

Teoremas limites

Tiago M. Magalhães

Departamento de Estatística - ICE-UFJF

Juiz de Fora, 11 de março de 2025



Roteiro

- 1 Motivação
- 2 Lei fraca dos grandes números
- 3 Lei forte dos grandes números
- 4 Teorema central do limite
- 5 Limites de binomiais para Poisson
- 6 Referências bibliográficas



Roteiro

- 1 Motivação
- 2 Lei fraca dos grandes números
- 3 Lei forte dos grandes números
- 4 Teorema central do limite
- 5 Limites de binomiais para Poisson
- 6 Referências bibliográficas



Motivação

Os mais importantes resultados teóricos na teoria da probabilidade são os teoremas limites (Ross, 2010). Destes, os mais importantes são as **leis dos grandes números** e os **teoremas centrais do limite**.



Motivação

Os mais importantes resultados teóricos na teoria da probabilidade são os teoremas limites (Ross, 2010). Destes, os mais importantes são as **leis dos grandes números** e os **teoremas centrais do limite**.



Motivação

Usualmente, teoremas são considerados **leis de grandes números** se estiverem interessados em enunciar condições nas quais a média de uma sequência de variáveis aleatórias converge (de alguma forma) para a média esperada.



Motivação

Por outro lado, **teoremas centrais do limite** estão interessados em determinar condições nas quais a soma de um grande número de variáveis aleatórias possui uma distribuição de probabilidade que é aproximadamente normal.



Roteiro

- 1 Motivação
- 2 Lei fraca dos grandes números
- 3 Lei forte dos grandes números
- 4 Teorema central do limite
- 5 Limites de binomiais para Poisson
- 6 Referências bibliográficas



Lei fraca dos grandes números

Seja X_1, X_2, \dots uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, com média finita, isto é, $\mathbb{E}(X_n) = \mu < \infty$, $n \geq 1$.

As somas parciais $S_n = X_1 + \dots + X_n$ satisfazem

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\text{p}} \mu.$$



Lei fraca dos grandes números

Seja X_1, X_2, \dots uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, com média finita, isto é, $\mathbb{E}(X_n) = \mu < \infty$, $n \geq 1$.

As somas parciais $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ satisfazem

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\text{p}} \mu.$$

Prova: ver exercício da aula passada.



Lei fraca dos grandes números

Seja X_1, X_2, \dots uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, com média finita, isto é, $\mathbb{E}(X_n) = \mu < \infty$, $n \geq 1$.

As somas parciais $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ satisfazem

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\text{p}} \mu.$$

Prova: ver exercício da aula passada.



Lei fraca dos grandes números

A lei fraca dos grandes números foi demonstrada por Khinchine (1929).

Antes, a demonstração foi originalmente feita por Bernoulli (1713), para o caso de uma sequência de variáveis aleatórias com distribuição Bernoulli,



Lei fraca dos grandes números

A lei fraca dos grandes números foi demonstrada por Khinchine (1929). Antes, a demonstração foi originalmente feita por Bernoulli (1713), para o caso de uma sequência de variáveis aleatórias com distribuição Bernoulli, para estas condições,

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\text{p.}} p.$$



Lei fraca dos grandes números

A lei fraca dos grandes números foi demonstrada por Khinchine (1929). Antes, a demonstração foi originalmente feita por Bernoulli (1713), para o caso de uma sequência de variáveis aleatórias com distribuição Bernoulli, para estas condições,

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\text{p.}} p.$$



Lei fraca dos grandes números

Seja X_1, X_2, \dots uma sequência de variáveis aleatórias e consideremos $S_n = X_1 + \dots + X_n$. Se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Var}(S_n)}{n^2} = 0,$$



Lei fraca dos grandes números

Seja X_1, X_2, \dots uma sequência de variáveis aleatórias e consideremos $S_n = X_1 + \dots + X_n$. Se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Var}(S_n)}{n^2} = 0,$$

então

$$\frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{n} \xrightarrow{\text{P}} 0.$$



Lei fraca dos grandes números

Seja X_1, X_2, \dots uma sequência de variáveis aleatórias e consideremos $S_n = X_1 + \dots + X_n$. Se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Var}(S_n)}{n^2} = 0,$$

então

$$\frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{n} \xrightarrow{\text{P}} 0.$$

Este caso, mais geral, foi demonstrado por Chebyshev (1867).



Lei fraca dos grandes números

Seja X_1, X_2, \dots uma sequência de variáveis aleatórias e consideremos $S_n = X_1 + \dots + X_n$. Se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Var}(S_n)}{n^2} = 0,$$

então

$$\frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{n} \xrightarrow{\text{P}} 0.$$

Este caso, mais geral, foi demonstrado por Chebyshev (1867).



Roteiro

- 1 Motivação
- 2 Lei fraca dos grandes números
- 3 Lei forte dos grandes números
- 4 Teorema central do limite
- 5 Limites de binomiais para Poisson
- 6 Referências bibliográficas



Lei forte dos grandes números

A lei forte dos grandes números é provavelmente o resultado mais famoso na teoria da probabilidade (Ross, 2010). Ela diz que a média de uma sequência de variáveis aleatórias independentes com mesma distribuição converge, com probabilidade 1, para a média daquela distribuição.



Lei forte dos grandes números

A lei forte dos grandes números é provavelmente o resultado mais famoso na teoria da probabilidade (Ross, 2010). Ela diz que a média de uma sequência de variáveis aleatórias independentes com mesma distribuição converge, com probabilidade 1, para a média daquela distribuição.



Lei forte dos grandes números

Seja X_1, X_2, \dots uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, com média finita, ou seja, $\mathbb{E}(X_n) = \mu < \infty$, $n \geq 1$.

As somas parciais $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ satisfazem

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\text{qc}} \mu.$$



Lei forte dos grandes números

Seja X_1, X_2, \dots uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, com média finita, ou seja, $\mathbb{E}(X_n) = \mu < \infty$, $n \geq 1$. As somas parciais $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ satisfazem

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\text{qc}} \mu.$$



Lei forte dos grandes números

A lei forte dos grandes números foi demonstrada por Kolmogorov (1933).

Antes, a demonstração foi originalmente feita por Borel (1909), para o caso de uma sequência de variáveis aleatórias com distribuição Bernoulli,



Lei forte dos grandes números

A lei forte dos grandes números foi demonstrada por Kolmogorov (1933).

Antes, a demonstração foi originalmente feita por Borel (1909), para o caso de uma sequência de variáveis aleatórias com distribuição Bernoulli, para estas condições,

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\text{qc}} p.$$



Lei forte dos grandes números

A lei forte dos grandes números foi demonstrada por Kolmogorov (1933).

Antes, a demonstração foi originalmente feita por Borel (1909), para o caso de uma sequência de variáveis aleatórias com distribuição Bernoulli, para estas condições,

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\text{qc}} p.$$



Roteiro

- 1 Motivação
- 2 Lei fraca dos grandes números
- 3 Lei forte dos grandes números
- 4 Teorema central do limite
- 5 Limites de binomiais para Poisson
- 6 Referências bibliográficas



Teorema central do limite

O teorema central do limite é um dos resultados mais extraordinários na teoria da probabilidade (Ross, 2010). Em linhas gerais, ele diz que a soma de um grande número de variáveis aleatórias independentes tem uma distribuição que é aproximadamente normal.



Teorema central do limite

O teorema central do limite é um dos resultados mais extraordinários na teoria da probabilidade (Ross, 2010). Em linhas gerais, ele diz que a soma de um grande número de variáveis aleatórias independentes tem uma distribuição que é aproximadamente normal.



Teorema central do limite

Com isso, ele não somente fornece um método simples para o cálculo de probabilidades aproximadas para somas de variáveis aleatórias independentes, mas também ajuda a explicar o extraordinário fato de que frequências empíricas de muitas populações naturais exibem curvas na forma de um sino (isto é, normais).



Teorema central do limite

Seja X_1, X_2, \dots uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com média μ e variância σ^2 . Seja $S_n = X_1 + \dots + X_n$, então

$$\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{\text{d}} N(0, 1).$$



Teorema central do limite

Seja X_1, X_2, \dots uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com média μ e variância σ^2 . Seja $S_n = X_1 + \dots + X_n$, então

$$\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{\text{d}} N(0, 1).$$



Teorema central do limite

Prova. Seja

$$Z_n = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{\sigma\sqrt{n}}.$$

A função geradora de momentos de Z_n , $M_{Z_n}(t)$, é dada por

$$\begin{aligned} M_{Z_n}(t) &= \mathbb{E}(e^{tZ_n}) = \mathbb{E}(\exp\{tZ_n\}) = \mathbb{E}\left(\exp\left\{t\frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{\sigma\sqrt{n}}\right\}\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\exp\left\{\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}(Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n)\right\}\right). \end{aligned}$$



Teorema central do limite

Prova. Seja

$$Z_n = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{\sigma\sqrt{n}}.$$

A função geradora de momentos de Z_n , $M_{Z_n}(t)$, é dada por

$$\begin{aligned} M_{Z_n}(t) &= \mathbb{E}(e^{tZ_n}) = \mathbb{E}(\exp\{tZ_n\}) = \mathbb{E}\left(\exp\left\{t\frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{\sigma\sqrt{n}}\right\}\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\exp\left\{\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}(Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n)\right\}\right). \end{aligned}$$



Teorema central do limite

Dando prosseguimento, nós temos que

$$\begin{aligned} M_{Z_n}(t) &= \mathbb{E} \left(\exp \left\{ \frac{t}{\sigma\sqrt{n}} Y_1 \right\} \times \cdots \times \exp \left\{ \frac{t}{\sigma\sqrt{n}} Y_n \right\} \right) \\ &\stackrel{\text{Ind.}}{=} \mathbb{E} \left(\exp \left\{ \frac{t}{\sigma\sqrt{n}} Y_1 \right\} \right) \times \cdots \times \mathbb{E} \left(\exp \left\{ \frac{t}{\sigma\sqrt{n}} Y_n \right\} \right) \quad (1) \\ &\stackrel{\text{I.D.}}{=} \left[\mathbb{E} \left(\exp \left\{ \frac{t}{\sigma\sqrt{n}} Y_1 \right\} \right) \right]^n = \left[M_{Y_1} \left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}} \right) \right]^n. \end{aligned}$$

Ou seja, a FGM da VA Z_n , avaliada no ponto t , pode ser escrita como uma função da FGM da VA $Y_1 = X_1 - \mu$, avaliada no ponto $t/\sigma\sqrt{n}$.



Teorema central do limite

Dando prosseguimento, nós temos que

$$\begin{aligned} M_{Z_n}(t) &= \mathbb{E} \left(\exp \left\{ \frac{t}{\sigma\sqrt{n}} Y_1 \right\} \times \cdots \times \exp \left\{ \frac{t}{\sigma\sqrt{n}} Y_n \right\} \right) \\ &\stackrel{\text{Ind.}}{=} \mathbb{E} \left(\exp \left\{ \frac{t}{\sigma\sqrt{n}} Y_1 \right\} \right) \times \cdots \times \mathbb{E} \left(\exp \left\{ \frac{t}{\sigma\sqrt{n}} Y_n \right\} \right) \quad (1) \\ &\stackrel{\text{I.D.}}{=} \left[\mathbb{E} \left(\exp \left\{ \frac{t}{\sigma\sqrt{n}} Y_1 \right\} \right) \right]^n = \left[M_{Y_1} \left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}} \right) \right]^n. \end{aligned}$$

Ou seja, a FGM da VA Z_n , avaliada no ponto t , pode ser escrita como uma função da FGM da VA $Y_1 = X_1 - \mu$, avaliada no ponto $t/\sigma\sqrt{n}$.



Teorema central do limite

Antes de nós continuarmos, nós iremos discutir algumas propriedades da FGM de $Y_1 = X_1 - \mu$ e, por simplicidade, avaliada no ponto t . Usando série de Taylor (1715) até o primeiro termo e em torno de $t = 0$,



Teorema central do limite

Antes de nós continuarmos, nós iremos discutir algumas propriedades da FGM de $Y_1 = X_1 - \mu$ e, por simplicidade, avaliada no ponto t . Usando série de Taylor (1715) até o primeiro termo e em torno de $t = 0$, nós temos que

$$M_{Y_1}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{M_{Y_1}^{(n)}(0)}{n!} t^n = M_{Y_1}^{(0)}(0) + t M_{Y_1}^{(1)}(0) + \frac{t^2}{2} M_{Y_1}^{(2)}(s), \quad (2)$$



Teorema central do limite

Antes de nós continuarmos, nós iremos discutir algumas propriedades da FGM de $Y_1 = X_1 - \mu$ e, por simplicidade, avaliada no ponto t . Usando série de Taylor (1715) até o primeiro termo e em torno de $t = 0$, nós temos que

$$M_{Y_1}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{M_{Y_1}^{(n)}(0)}{n!} t^n = M_{Y_1}^{(0)}(0) + t M_{Y_1}^{(1)}(0) + \frac{t^2}{2} M_{Y_1}^{(2)}(s), \quad (2)$$

em que $0 < s < t$ e $M_{Y_1}^{(n)}(\cdot)$ é a n -ésima derivada de $M_{Y_1}(\cdot)$.



Teorema central do limite

Antes de nós continuarmos, nós iremos discutir algumas propriedades da FGM de $Y_1 = X_1 - \mu$ e, por simplicidade, avaliada no ponto t . Usando série de Taylor (1715) até o primeiro termo e em torno de $t = 0$, nós temos que

$$M_{Y_1}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{M_{Y_1}^{(n)}(0)}{n!} t^n = M_{Y_1}^{(0)}(0) + t M_{Y_1}^{(1)}(0) + \frac{t^2}{2} M_{Y_1}^{(2)}(s), \quad (2)$$

em que $0 < s < t$ e $M_{Y_1}^{(n)}(\cdot)$ é a n -ésima derivada de $M_{Y_1}(\cdot)$.



Teorema central do limite

Notem que, pelas propriedades da FGM, nós temos que

$$M_{Y_1}^{(0)}(0) = M_{Y_1}(0) = 1,$$

$$M_{Y_1}^{(1)}(0) = \mathbb{E}(Y_1) = \mathbb{E}(X_1 - \mu) = 0,$$

$$M_{Y_1}^{(2)}(0) = \mathbb{E}(Y_1^2) = \mathbb{E}[(X_1 - \mu)^2] = \sigma^2.$$



Teorema central do limite

Notem que, pelas propriedades da FGM, nós temos que

$$M_{Y_1}^{(0)}(0) = M_{Y_1}(0) = 1,$$

$$M_{Y_1}^{(1)}(0) = \mathbb{E}(Y_1) = \mathbb{E}(X_1 - \mu) = 0,$$

$$M_{Y_1}^{(2)}(0) = \mathbb{E}(Y_1^2) = \mathbb{E}[(X_1 - \mu)^2] = \sigma^2.$$



Teorema central do limite

Usando os dois primeiros resultados anteriores, nós podemos simplificar (2), da seguinte forma

$$M_{Y_1}(t) = 1 + \frac{t^2}{2} M_{Y_1}^{(2)}(s).$$



Teorema central do limite

Usando os dois primeiros resultados anteriores, nós podemos simplificar (2), da seguinte forma

$$M_{Y_1}(t) = 1 + \frac{t^2}{2} M_{Y_1}^{(2)}(s).$$

Somando e subtraindo $\sigma^2 t^2 / 2$ na equação acima,

$$\begin{aligned} M_{Y_1}(t) &= 1 + \frac{\sigma^2 t^2}{2} - \frac{\sigma^2 t^2}{2} + \frac{t^2}{2} M_{Y_1}^{(2)}(s) \\ &= 1 + \frac{\sigma^2 t^2}{2} + \left[M_{Y_1}^{(2)}(s) - \sigma^2 \right] \frac{t^2}{2}. \end{aligned} \tag{3}$$



Teorema central do limite

Usando os dois primeiros resultados anteriores, nós podemos simplificar (2), da seguinte forma

$$M_{Y_1}(t) = 1 + \frac{t^2}{2} M_{Y_1}^{(2)}(s).$$

Somando e subtraindo $\sigma^2 t^2 / 2$ na equação acima,

$$\begin{aligned} M_{Y_1}(t) &= 1 + \frac{\sigma^2 t^2}{2} - \frac{\sigma^2 t^2}{2} + \frac{t^2}{2} M_{Y_1}^{(2)}(s) \\ &= 1 + \frac{\sigma^2 t^2}{2} + \left[M_{Y_1}^{(2)}(s) - \sigma^2 \right] \frac{t^2}{2}. \end{aligned} \tag{3}$$



Teorema central do limite

A equação (3) é a FGM de Y_1 . Como visto anteriormente, a FGM de Z_n é uma função da FGM de Y_1 , avaliada em $t/\sigma\sqrt{n}$.



Teorema central do limite

A equação (3) é a FGM de Y_1 . Como visto anteriormente, a FGM de Z_n é uma função da FGM de Y_1 , avaliada em $t/\sigma\sqrt{n}$. Substituindo (3), avaliando no ponto $t/\sigma\sqrt{n}$, em (1),



Teorema central do limite

A equação (3) é a FGM de Y_1 . Como visto anteriormente, a FGM de Z_n é uma função da FGM de Y_1 , avaliada em $t/\sigma\sqrt{n}$. Substituindo (3), avaliando no ponto $t/\sigma\sqrt{n}$, em (1), nós temos que

$$M_{Z_n}(t) = \left\{ 1 + \frac{t^2}{2n} + \left[M_{Y_1}^{(2)}(s) - \sigma^2 \right] \frac{t^2}{2n\sigma^2} \right\}^n, \quad (4)$$



Teorema central do limite

A equação (3) é a FGM de Y_1 . Como visto anteriormente, a FGM de Z_n é uma função da FGM de Y_1 , avaliada em $t/\sigma\sqrt{n}$. Substituindo (3), avaliando no ponto $t/\sigma\sqrt{n}$, em (1), nós temos que

$$M_{Z_n}(t) = \left\{ 1 + \frac{t^2}{2n} + \left[M_{Y_1}^{(2)}(s) - \sigma^2 \right] \frac{t^2}{2n\sigma^2} \right\}^n, \quad (4)$$

em que $0 < s < t/\sigma\sqrt{n}$ e $-h\sigma\sqrt{n} < t < h\sigma\sqrt{n}$.



Teorema central do limite

A equação (3) é a FGM de Y_1 . Como visto anteriormente, a FGM de Z_n é uma função da FGM de Y_1 , avaliada em $t/\sigma\sqrt{n}$. Substituindo (3), avaliando no ponto $t/\sigma\sqrt{n}$, em (1), nós temos que

$$M_{Z_n}(t) = \left\{ 1 + \frac{t^2}{2n} + \left[M_{Y_1}^{(2)}(s) - \sigma^2 \right] \frac{t^2}{2n\sigma^2} \right\}^n, \quad (4)$$

em que $0 < s < t/\sigma\sqrt{n}$ e $-h\sigma\sqrt{n} < t < h\sigma\sqrt{n}$.



Teorema central do limite

Para $n \rightarrow \infty$ segue-se que $s \rightarrow 0$ e como $M_{Y_1}^{(2)}$ é contínua na origem,

$$\lim_{s \rightarrow 0} = [M_{Y_1}^{(2)}(s) - \sigma^2] = 0. \quad (5)$$



Teorema central do limite

Para $n \rightarrow \infty$ segue-se que $s \rightarrow 0$ e como $M_{Y_1}^{(2)}$ é contínua na origem,

$$\lim_{s \rightarrow 0} = [M_{Y_1}^{(2)}(s) - \sigma^2] = 0. \quad (5)$$

Lembrando o seguinte resultado do cálculo,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} = \left(1 + \frac{a_n}{n}\right)^n = e^a, \quad (6)$$

quando $a_n \rightarrow a$.



Teorema central do limite

Para $n \rightarrow \infty$ segue-se que $s \rightarrow 0$ e como $M_{Y_1}^{(2)}$ é contínua na origem,

$$\lim_{s \rightarrow 0} = [M_{Y_1}^{(2)}(s) - \sigma^2] = 0. \quad (5)$$

Lembrando o seguinte resultado do cálculo,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} = \left(1 + \frac{a_n}{n}\right)^n = e^a, \quad (6)$$

quando $a_n \rightarrow a$.



Teorema central do limite

Por (5) e (6), nós concluímos a partir de (4) que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M_{Z_n}(t) = e^{t^2/2},$$

ou seja, quando $n \rightarrow \infty$, o limite da FGM de Z_n é a FGM de uma VA com distribuição normal padrão.



Teorema central do limite

Por (5) e (6), nós concluímos a partir de (4) que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M_{Z_n}(t) = e^{t^2/2},$$

ou seja, quando $n \rightarrow \infty$, o limite da FGM de Z_n é a FGM de uma VA com distribuição normal padrão.

Ufa!!!



Teorema central do limite

Por (5) e (6), nós concluímos a partir de (4) que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M_{Z_n}(t) = e^{t^2/2},$$

ou seja, quando $n \rightarrow \infty$, o limite da FGM de Z_n é a FGM de uma VA com distribuição normal padrão.

Ufa!!!



Teorema central do limite

O teorema central do limite foi demonstrado por Lyapunov (1901). Antes, a demonstração foi originalmente feita por de Moivre (1733), para o caso de uma sequência de variáveis aleatórias com distribuição Bernoulli, com $p = 1/2$.



Teorema central do limite

O teorema central do limite foi demonstrado por Lyapunov (1901). Antes, a demonstração foi originalmente feita por de Moivre (1733), para o caso de uma sequência de variáveis aleatórias com distribuição Bernoulli, com $p = 1/2$. Laplace (1812) estendeu este caso para um p arbitrário,



Teorema central do limite

O teorema central do limite foi demonstrado por Lyapunov (1901). Antes, a demonstração foi originalmente feita por de Moivre (1733), para o caso de uma sequência de variáveis aleatórias com distribuição Bernoulli, com $p = 1/2$. Laplace (1812) estendeu este caso para um p arbitrário, nestas condições,

$$\frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \xrightarrow{d} N(0, 1).$$



Teorema central do limite

O teorema central do limite foi demonstrado por Lyapunov (1901). Antes, a demonstração foi originalmente feita por de Moivre (1733), para o caso de uma sequência de variáveis aleatórias com distribuição Bernoulli, com $p = 1/2$. Laplace (1812) estendeu este caso para um p arbitrário, nestas condições,

$$\frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \xrightarrow{d} N(0, 1).$$



Teorema central do limite

Seja X_1, X_2, \dots uma sequência de variáveis aleatórias independentes, com $\mathbb{E}(X_i) = \mu_i$ e $\text{Var}(X_i) = \sigma_i^2$. Se (a) as variáveis aleatórias X_i forem limitadas uniformemente, isto é, para algum M , $\mathbb{P}(|X_i| < M) = 1$, para todo i ,



Teorema central do limite

Seja X_1, X_2, \dots uma sequência de variáveis aleatórias independentes, com $\mathbb{E}(X_i) = \mu_i$ e $\text{Var}(X_i) = \sigma_i^2$. Se (a) as variáveis aleatórias X_i forem limitadas uniformemente, isto é, para algum M , $\mathbb{P}(|X_i| < M) = 1$, para todo i , e (b) $\sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i^2 = \infty$,



Teorema central do limite

Seja X_1, X_2, \dots uma sequência de variáveis aleatórias independentes, com $\mathbb{E}(X_i) = \mu_i$ e $\text{Var}(X_i) = \sigma_i^2$. Se (a) as variáveis aleatórias X_i forem limitadas uniformemente, isto é, para algum M , $\mathbb{P}(|X_i| < M) = 1$, para todo i , e (b) $\sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i^2 = \infty$, então

$$\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu_i)}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \sigma_i^2}} \xrightarrow{d} N(0, 1).$$



Teorema central do limite

Seja X_1, X_2, \dots uma sequência de variáveis aleatórias independentes, com $\mathbb{E}(X_i) = \mu_i$ e $\text{Var}(X_i) = \sigma_i^2$. Se (a) as variáveis aleatórias X_i forem limitadas uniformemente, isto é, para algum M , $\mathbb{P}(|X_i| < M) = 1$, para todo i , e (b) $\sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i^2 = \infty$, então

$$\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu_i)}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \sigma_i^2}} \xrightarrow{d} N(0, 1).$$

Resultado demonstrado por Lindeberg (1922).



Teorema central do limite

Seja X_1, X_2, \dots uma sequência de variáveis aleatórias independentes, com $\mathbb{E}(X_i) = \mu_i$ e $\text{Var}(X_i) = \sigma_i^2$. Se (a) as variáveis aleatórias X_i forem limitadas uniformemente, isto é, para algum M , $\mathbb{P}(|X_i| < M) = 1$, para todo i , e (b) $\sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i^2 = \infty$, então

$$\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu_i)}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \sigma_i^2}} \xrightarrow{d} N(0, 1).$$

Resultado demonstrado por Lindeberg (1922).



Roteiro

- 1 Motivação
- 2 Lei fraca dos grandes números
- 3 Lei forte dos grandes números
- 4 Teorema central do limite
- 5 Limites de binomiais para Poisson
- 6 Referências bibliográficas



Limites de binomiais para Poisson

Se $X_n \sim \text{binomial}(n, p_n)$, $n \geq 1$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} np_n = \lambda > 0$, então

$$X_n \xrightarrow{d} \text{Poisson}(\lambda).$$



Limites de binomiais para Poisson

Se $X_n \sim \text{binomial}(n, p_n)$, $n \geq 1$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} np_n = \lambda > 0$, então

$$X_n \xrightarrow{d} \text{Poisson}(\lambda).$$



Roteiro

- 1 Motivação
- 2 Lei fraca dos grandes números
- 3 Lei forte dos grandes números
- 4 Teorema central do limite
- 5 Limites de binomiais para Poisson
- 6 Referências bibliográficas



Referências bibliográficas I

Bernoulli, J. (1713). *Ars conjectandi*. Basel: Thurneysen Brothers.

Borel, M. E. (1909). Les probabilités dénombrables et leurs applications arithmétiques. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo* 27(1), 247–271.

Chebyshev, P. (1867). Des valeurs moyennes. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* 2e série 12, 177–184.

de Moivre, A. (1733). *Approximatio ad summam terminorum binomii $(a + b)^n$ in seriem expansi*.



Referências bibliográficas II

Khinchine, A. Y. (1929). Sur la loi des grands nombres. *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* 189, 477–479.

Kolmogorov, A. N. (1933). *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*. Berlin: Springer.

Laplace, P.-S. (1812). *Théorie analytique des probabilités*. Paris: Courcier.

Lindeberg, J. W. (1922). Eine neue herleitung des exponentialgesetzes in der wahrscheinlichkeitsrechnung. *Mathematische Zeitschrif* 15, 211–225.



Referências bibliográficas III

- Lyapunov, A. M. (1901). Nouvelle forme du théorème sur la limite de probabilité. *Mémoires de l'Académie Impériale des Sciences de St.-Pétersbourg VIIe Série, Classe Physico-Mathématique* 12, 1–24.
- Ross, S. (2010). *Probabilidade: um curso moderno com aplicações* (8 ed.). Porto Alegre: Bookman.
- Taylor, B. (1715). *Methodus Incrementorum Directa et Inversa*. Londini: Typis Pearsonianis prostant apud Gul. Innys ad Insignia Principis in Coemeterio Paulino.





Obrigado!

✉ tiago.magalhaes@ufjf.br

✉ ufjf.br/tiago_magalhaes

🌐 Departamento de Estatística, Sala 319