbf{B}) = n$ tal que $\mathbf{B}^T \mathbf{B} = \mathbf{A}$;
- 2 As raízes características de $\mathbf{A}$ são todas positivas;



Formas quadráticas

Teorema 4. Uma matriz $n \times n$ $\mathbf{A}$ é positiva definida se e só se

- ① Existe $\mathbf{B}$, $n \times n$, $r(\mathbf{B}) = n$ tal que $\mathbf{B}^T \mathbf{B} = \mathbf{A}$;
- ② As raízes características de $\mathbf{A}$ são todas positivas;
- ③ E

$$a_{11} > 0, \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} > 0, \dots, \det(\mathbf{A}) > 0.$$



Formas quadráticas

Teorema 4. Uma matriz $n \times n$ $\mathbf{A}$ é positiva definida se e só se

- ① Existe $\mathbf{B}$, $n \times n$, $r(\mathbf{B}) = n$ tal que $\mathbf{B}^\top \mathbf{B} = \mathbf{A}$;
- ② As raízes características de $\mathbf{A}$ são todas positivas;
- ③ E

$$a_{11} > 0, \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} > 0, \dots, \det(\mathbf{A}) > 0.$$



Derivadas matriciais

Seja $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^\top$ e $f(\mathbf{x})$ uma função real de $x_1, \dots, x_n$. A derivada de $f(\mathbf{x})$ com respeito a $\mathbf{x}$ é



Derivadas matriciais

Seja $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^\top$ e $f(\mathbf{x})$ uma função real de $x_1, \dots, x_n$. A derivada de $f(\mathbf{x})$ com respeito a $\mathbf{x}$ é

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \left(\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_1} \quad \dots \quad \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_n} \right)^\top.$$



Derivadas matriciais

Seja $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^\top$ e $f(\mathbf{x})$ uma função real de $x_1, \dots, x_n$. A derivada de $f(\mathbf{x})$ com respeito a $\mathbf{x}$ é

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \left(\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_1} \quad \dots \quad \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_n} \right)^\top.$$



Derivadas matriciais

Teorema 1. Se $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)^\top$ é um vetor de constantes



Derivadas matriciais

Teorema 1. Se $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)^\top$ é um vetor de constantes e $f(\mathbf{x}) = \mathbf{a}^\top \mathbf{x} = \mathbf{x}^\top \mathbf{a}$ (linear),



Derivadas matriciais

Teorema 1. Se $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)^\top$ é um vetor de constantes e $f(\mathbf{x}) = \mathbf{a}^\top \mathbf{x} = \mathbf{x}^\top \mathbf{a}$ (linear), então

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{a}.$$



Derivadas matriciais

Teorema 1. Se $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)^\top$ é um vetor de constantes e $f(\mathbf{x}) = \mathbf{a}^\top \mathbf{x} = \mathbf{x}^\top \mathbf{a}$ (linear), então

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{a}.$$

Teorema 2.



Derivadas matriciais

Teorema 1. Se $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)^\top$ é um vetor de constantes e $f(\mathbf{x}) = \mathbf{a}^\top \mathbf{x} = \mathbf{x}^\top \mathbf{a}$ (linear), então

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{a}.$$

Teorema 2. Se $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x}$ (forma quadrática),



Derivadas matriciais

Teorema 1. Se $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)^\top$ é um vetor de constantes e $f(\mathbf{x}) = \mathbf{a}^\top \mathbf{x} = \mathbf{x}^\top \mathbf{a}$ (linear), então

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{a}.$$

Teorema 2. Se $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x}$ (forma quadrática), $\mathbf{A}$ uma matriz de constantes,



Derivadas matriciais

Teorema 1. Se $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)^\top$ é um vetor de constantes e $f(\mathbf{x}) = \mathbf{a}^\top \mathbf{x} = \mathbf{x}^\top \mathbf{a}$ (linear), então

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{a}.$$

Teorema 2. Se $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x}$ (forma quadrática), $\mathbf{A}$ uma matriz de constantes, então

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = 2\mathbf{A}\mathbf{x}.$$



Derivadas matriciais

Teorema 1. Se $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)^\top$ é um vetor de constantes e $f(\mathbf{x}) = \mathbf{a}^\top \mathbf{x} = \mathbf{x}^\top \mathbf{a}$ (linear), então

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{a}.$$

Teorema 2. Se $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x}$ (forma quadrática), $\mathbf{A}$ uma matriz de constantes, então

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = 2\mathbf{A}\mathbf{x}.$$



Decomposições

Uma matriz simétrica **A** pode ser fatorada em

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{D}\mathbf{L}^T,$$

Decomposições

Uma matriz simétrica **A** pode ser fatorada em

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{D}\mathbf{L}^T,$$

em que **L** é uma matriz diagonal inferior, **L**^T é uma matriz diagonal superior e **D** é uma matriz diagonal.



Decomposições

Uma matriz simétrica **A** pode ser fatorada em

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{D}\mathbf{L}^{\top},$$

em que **L** é uma matriz diagonal inferior, $\mathbf{L}^{\top}$ é uma matriz diagonal superior e **D** é uma matriz diagonal.



Decomposições

Seja uma matriz $\mathbf{A}$, $p \times p$, positiva definida. Então existe uma única matriz triangular superior $\mathbf{T}$, de posto p ,



Decomposições

Seja uma matriz $\mathbf{A}$, $p \times p$, positiva definida. Então existe uma única matriz triangular superior $\mathbf{T}$, de posto p , tal que

$$\mathbf{A} = \mathbf{T}^T \mathbf{T}$$



Decomposições

Seja uma matriz $\mathbf{A}$, $p \times p$, positiva definida. Então existe uma única matriz triangular superior $\mathbf{T}$, de posto p , tal que

$$\mathbf{A} = \mathbf{T}^T \mathbf{T}$$

e $t_{ii} > 0$, $i = 1, \dots, p$.



Decomposições

Seja uma matriz $\mathbf{A}$, $p \times p$, positiva definida. Então existe uma única matriz triangular superior $\mathbf{T}$, de posto p , tal que

$$\mathbf{A} = \mathbf{T}^T \mathbf{T}$$

e $t_{ii} > 0$, $i = 1, \dots, p$. Para a determinação de $\mathbf{T}$, ver Graybill (1983), por exemplo.



Decomposições

Seja uma matriz $\mathbf{A}$, $p \times p$, positiva definida. Então existe uma única matriz triangular superior $\mathbf{T}$, de posto p , tal que

$$\mathbf{A} = \mathbf{T}^T \mathbf{T}$$

e $t_{ii} > 0$, $i = 1, \dots, p$. Para a determinação de $\mathbf{T}$, ver Graybill (1983), por exemplo.



Decomposições

Decomposição de Cholesky. Uma matriz $\mathbf{A}$ é positiva definida se e só se existir $\mathbf{W}$ não singular



Decomposições

Decomposição de Cholesky. Uma matriz **A** é positiva definida se e só se existir **W** não singular tal que

$$\mathbf{A} = \mathbf{W}\mathbf{W}^{\top}.$$



Decomposições

Decomposição de Cholesky. Uma matriz **A** é positiva definida se e só se existir **W** não singular tal que

$$\mathbf{A} = \mathbf{W}\mathbf{W}^{\top}.$$



Decomposições

Decomposição espectral. Qualquer matriz simétrica $\mathbf{A}$, $p \times p$,



Decomposições

Decomposição espectral. Qualquer matriz simétrica $\mathbf{A}$, $p \times p$, pode ser escrita como

$$\mathbf{A} = \mathbf{\Gamma} \mathbf{D} \mathbf{\Gamma}^T,$$



Decomposições

Decomposição espectral. Qualquer matriz simétrica $\mathbf{A}$, $p \times p$, pode ser escrita como

$$\mathbf{A} = \mathbf{\Gamma} \mathbf{D} \mathbf{\Gamma}^T,$$

em que $\mathbf{D} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$, $\mathbf{\Gamma} = (\mathbf{x}_1 \cdots \mathbf{x}_p)$, $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ são as raízes características de $\mathbf{A}$ e $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_p$ são os correspondentes vetores característicos normalizados, isto é, $\mathbf{x}_i^T \mathbf{x}_i = 1$, $i = 1, \dots, p$.



Decomposições

Decomposição espectral. Qualquer matriz simétrica $\mathbf{A}$, $p \times p$, pode ser escrita como

$$\mathbf{A} = \mathbf{\Gamma} \mathbf{D} \mathbf{\Gamma}^\top,$$

em que $\mathbf{D} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$, $\mathbf{\Gamma} = (\mathbf{x}_1 \cdots \mathbf{x}_p)$, $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ são as raízes características de $\mathbf{A}$ e $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_p$ são os correspondentes vetores característicos normalizados, isto é, $\mathbf{x}_i^\top \mathbf{x}_i = 1$, $i = 1, \dots, p$.



Decomposições

Verifica-se que

$$\mathbf{A} = \mathbf{\Gamma} \mathbf{D} \mathbf{\Gamma}^\top = \lambda_1 \mathbf{x}_1 \mathbf{x}_1^\top + \cdots + \lambda_p \mathbf{x}_p \mathbf{x}_p^\top.$$



Decomposições

Verifica-se que

$$\mathbf{A} = \mathbf{\Gamma} \mathbf{D} \mathbf{\Gamma}^T = \lambda_1 \mathbf{x}_1 \mathbf{x}_1^T + \cdots + \lambda_p \mathbf{x}_p \mathbf{x}_p^T.$$

Observação: Se $\mathbf{x}_i$ e $\mathbf{x}_j$ são dois vetores característicos associados as raízes características diferentes, então $\mathbf{x}_i^T \mathbf{x}_j = 0$.



Decomposições

Verifica-se que

$$\mathbf{A} = \mathbf{\Gamma} \mathbf{D} \mathbf{\Gamma}^T = \lambda_1 \mathbf{x}_1 \mathbf{x}_1^T + \cdots + \lambda_p \mathbf{x}_p \mathbf{x}_p^T.$$

Observação: Se $\mathbf{x}_i$ e $\mathbf{x}_j$ são dois vetores característicos associados as raízes características diferentes, então $\mathbf{x}_i^T \mathbf{x}_j = 0$. Nós dizemos que $\mathbf{x}_i$ e $\mathbf{x}_j$ são ortogonais.



Decomposições

Verifica-se que

$$\mathbf{A} = \mathbf{\Gamma} \mathbf{D} \mathbf{\Gamma}^T = \lambda_1 \mathbf{x}_1 \mathbf{x}_1^T + \cdots + \lambda_p \mathbf{x}_p \mathbf{x}_p^T.$$

Observação: Se $\mathbf{x}_i$ e $\mathbf{x}_j$ são dois vetores característicos associados as raízes características diferentes, então $\mathbf{x}_i^T \mathbf{x}_j = 0$. Nós dizemos que $\mathbf{x}_i$ e $\mathbf{x}_j$ são ortogonais.



Roteiro

- 1 Operações
- 2 Resultados matriciais
- 3 Estimação**
- 4 Referências bibliográficas



Propriedades dos estimadores

Um estimador $\hat{\theta}$ de um parâmetro desconhecido θ é não viciado se

$$\mathbb{E}(\hat{\theta}) = \theta.$$



Propriedades dos estimadores

Um estimador $\hat{\theta}$ de um parâmetro desconhecido θ é não viciado se

$$\mathbb{E}(\hat{\theta}) = \theta.$$

Um estimador $\hat{\theta}$ é um estimador consistente de θ



Propriedades dos estimadores

Um estimador $\hat{\theta}$ de um parâmetro desconhecido θ é não viciado se

$$\mathbb{E}(\hat{\theta}) = \theta.$$

Um estimador $\hat{\theta}$ é um estimador consistente de θ se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|\hat{\theta} - \theta| \geq \varepsilon) = 0, \text{ para qualquer } \varepsilon > 0.$$



Propriedades dos estimadores

Um estimador $\hat{\theta}$ de um parâmetro desconhecido θ é não viciado se

$$\mathbb{E}(\hat{\theta}) = \theta.$$

Um estimador $\hat{\theta}$ é um estimador consistente de θ se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|\hat{\theta} - \theta| \geq \varepsilon) = 0, \text{ para qualquer } \varepsilon > 0.$$



Propriedades dos estimadores

Um estimador $\hat{\theta}$ é um estimador suficiente de θ se a distribuição condicional das observações dado $\hat{\theta}$ não depende do parâmetro θ .

Um estimador $\hat{\theta}$ é um estimador de mínima variância de θ



Propriedades dos estimadores

Um estimador $\hat{\theta}$ é um estimador suficiente de θ se a distribuição condicional das observações dado $\hat{\theta}$ não depende do parâmetro θ .

Um estimador $\hat{\theta}$ é um estimador de mínima variância de θ se para qualquer outro estimador θ^* :

$$\text{Var}(\hat{\theta}) \leq \text{Var}(\theta^*), \text{ para todo } \theta^* > 0.$$



Propriedades dos estimadores

Um estimador $\hat{\theta}$ é um estimador suficiente de θ se a distribuição condicional das observações dado $\hat{\theta}$ não depende do parâmetro θ .

Um estimador $\hat{\theta}$ é um estimador de mínima variância de θ se para qualquer outro estimador θ^* :

$$\text{Var}(\hat{\theta}) \leq \text{Var}(\theta^*), \text{ para todo } \theta^* > 0.$$



Estimador de máxima verossimilhança

Seja Y uma variável aleatória com função densidade de probabilidade (FDP) dada por $f(y; \theta)$. Dada observações independentes $Y_1, \dots, Y_n$,



Estimador de máxima verossimilhança

Seja Y uma variável aleatória com função densidade de probabilidade (FDP) dada por $f(y; \theta)$. Dada observações independentes $Y_1, \dots, Y_n$, a FDP conjunta dessas observações é

$$f(y_1, \dots, y_n) = \prod_{i=1}^n f(y_i; \theta). \quad (4)$$



Estimador de máxima verossimilhança

Seja Y uma variável aleatória com função densidade de probabilidade (FDP) dada por $f(y; \theta)$. Dada observações independentes $Y_1, \dots, Y_n$, a FDP conjunta dessas observações é

$$f(y_1, \dots, y_n) = \prod_{i=1}^n f(y_i; \theta). \quad (4)$$



Estimador de máxima verossimilhança

Quando a FDP conjunta (4) é vista em função do parâmetro θ , ela é denominada função de verossimilhança e escrita

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n f(y_i; \theta).$$



Estimador de máxima verossimilhança

Quando a FDP conjunta (4) é vista em função do parâmetro θ , ela é denominada função de verossimilhança e escrita

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n f(y_i; \theta).$$

O estimador de máxima verossimilhança (EMV) de θ , é o valor do parâmetro desconhecido que maximiza $L(\theta)$.



Estimador de máxima verossimilhança

Quando a FDP conjunta (4) é vista em função do parâmetro θ , ela é denominada função de verossimilhança e escrita

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n f(y_i; \theta).$$

O estimador de máxima verossimilhança (EMV) de θ , é o valor do parâmetro desconhecido que maximiza $L(\theta)$. Sob condições gerais, o EMV é consistente e suficiente.



Estimador de máxima verossimilhança

Quando a FDP conjunta (4) é vista em função do parâmetro θ , ela é denominada função de verossimilhança e escrita

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n f(y_i; \theta).$$

O estimador de máxima verossimilhança (EMV) de θ , é o valor do parâmetro desconhecido que maximiza $L(\theta)$. Sob condições gerais, o EMV é consistente e suficiente.



Estimador de mínimos quadrados

Suponha que uma observação amostral tenha a seguinte forma:

$$Y_i = f_i(\theta) + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

Estimador de mínimos quadrados

Suponha que uma observação amostral tenha a seguinte forma:

$$Y_i = f_i(\theta) + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

em que $f_i(\theta)$ é uma função conhecida de θ e ε_i é uma variável aleatória, usualmente assumida com média nula.



Estimador de mínimos quadrados

Suponha que uma observação amostral tenha a seguinte forma:

$$Y_i = f_i(\theta) + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

em que $f_i(\theta)$ é uma função conhecida de θ e ε_i é uma variável aleatória, usualmente assumida com média nula.



Estimador de mínimos quadrados

No método dos mínimos quadrados, para dada uma amostra aleatória, a soma de quadrados

$$Q = \sum_{i=1}^n [Y_i - f_i(\theta)]^2$$

Estimador de mínimos quadrados

No método dos mínimos quadrados, para dada uma amostra aleatória, a soma de quadrados

$$Q = \sum_{i=1}^n [Y_i - f_i(\theta)]^2$$

é considerada com função do parâmetro θ .

Estimador de mínimos quadrados

No método dos mínimos quadrados, para dada uma amostra aleatória, a soma de quadrados

$$Q = \sum_{i=1}^n [Y_i - f_i(\theta)]^2$$

é considerada com função do parâmetro θ . O estimador de mínimos quadrados (EMQ) de θ é obtido minimizando Q com respeito a θ .



Estimador de mínimos quadrados

No método dos mínimos quadrados, para dada uma amostra aleatória, a soma de quadrados

$$Q = \sum_{i=1}^n [Y_i - f_i(\theta)]^2$$

é considerada com função do parâmetro θ . O estimador de mínimos quadrados (EMQ) de θ é obtido minimizando Q com respeito a θ . Em muitos casos, o EMQ é não viesado e consistente.



Estimador de mínimos quadrados

No método dos mínimos quadrados, para dada uma amostra aleatória, a soma de quadrados

$$Q = \sum_{i=1}^n [Y_i - f_i(\theta)]^2$$

é considerada com função do parâmetro θ . O estimador de mínimos quadrados (EMQ) de θ é obtido minimizando Q com respeito a θ . Em muitos casos, o EMQ é não viesado e consistente.



Roteiro

- 1 Operações
- 2 Resultados matriciais
- 3 Estimação
- 4 Referências bibliográficas**



Referências bibliográficas

Graybill, F. A. (1983). *Matrices with applications in Statistics* (2 ed.).
Belmont: Wadsworth International Group.



Obrigado!

✉ tiago.magalhaes@ufjf.br

📄 ufjf.br/tiago_magalhaes

🌐 Departamento de Estatística, Sala 319

