Convoluções

Tiago M. Magalhães

Departamento de Estatística - ICE-UFJF

Juiz de Fora, 09 de janeiro de 2025

Roteiro

Roteiro

Motivação

Como nós vimos anteriormente, podem haver situações em que nós estamos interessados nas distribuições de probabilidades de funções de vetores aleatórios.

Motivação

De maneira geral, o método jacobiano é a forma para encontrar essas distribuições de probabilidades.

Porém, existem situações em que o procedimento pode ser simplificado.

Motivação

De maneira geral, o método jacobiano é a forma para encontrar essas distribuições de probabilidades.

Porém, existem situações em que o procedimento pode ser simplificado.

Motivação

Uma dessas situações ocorre quando o vetor aleatório é bidimensional, as duas variáveis aleatórias que o compõe são independentes e a função é uma das quatro operações aritméticas fundamentais (adição, subtração, multiplicação e divisão). Dada essas condições, nós podemos encontrar a distribuição de probabilidades dessa função pelo **método das convoluções**.

Motivação

Uma dessas situações ocorre quando o vetor aleatório é bidimensional, as duas variáveis aleatórias que o compõe são independentes e a função é uma das quatro operações aritméticas fundamentais (adição, subtração, multiplicação e divisão). Dada essas condições, nós podemos encontrar a distribuição de probabilidades dessa função pelo **método das convoluções**.

Roteiro

Convoluções

Suponham que X e Y sejam variáveis aleatórias independentes, contínuas, com FDP f_X e f_Y, respectivamente. Sejam

$$Z_1 = X + Y,$$

$$Z_2 = X - Y,$$

$$Z_3 = X \times Y,$$

$$Z_4 = X/Y.$$

Convoluções

Suponham que X e Y sejam variáveis aleatórias independentes, contínuas, com FDP f_X e f_Y, respectivamente. Sejam

$$Z_1 = X + Y,$$

$$Z_2 = X - Y,$$

$$Z_3 = X \times Y,$$

$$Z_4 = X/Y.$$

Convoluções

As respectivas FDPs dessas funções são dadas por

$$
\begin{aligned}
g_{Z_1}(z_1) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) f_Y(z_1 - t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z_1 - t) f_Y(t)\,dt, \\
g_{Z_2}(z_2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) f_Y(z_2 + t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z_2 + t) f_Y(t)\,dt, \\
g_{Z_3}(z_3) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) f_Y(z_3/t) \left|\frac{1}{t}\right| dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z_3/t) f_Y(t) \left|\frac{1}{t}\right| dt, \\
g_{Z_4}(z_4) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) f_Y(z_4 \times t)\,|t|\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z_4 \times t) f_Y(t)\,|t|\,dt.
\end{aligned} \tag{1}
$$

Roteiro

Exemplos

Exemplo 1. Suponhamos que nós temos um circuito no qual tanto a corrente X como a resistência Y variem de algum modo aleatório. Particularmente, suponhamos que X e Y sejam VA contínuas independentes com as seguintes FDP:

$$f_X(x) = 2x\, \mathbb{I}_{(0,1)}(x), \;\; f_Y(y) = \frac{y^2}{9}\, \mathbb{I}_{(0,3)}(y).$$

Qual é a distribuição de $Z = XY$? **Observação:** $X \sim$ beta(2,1).

Exemplos

Exemplo 2. Suponham que $Z = X + Y$, na qual X e Y são variáveis aleatórias independentes, cada uma delas com distribuição N(0, 1). Então,

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\} \mathbb{I}_{\mathbb{R}}(x),$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{y^2}{2}\right\} \mathbb{I}_{\mathbb{R}}(y).$$

Roteiro

Bibliografia

Meyer, P. L. (2017), *Probabilidade: aplicações à Estatística*, 2 edn, Livros Técnicos e Científicos Editora Ltda, Rio de Janeiro.

Ross, S. (2010), *Probabilidade: um curso moderno com aplicações*, 8 edn, Bookman, Porto Alegre.

Ross, S. (2019), *A first course in probability*, 10 edn. global edn, Pearson Education, Malaysia.

Obrigado!

✉ tiago.magalhaes@ufjf.br

🖱 ufjf.br/tiago_magalhaes

🌍 Departamento de Estatística, Sala 319