Distribuições multivariadas

Tiago M. Magalhães

Departamento de Estatística - ICE-UFJF

Juiz de Fora, 12 de dezembro de 2024

Roteiro

Roteiro

Experimento multinomial

Um experimento multinomial tem **3 características**:

Experimento multinomial

Um experimento multinomial tem **3 características**:

1. uma realização com n **repetições independentes**;

Experimento multinomial

Um experimento multinomial tem **3 características**:

1. uma realização com n **repetições independentes**;

2. cada repetição admite k resultados: $A_1, A_2, \ldots, A_k$,

Experimento multinomial

Um experimento multinomial tem **3 características**:

1. uma realização com n **repetições independentes**;
2. cada repetição admite k resultados: $A_1, A_2, \ldots, A_k$, mutuamente exclusivos;

Experimento multinomial

Um experimento multinomial tem **3 características**:

1. uma realização com n **repetições independentes**;
2. cada repetição admite k resultados: $A_1, A_2, \ldots, A_k$, mutuamente exclusivos;
3. a probabilidade, $p_i = \mathbb{P}(A_i)$, de ocorrência de cada possível resultado A_i, $i = 1, 2, \ldots, k$,

Experimento multinomial

Um experimento multinomial tem **3 características**:

1. uma realização com n **repetições independentes**;
2. cada repetição admite k resultados: $A_1, A_2, \ldots, A_k$, mutuamente exclusivos;
3. a probabilidade, $p_i = \mathbb{P}(A_i)$, de ocorrência de cada possível resultado A_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, **não se altera** em cada repetição.

Experimento multinomial

Um experimento multinomial tem **3 características**:

1. uma realização com n **repetições independentes**;
2. cada repetição admite k resultados: $A_1, A_2, \ldots, A_k$, mutuamente exclusivos;
3. a probabilidade, $p_i = \mathbb{P}(A_i)$, de ocorrência de cada possível resultado A_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, **não se altera** em cada repetição. Note que $\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$.

Experimento multinomial

Um experimento multinomial tem **3 características**:

1. uma realização com n **repetições independentes**;
2. cada repetição admite k resultados: $A_1, A_2, \ldots, A_k$, mutuamente exclusivos;
3. a probabilidade, $p_i = \mathbb{P}(A_i)$, de ocorrência de cada possível resultado A_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, **não se altera** em cada repetição. Note que $\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$.

Distribuição multinomial

Seja a variável aleatória discreta (VAD) multidimensional

$$\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_k)^\top,$$

em que X_i: é o número de vezes que A_i ocorre

Distribuição multinomial

Seja a variável aleatória discreta (VAD) multidimensional

$$\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_k)^\top,$$

em que X_i: é o número de vezes que A_i ocorre nas n repetições de um experimento multinomial,

Distribuição multinomial

Seja a variável aleatória discreta (VAD) multidimensional

$$\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_k)^\top,$$

em que X_i: é o número de vezes que A_i ocorre nas n repetições de um experimento multinomial, com probabilidade de A_i ocorrer igual a p_i, $i = 1, 2, \ldots, k$.

Distribuição multinomial

Seja a variável aleatória discreta (VAD) multidimensional

$$\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_k)^\top,$$

em que X_i: é o número de vezes que A_i ocorre nas n repetições de um experimento multinomial, com probabilidade de A_i ocorrer igual a p_i, $i = 1, 2, \ldots, k$.

Distribuição multinomial

Observação

Os X_i **não são** VAD independentes,

Distribuição multinomial

Observação

Os X_i **não são** VAD independentes, pois $\sum_{i=1}^{k} X_i = n$.

Distribuição multinomial

Observação

Os X_i **não são** VAD independentes, pois $\sum_{i=1}^{k} X_i = n$. Em consequência, logo que os valores quaisquer $(k-1)$ dessas VAD sejam conhecidos, o valor da k-ésima ficará determinado.

Distribuição multinomial

Observação

Os X_i **não são** VAD independentes, pois $\sum_{i=1}^{k} X_i = n$. Em consequência, logo que os valores quaisquer $(k-1)$ dessas VAD sejam conhecidos, o valor da k-ésima ficará determinado.

Distribuição multinomial

Então, a VAD $\boldsymbol{X}$ tem distribuição multinomial, com parâmetros n e $\boldsymbol{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_k)^\top$,

Distribuição multinomial

Então, a VAD $\boldsymbol{X}$ tem distribuição multinomial, com parâmetros n e $\boldsymbol{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_k)^\top$, de forma alternativa,

$$\boldsymbol{X} \sim \text{multinomial}(n, \boldsymbol{p}) \text{ ou } \boldsymbol{X} \sim \text{multinom}(n, \boldsymbol{p}).$$

Distribuição multinomial

Então, a VAD $\boldsymbol{X}$ tem distribuição multinomial, com parâmetros n e $\boldsymbol{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_k)^\top$, de forma alternativa,

$$\boldsymbol{X} \sim \text{multinomial}(n, \boldsymbol{p}) \text{ ou } \boldsymbol{X} \sim \text{multinom}(n, \boldsymbol{p}).$$

Distribuição multinomial

A função de probabilidades de uma variável aleatória discreta multidimensional $\boldsymbol{X} \sim \text{multinomial}(n, \boldsymbol{p})$ é dada por:

$$p(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \frac{n!}{x_1!x_2!\ldots x_k!} p_1^{x_1} p_2^{x_2} \ldots p_k^{x_k} \mathbb{I}_{\{n\}}(x_1 + x_2 + \cdots + x_k),$$

Distribuição multinomial

A função de probabilidades de uma variável aleatória discreta multidimensional $\boldsymbol{X} \sim \text{multinomial}(n, \boldsymbol{p})$ é dada por:

$$p(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \frac{n!}{x_1!x_2!\ldots x_k!} p_1^{x_1} p_2^{x_2} \ldots p_k^{x_k} \, \mathbb{I}_{\{n\}}(x_1 + x_2 + \cdots + x_k),$$

em que $p_i \in (0, 1)$, $i = 1, 2, \ldots, k$.

Distribuição multinomial

A função de probabilidades de uma variável aleatória discreta multidimensional $\boldsymbol{X} \sim \text{multinomial}(n, \boldsymbol{p})$ é dada por:

$$p(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \frac{n!}{x_1!x_2!\ldots x_k!} p_1^{x_1} p_2^{x_2} \ldots p_k^{x_k} \, \mathbb{I}_{\{n\}}(x_1 + x_2 + \cdots + x_k),$$

em que $p_i \in (0, 1)$, $i = 1, 2, \ldots, k$.

Distribuição multinomial

A esperança e variância de uma VAD multidimensional $\boldsymbol{X}$ multinomial são dadas, respectivamente, por $\mathbb{E}(\boldsymbol{X}) = [\mathbb{E}(X_1), \mathbb{E}(X_2), \ldots, \mathbb{E}(X_k)]^\top$ e

$$\mathrm{Var}(\boldsymbol{X}) = \begin{bmatrix} \mathrm{Var}(X_1) & \mathrm{Cov}(X_1, X_2) & \cdots & \mathrm{Cov}(X_1, X_k) \\ \mathrm{Cov}(X_2, X_1) & \mathrm{Var}(X_2) & \cdots & \mathrm{Cov}(X_2, X_k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{Cov}(X_k, X_1) & \mathrm{Cov}(X_k, X_2) & \cdots & \mathrm{Var}(X_k) \end{bmatrix},$$

Distribuição multinomial

A esperança e variância de uma VAD multidimensional $\boldsymbol{X}$ multinomial são dadas, respectivamente, por $\mathbb{E}(\boldsymbol{X}) = [\mathbb{E}(X_1), \mathbb{E}(X_2), \ldots, \mathbb{E}(X_k)]^\top$ e

$$\text{Var}(\boldsymbol{X}) = \begin{bmatrix} \text{Var}(X_1) & \text{Cov}(X_1, X_2) & \cdots & \text{Cov}(X_1, X_k) \\ \text{Cov}(X_2, X_1) & \text{Var}(X_2) & \cdots & \text{Cov}(X_2, X_k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{Cov}(X_k, X_1) & \text{Cov}(X_k, X_2) & \cdots & \text{Var}(X_k) \end{bmatrix},$$

Distribuição multinomial

em que

- $\mathbb{E}(X_i) = np_i$,

Distribuição multinomial

em que

- $\mathbb{E}(X_i) = np_i$,
- $\text{Var}(X_i) = np_i(1 - p_i)$,

Distribuição multinomial

em que

- $\mathbb{E}(X_i) = np_i$,
- $\text{Var}(X_i) = np_i(1 - p_i)$,
- $\text{Cov}(X_i, X_j) = -np_i p_j$, para $i \neq j$,

Distribuição multinomial

em que

- $\mathbb{E}(X_i) = np_i$,
- $\text{Var}(X_i) = np_i(1 - p_i)$,
- $\text{Cov}(X_i, X_j) = -np_i p_j$, para $i \neq j$,

com $i, j = 1, 2, \ldots, k$.

Distribuição multinomial

em que

- $\mathbb{E}(X_i) = np_i$,
- $\text{Var}(X_i) = np_i(1 - p_i)$,
- $\text{Cov}(X_i, X_j) = -np_i p_j$, para $i \neq j$,

com $i, j = 1, 2, \ldots, k$. De maneira geral, isto é, na forma matricial, nós podemos escrever

Distribuição multinomial

em que

- $\mathbb{E}(X_i) = np_i$,
- $\mathrm{Var}(X_i) = np_i(1 - p_i)$,
- $\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = -np_i p_j$, para $i \neq j$,

com $i, j = 1, 2, \ldots, k$. De maneira geral, isto é, na forma matricial, nós podemos escrever $\mathbb{E}(\boldsymbol{X}) = n\boldsymbol{p}$ e $\mathrm{Var}(\boldsymbol{X}) = n\left[\mathrm{diag}(\boldsymbol{p}) - \boldsymbol{p}\boldsymbol{p}^\top\right]$,

Distribuição multinomial

em que

- $\mathbb{E}(X_i) = np_i$,
- $\text{Var}(X_i) = np_i(1 - p_i)$,
- $\text{Cov}(X_i, X_j) = -np_i p_j$, para $i \neq j$,

com $i, j = 1, 2, \ldots, k$. De maneira geral, isto é, na forma matricial, nós podemos escrever $\mathbb{E}(\boldsymbol{X}) = n\boldsymbol{p}$ e $\text{Var}(\boldsymbol{X}) = n\left[\text{diag}(\boldsymbol{p}) - \boldsymbol{p}\boldsymbol{p}^\top\right]$, sendo $\text{diag}(\boldsymbol{p})$ uma matriz diagonal, com a diagonal principal igual a $\boldsymbol{p}$.

Distribuição multinomial

em que

- $\mathbb{E}(X_i) = np_i$,
- $\text{Var}(X_i) = np_i(1 - p_i)$,
- $\text{Cov}(X_i, X_j) = -np_i p_j$, para $i \neq j$,

com $i, j = 1, 2, \ldots, k$. De maneira geral, isto é, na forma matricial, nós podemos escrever $\mathbb{E}(\boldsymbol{X}) = n\boldsymbol{p}$ e $\text{Var}(\boldsymbol{X}) = n\left[\text{diag}(\boldsymbol{p}) - \boldsymbol{p}\boldsymbol{p}^\top\right]$, sendo $\text{diag}(\boldsymbol{p})$ uma matriz diagonal, com a diagonal principal igual a $\boldsymbol{p}$.

Distribuição multinomial

Seja $\boldsymbol{t} = (t_1, t_2, \ldots, t_k)^\top \in \mathbb{R}^k$, a função geradoras de momentos de $\boldsymbol{X}$ é dada por

Distribuição multinomial

Seja $\boldsymbol{t} = (t_1, t_2, \ldots, t_k)^\top \in \mathbb{R}^k$, a função geradoras de momentos de $\boldsymbol{X}$ é dada por

$$M(\boldsymbol{t}) = \mathbb{E}(e^{\boldsymbol{t}^\top \boldsymbol{X}}) = \mathbb{E}\left(e^{t_1X_1+t_2X_2+\cdots+t_kX_k}\right) = \left(\sum_{i=1}^{k} p_i e^{t_i}\right)^n.$$

Distribuição multinomial

Seja $\boldsymbol{t} = (t_1, t_2, \ldots, t_k)^\top \in \mathbb{R}^k$, a função geradoras de momentos de $\boldsymbol{X}$ é dada por

$$M(\boldsymbol{t}) = \mathbb{E}(e^{\boldsymbol{t}^\top \boldsymbol{X}}) = \mathbb{E}\left(e^{t_1 X_1 + t_2 X_2 + \cdots + t_k X_k}\right) = \left(\sum_{i=1}^{k} p_i e^{t_i}\right)^n.$$

Distribuição multinomial

Exemplos:

- Em um lançamento de um dado 10 vezes,

Distribuição multinomial

Exemplos:

- Em um lançamento de um dado 10 vezes, o interesse é contar o número de ocorrências de cada uma das 6 faces;

Distribuição multinomial

Exemplos:

- Em um lançamento de um dado 10 vezes, o interesse é contar o número de ocorrências de cada uma das 6 faces;
- Em um banco de dados com 1.500 clientes,

Distribuição multinomial

Exemplos:

- Em um lançamento de um dado 10 vezes, o interesse é contar o número de ocorrências de cada uma das 6 faces;
- Em um banco de dados com 1.500 clientes, o interesse é contar quantos destes teriam um pedido de empréstimo

Distribuição multinomial

Exemplos:

- Em um lançamento de um dado 10 vezes, o interesse é contar o número de ocorrências de cada uma das 6 faces;
- Em um banco de dados com 1.500 clientes, o interesse é contar quantos destes teriam um pedido de empréstimo aprovado na totalidade,

Distribuição multinomial

Exemplos:

- Em um lançamento de um dado 10 vezes, o interesse é contar o número de ocorrências de cada uma das 6 faces;
- Em um banco de dados com 1.500 clientes, o interesse é contar quantos destes teriam um pedido de empréstimo aprovado na totalidade, 50% do valor pedido

Distribuição multinomial

Exemplos:

- Em um lançamento de um dado 10 vezes, o interesse é contar o número de ocorrências de cada uma das 6 faces;
- Em um banco de dados com 1.500 clientes, o interesse é contar quantos destes teriam um pedido de empréstimo aprovado na totalidade, 50% do valor pedido e recusado;

Distribuição multinomial

Exemplos:

- Em um lançamento de um dado 10 vezes, o interesse é contar o número de ocorrências de cada uma das 6 faces;
- Em um banco de dados com 1.500 clientes, o interesse é contar quantos destes teriam um pedido de empréstimo aprovado na totalidade, 50% do valor pedido e recusado;
- Equilíbrio de Hardy-Weinberg (Hardy, 1908; Weinberg, 1908).

Distribuição multinomial

Exemplos:

- Em um lançamento de um dado 10 vezes, o interesse é contar o número de ocorrências de cada uma das 6 faces;
- Em um banco de dados com 1.500 clientes, o interesse é contar quantos destes teriam um pedido de empréstimo aprovado na totalidade, 50% do valor pedido e recusado;
- Equilíbrio de Hardy-Weinberg (Hardy, 1908; Weinberg, 1908).

Roteiro

Distribuição normal bivariada

Seja $(X_1, X_2)^\top$ uma variável aleatória contínua (VAC) bidimensional, tomando todos os valores no plano euclidiano. Nós diremos que $(X_1, X_2)^\top$ tem distribuição normal bidimensional se sua função densidade de probabilidade (FDP) conjunta for dada pela seguinte expressão

Distribuição normal bivariada

Seja $(X_1, X_2)^\top$ uma variável aleatória contínua (VAC) bidimensional, tomando todos os valores no plano euclidiano. Nós diremos que $(X_1, X_2)^\top$ tem distribuição normal bidimensional se sua função densidade de probabilidade (FDP) conjunta for dada pela seguinte expressão

$$
\begin{aligned}
f(x_1, x_2) = {} & \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \qquad (1) \\
& \times \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho\frac{(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]\right\} \\
& \times \mathbb{I}_{\mathbb{R}}(x_1)\,\mathbb{I}_{\mathbb{R}}(x_2),
\end{aligned}
$$

Distribuição normal bivariada

Seja $(X_1, X_2)^\top$ uma variável aleatória contínua (VAC) bidimensional, tomando todos os valores no plano euclidiano. Nós diremos que $(X_1, X_2)^\top$ tem distribuição normal bidimensional se sua função densidade de probabilidade (FDP) conjunta for dada pela seguinte expressão

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) = {} & \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \\ & \times \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho\frac{(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]\right\} \\ & \times \mathbb{I}_{\mathbb{R}}(x_1)\,\mathbb{I}_{\mathbb{R}}(x_2), \end{aligned} \tag{1}$$

em que $\mu_1 \in \mathbb{R}$, $\mu_2 \in \mathbb{R}$, $\sigma_1^2 \in \mathbb{R}_+$, $\sigma_2^2 \in \mathbb{R}_+$ e $\rho \in (-1, 1)$.

Distribuição normal bivariada

Seja $(X_1, X_2)^\top$ uma variável aleatória contínua (VAC) bidimensional, tomando todos os valores no plano euclidiano. Nós diremos que $(X_1, X_2)^\top$ tem distribuição normal bidimensional se sua função densidade de probabilidade (FDP) conjunta for dada pela seguinte expressão

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \\ &\times \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho\frac{(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]\right\} \\ &\times \mathbb{I}_{\mathbb{R}}(x_1)\,\mathbb{I}_{\mathbb{R}}(x_2), \end{aligned} \tag{1}$$

em que $\mu_1 \in \mathbb{R}$, $\mu_2 \in \mathbb{R}$, $\sigma_1^2 \in \mathbb{R}_+$, $\sigma_2^2 \in \mathbb{R}_+$ e $\rho \in (-1, 1)$.

Distribuição normal bivariada

Propriedades.

- O parâmetro ρ será o coeficiente de correlação entre X_1 e X_2;

Distribuição normal bivariada

Propriedades.

- O parâmetro ρ será o coeficiente de correlação entre X_1 e X_2;
- As distribuições marginais são, respectivamente,

Distribuição normal bivariada

Propriedades.

- O parâmetro ρ será o coeficiente de correlação entre X_1 e X_2;
- As distribuições marginais são, respectivamente,

$$X_1 \sim \mathrm{N}(\mu_1, \sigma_1^2),\ X_2 \sim \mathrm{N}(\mu_2, \sigma_2^2);$$

Distribuição normal bivariada

Propriedades.

- O parâmetro ρ será o coeficiente de correlação entre X_1 e X_2;
- As distribuições marginais são, respectivamente,

$$X_1 \sim \mathrm{N}(\mu_1, \sigma_1^2),\ X_2 \sim \mathrm{N}(\mu_2, \sigma_2^2);$$

- As distribuições condicionais são, respectivamente,

Distribuição normal bivariada

Propriedades.

- O parâmetro ρ será o coeficiente de correlação entre X_1 e X_2;
- As distribuições marginais são, respectivamente,

$$X_1 \sim \mathrm{N}(\mu_1, \sigma_1^2),\ X_2 \sim \mathrm{N}(\mu_2, \sigma_2^2);$$

- As distribuições condicionais são, respectivamente,

$$X_1|X_2 = x_2 \sim \mathrm{N}\left[\mu_1 + \rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(x_2 - \mu_2),\ \sigma_1^2(1-\rho^2)\right],$$
$$X_2|X_1 = x_1 \sim \mathrm{N}\left[\mu_2 + \rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x_1 - \mu_1),\ \sigma_2^2(1-\rho^2)\right].$$

Distribuição normal bivariada

Propriedades.

- O parâmetro ρ será o coeficiente de correlação entre X_1 e X_2;
- As distribuições marginais são, respectivamente,

$$X_1 \sim \mathsf{N}(\mu_1, \sigma_1^2),\ X_2 \sim \mathsf{N}(\mu_2, \sigma_2^2);$$

- As distribuições condicionais são, respectivamente,

$$X_1 | X_2 = x_2 \sim \mathsf{N}\left[\mu_1 + \rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(x_2 - \mu_2),\ \sigma_1^2(1-\rho^2)\right],$$

$$X_2 | X_1 = x_1 \sim \mathsf{N}\left[\mu_2 + \rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x_1 - \mu_1),\ \sigma_2^2(1-\rho^2)\right].$$

Distribuição normal bivariada

Observações.

- É possível ter-se uma FDP conjunta que **não seja** normal bidimensional,

Distribuição normal bivariada

Observações.

- É possível ter-se uma FDP conjunta que **não seja** normal bidimensional, e no entanto, as FDP marginais de X_1 e X_2 serem normais unidimensionais;

Distribuição normal bivariada

Observações.

- É possível ter-se uma FDP conjunta que **não seja** normal bidimensional, e no entanto, as FDP marginais de X_1 e X_2 serem normais unidimensionais;
- Se $\rho = 0$,

Observações.

- É possível ter-se uma FDP conjunta que **não seja** normal bidimensional, e no entanto, as FDP marginais de X_1 e X_2 serem normais unidimensionais;
- Se $\rho = 0$, a FDP conjunta de $(X_1, X_2)^\top$ poderá ser fatorada e, consequentemente, X_1 e X_2 serão independentes.

Distribuição normal bivariada

Observações.

- É possível ter-se uma FDP conjunta que **não seja** normal bidimensional, e no entanto, as FDP marginais de X_1 e X_2 serem normais unidimensionais;
- Se $\rho = 0$, a FDP conjunta de $(X_1, X_2)^\top$ poderá ser fatorada e, consequentemente, X_1 e X_2 serão independentes. Assim, nós verificamos que no caso de uma distribuição normal bidimensional, correlação zero e independência são equivalentes.

Distribuição normal bivariada

Observações.

- É possível ter-se uma FDP conjunta que **não seja** normal bidimensional, e no entanto, as FDP marginais de X_1 e X_2 serem normais unidimensionais;
- Se $\rho = 0$, a FDP conjunta de $(X_1, X_2)^\top$ poderá ser fatorada e, consequentemente, X_1 e X_2 serão independentes. Assim, nós verificamos que no caso de uma distribuição normal bidimensional, correlação zero e independência são equivalentes.

Distribuição normal multivariada

Seja $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_k)^\top$ um vetor aleatório contínuo. Nós diremos que $\boldsymbol{X}$ tem distribuição normal multidimensional (multivariada) se sua FDP conjunta for dada pela seguinte expressão

Distribuição normal multivariada

Seja $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_k)^\top$ um vetor aleatório contínuo. Nós diremos que $\boldsymbol{X}$ tem distribuição normal multidimensional (multivariada) se sua FDP conjunta for dada pela seguinte expressão

$$f(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^k |\boldsymbol{\Sigma}|}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu})^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu})\right\} \mathbb{I}_{\mathbb{R}^k}(\boldsymbol{x}), \qquad (2)$$

Distribuição normal multivariada

Seja $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_k)^\top$ um vetor aleatório contínuo. Nós diremos que $\boldsymbol{X}$ tem distribuição normal multidimensional (multivariada) se sua FDP conjunta for dada pela seguinte expressão

$$f(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^k |\boldsymbol{\Sigma}|}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})\right\} \mathbb{I}_{\mathbb{R}^k}(\boldsymbol{x}), \qquad (2)$$

Distribuição normal multivariada

em que $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k)^\top \in \mathbb{R}^k$ é o vetor de médias, $\Sigma \in \mathbb{R}^{k \times k}$ é a matriz de covariâncias (uma matriz positiva semi-definida), de dimensão $k \times k$

Distribuição normal multivariada

em que $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k)^\top \in \mathbb{R}^k$ é o vetor de médias, $\boldsymbol{\Sigma} \in \mathbb{R}^{k \times k}$ é a matriz de covariâncias (uma matriz positiva semi-definida), de dimensão $k \times k$ e $|\boldsymbol{\Sigma}|$ é o determinante de $\boldsymbol{\Sigma}$.

Distribuição normal multivariada

em que $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k)^\top \in \mathbb{R}^k$ é o vetor de médias, $\boldsymbol{\Sigma} \in \mathbb{R}^{k \times k}$ é a matriz de covariâncias (uma matriz positiva semi-definida), de dimensão $k \times k$ e $|\boldsymbol{\Sigma}|$ é o determinante de $\boldsymbol{\Sigma}$. De forma alternativa, nós denotamos

$$\boldsymbol{X} \sim \mathrm{N}_k(\boldsymbol{\mu}, \Sigma). \tag{3}$$

Distribuição normal multivariada

em que $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k)^\top \in \mathbb{R}^k$ é o vetor de médias, $\boldsymbol{\Sigma} \in \mathbb{R}^{k \times k}$ é a matriz de covariâncias (uma matriz positiva semi-definida), de dimensão $k \times k$ e $|\boldsymbol{\Sigma}|$ é o determinante de $\boldsymbol{\Sigma}$. De forma alternativa, nós denotamos

$$\boldsymbol{X} \sim \mathsf{N}_k(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}). \tag{3}$$

Distribuição normal multivariada

Seja $\boldsymbol{t} = (t_1, t_2, \ldots, t_k)^\top \in \mathbb{R}^k$, a função geradoras de momentos de $\boldsymbol{X}$ é dada por

Distribuição normal multivariada

Seja $\boldsymbol{t} = (t_1, t_2, \ldots, t_k)^\top \in \mathbb{R}^k$, a função geradoras de momentos de $\boldsymbol{X}$ é dada por

$$M(\boldsymbol{t}) = \mathbb{E}(e^{\boldsymbol{t}^\top \boldsymbol{X}}) = \exp\left\{\boldsymbol{\mu}^\top \boldsymbol{t} + \frac{1}{2}\boldsymbol{t}^\top \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{t}\right\}.$$

Distribuição normal multivariada

Seja $\boldsymbol{t} = (t_1, t_2, \ldots, t_k)^\top \in \mathbb{R}^k$, a função geradoras de momentos de $\boldsymbol{X}$ é dada por

$$M(\boldsymbol{t}) = \mathbb{E}(e^{\boldsymbol{t}^\top \boldsymbol{X}}) = \exp\left\{\boldsymbol{\mu}^\top \boldsymbol{t} + \frac{1}{2}\boldsymbol{t}^\top \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{t}\right\}.$$

Distribuição normal multivariada

Observação

A quantidade $\sqrt{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})}$ é conhecida como a **distância de Mahalanobis** (Mahalanobis, 1936).

Distribuição normal multivariada

Observação

A quantidade $\sqrt{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})}$ é conhecida como a **distância de Mahalanobis** (Mahalanobis, 1936).

Distribuição normal multivariada

A normal bivariada, dada em (1), pode ser escrita na forma apresentada em (2), basta nós definirmos

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}.$$

Distribuição normal multivariada

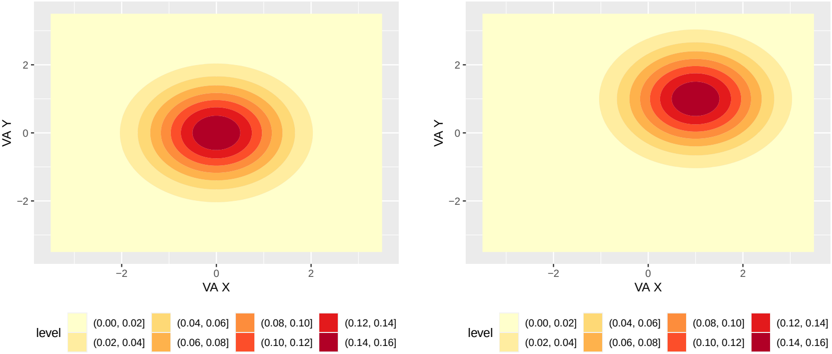
A normal bivariada, dada em (1), pode ser escrita na forma apresentada em (2), basta nós definirmos

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}.$$

Distribuição normal multivariada

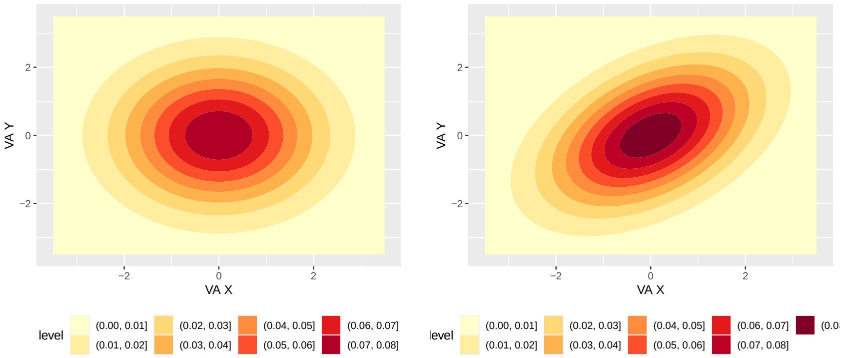
Exemplos:

1. $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 0$, $\sigma_1^2 = 1$, $\sigma_2^2 = 1$ e $\rho = 0$;
2. $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 1$, $\sigma_1^2 = 1$, $\sigma_2^2 = 1$ e $\rho = 0$;
3. $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 0$, $\sigma_1^2 = 2$, $\sigma_2^2 = 2$ e $\rho = 0$;
4. $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 0$, $\sigma_1^2 = 2$, $\sigma_2^2 = 2$ e $\rho = 0{,}45$.



(a) Exemplo 1. (b) Exemplo 2.

Figura 1: Gráfico de contornos de normais bidimensionais.



(a) Exemplo 3.

(b) Exemplo 4.

Figura 2: Gráfico de contornos de normais bidimensionais.

Distribuição normal multivariada

Sejam $\boldsymbol{Z} = (Z_1, Z_2, \ldots, Z_n)^\top$, tal que $Z_i \sim \mathrm{N}(0,\ 1)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m)^\top \in \mathbb{R}^m$ e uma matriz $\boldsymbol{A}$, de dimensão $m \times n$. A condição para $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_m)^\top$ ter distribuição normal multivariada é a seguinte:

Distribuição normal multivariada

Sejam $\boldsymbol{Z} = (Z_1, Z_2, \ldots, Z_n)^\top$, tal que $Z_i \sim \mathrm{N}(0,\ 1)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m)^\top \in \mathbb{R}^m$ e uma matriz $\boldsymbol{A}$, de dimensão $m \times n$. A condição para $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_m)^\top$ ter distribuição normal multivariada é a seguinte:

$$\boldsymbol{X} \sim \mathrm{N}_m(\boldsymbol{\mu}, \Sigma) \Leftrightarrow \boldsymbol{AZ} + \boldsymbol{\mu}, \qquad (4)$$

em que $\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{AA}^\top$.

Distribuição normal multivariada

Sejam $\boldsymbol{Z} = (Z_1, Z_2, \ldots, Z_n)^\top$, tal que $Z_i \sim \mathrm{N}(0,\ 1)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m)^\top \in \mathbb{R}^m$ e uma matriz $\boldsymbol{A}$, de dimensão $m \times n$. A condição para $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_m)^\top$ ter distribuição normal multivariada é a seguinte:

$$\boldsymbol{X} \sim \mathrm{N}_m(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) \Leftrightarrow \boldsymbol{A}\boldsymbol{Z} + \boldsymbol{\mu}, \tag{4}$$

em que $\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^\top$. A equação (4) expressa em sistema lineares pode ser encontrada em Ross (2010, p. 432).

Distribuição normal multivariada

Sejam $\boldsymbol{Z} = (Z_1, Z_2, \ldots, Z_n)^\top$, tal que $Z_i \sim \mathrm{N}(0,\ 1)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m)^\top \in \mathbb{R}^m$ e uma matriz $\boldsymbol{A}$, de dimensão $m \times n$. A condição para $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_m)^\top$ ter distribuição normal multivariada é a seguinte:

$$\boldsymbol{X} \sim \mathrm{N}_m(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) \Leftrightarrow \boldsymbol{AZ} + \boldsymbol{\mu}, \tag{4}$$

em que $\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{AA}^\top$. A equação (4) expressa em sistema lineares pode ser encontrada em Ross (2010, p. 432).

Distribuição normal multivariada

Sejam $\boldsymbol{X}$ um vetor com distribuição normal multivariada, como dada em (3), e $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_k)^\top \in \mathbb{R}^k$ um vetor de constantes. Agora, seja uma VA definida da seguinte forma:

Distribuição normal multivariada

Sejam $\boldsymbol{X}$ um vetor com distribuição normal multivariada, como dada em (3), e $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_k)^\top \in \mathbb{R}^k$ um vetor de constantes. Agora, seja uma VA definida da seguinte forma:

$$Y = \boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{X} = a_1 X_1 + a_2 X_2 + \cdots + a_k X_k.$$

Distribuição normal multivariada

Sejam $\boldsymbol{X}$ um vetor com distribuição normal multivariada, como dada em (3), e $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_k)^\top \in \mathbb{R}^k$ um vetor de constantes. Agora, seja uma VA definida da seguinte forma:

$$Y = \boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{X} = a_1 X_1 + a_2 X_2 + \cdots + a_k X_k.$$

Então, Y tem distribuição normal unidimensional com média $\mu_Y = \boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{\mu}$ e $\sigma_Y^2 = \boldsymbol{a}^\top \Sigma \boldsymbol{a}$,

Distribuição normal multivariada

Sejam $\boldsymbol{X}$ um vetor com distribuição normal multivariada, como dada em (3), e $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_k)^\top \in \mathbb{R}^k$ um vetor de constantes. Agora, seja uma VA definida da seguinte forma:

$$Y = \boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{X} = a_1 X_1 + a_2 X_2 + \cdots + a_k X_k.$$

Então, Y tem distribuição normal unidimensional com média $\mu_Y = \boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{\mu}$ e $\sigma_Y^2 = \boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{a}$, i.e., combinação linear de distribuições normais tem distribuição normal.

Distribuição normal multivariada

Sejam $\boldsymbol{X}$ um vetor com distribuição normal multivariada, como dada em (3), e $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_k)^\top \in \mathbb{R}^k$ um vetor de constantes. Agora, seja uma VA definida da seguinte forma:

$$Y = \boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{X} = a_1 X_1 + a_2 X_2 + \cdots + a_k X_k.$$

Então, Y tem distribuição normal unidimensional com média $\mu_Y = \boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{\mu}$ e $\sigma_Y^2 = \boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{a}$, i.e., combinação linear de distribuições normais tem distribuição normal.

Roteiro

Distribuição Wishart

Sejam $\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \ldots, \boldsymbol{X}_n$ vetores aleatórios independentes, $p \times 1$, tal que

$$\boldsymbol{X}_i \sim \mathrm{N}_p(\mathbf{0}, \Sigma),$$

$i = 1, 2, \ldots, n$. Seja também,

$$\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \ldots, \boldsymbol{X}_n),$$

Distribuição Wishart

Sejam $\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \ldots, \boldsymbol{X}_n$ vetores aleatórios independentes, $p \times 1$, tal que

$$\boldsymbol{X}_i \sim \mathsf{N}_p(\mathbf{0}, \Sigma),$$

$i = 1, 2, \ldots, n$. Seja também,

$$\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \ldots, \boldsymbol{X}_n)\,,$$

uma matriz aleatória, de dimensão $p \times n$.

Distribuição Wishart

Sejam $\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \ldots, \boldsymbol{X}_n$ vetores aleatórios independentes, $p \times 1$, tal que

$$\boldsymbol{X}_i \sim \mathrm{N}_p(\mathbf{0}, \Sigma),$$

$i = 1, 2, \ldots, n$. Seja também,

$$\boldsymbol{X} = \left(\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \ldots, \boldsymbol{X}_n\right),$$

uma matriz aleatória, de dimensão $p \times n$.

Distribuição Wishart

A matriz aleatória, de dimensão $p \times p$, construída da seguinte forma,

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^\top = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{X}_i \boldsymbol{X}_i^\top,$$

Distribuição Wishart

A matriz aleatória, de dimensão $p \times p$, construída da seguinte forma,

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^\top = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{X}_i \boldsymbol{X}_i^\top,$$

é denominada de distribuição Wishart, com n graus de liberdade e matriz de covariâncias Σ.

Distribuição Wishart

A matriz aleatória, de dimensão $p \times p$, construída da seguinte forma,

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^\top = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{X}_i \boldsymbol{X}_i^\top,$$

é denominada de distribuição Wishart, com n graus de liberdade e matriz de covariâncias $\boldsymbol{\Sigma}$. Notação: $\boldsymbol{M} \sim \mathrm{W}_p(n, \Sigma)$.

Distribuição Wishart

A matriz aleatória, de dimensão $p \times p$, construída da seguinte forma,

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^\top = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{X}_i \boldsymbol{X}_i^\top,$$

é denominada de distribuição Wishart, com n graus de liberdade e matriz de covariâncias $\boldsymbol{\Sigma}$. Notação: $\boldsymbol{M} \sim \mathrm{W}_p(n, \boldsymbol{\Sigma})$.

Distribuição Wishart

Se $\boldsymbol{M} \sim \mathrm{W}_p(n, \boldsymbol{\Sigma})$, sua FDP conjunta é dada pela seguinte expressão

$$f(\boldsymbol{M}) = \frac{1}{2^{np/2}\Gamma_p\left(\frac{n}{2}\right)|\boldsymbol{\Sigma}|^{n/2}}|\boldsymbol{M}|^{(n-p-1)/2}\exp\left\{-\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left[\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{M}\right]\right\}\mathbb{I}_{\mathbb{R}_+^{p\times p}}(\boldsymbol{M}),$$

Distribuição Wishart

Se $\boldsymbol{M} \sim \mathrm{W}_p(n, \boldsymbol{\Sigma})$, sua FDP conjunta é dada pela seguinte expressão

$$f(\boldsymbol{M}) = \frac{1}{2^{np/2}\Gamma_p\left(\frac{n}{2}\right)|\boldsymbol{\Sigma}|^{n/2}}|\boldsymbol{M}|^{(n-p-1)/2}\exp\left\{-\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left[\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{M}\right]\right\}\mathbb{I}_{\mathbb{R}_+^{p\times p}}(\boldsymbol{M}),$$

em que $\mathrm{tr}\left[\cdot\right]$ é o operador traço e $\Gamma_p\left(\cdot\right)$ é a função gama multivariada.

Distribuição Wishart

Se $\boldsymbol{M} \sim \mathrm{W}_p(n, \boldsymbol{\Sigma})$, sua FDP conjunta é dada pela seguinte expressão

$$f(\boldsymbol{M}) = \frac{1}{2^{np/2}\Gamma_p\left(\frac{n}{2}\right)|\boldsymbol{\Sigma}|^{n/2}}|\boldsymbol{M}|^{(n-p-1)/2}\exp\left\{-\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left[\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{M}\right]\right\}\mathbb{I}_{\mathbb{R}_+^{p\times p}}(\boldsymbol{M}),$$

em que $\mathrm{tr}\left[\cdot\right]$ é o operador traço e $\Gamma_p\left(\cdot\right)$ é a função gama multivariada.

Distribuição Wishart

Observações:

1. se $\Sigma = \boldsymbol{I}_p$,

Distribuição Wishart

Observações:

1. se $\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{I}_p$, a distribuição de $\boldsymbol{M}$ é denominada de Wishart padrão;

Distribuição Wishart

Observações:

1. se $\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{I}_p$, a distribuição de $\boldsymbol{M}$ é denominada de Wishart padrão;
2. a Wishart é a extensão multivariada da distribuição qui-quadrado;

Distribuição Wishart

Observações:

1. se $\mathbf{\Sigma} = \boldsymbol{I}_p$, a distribuição de $\boldsymbol{M}$ é denominada de Wishart padrão;
2. a Wishart é a extensão multivariada da distribuição qui-quadrado;
3. se $M \sim \mathrm{W}_1(n, \sigma^2)$,

Distribuição Wishart

Observações:

1. se $\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{I}_p$, a distribuição de $\boldsymbol{M}$ é denominada de Wishart padrão;
2. a Wishart é a extensão multivariada da distribuição qui-quadrado;
3. se $M \sim \mathrm{W}_1(n, \sigma^2)$, então $M/\sigma^2 \sim \chi^2_n$.

Distribuição Wishart

Observações:

1. se $\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{I}_p$, a distribuição de $\boldsymbol{M}$ é denominada de Wishart padrão;
2. a Wishart é a extensão multivariada da distribuição qui-quadrado;
3. se $M \sim \mathrm{W}_1(n, \sigma^2)$, então $M/\sigma^2 \sim \chi^2_n$.

Roteiro

Nós podemos assumir que o vetor aleatório $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_D)^\top$ segue uma distribuição Dirichlet (Olkin e Rubin, 1964) com vetor de parâmetros $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_D)^\top$, $\lambda_j > 0$, $j = 1, 2, \ldots, D$, com $D \geq 2$,

Distribuição Dirichlet

Nós podemos assumir que o vetor aleatório $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_D)^\top$ segue uma distribuição Dirichlet (Olkin e Rubin, 1964) com vetor de parâmetros $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_D)^\top$, $\lambda_j > 0$, $j = 1, 2, \ldots, D$, com $D \geq 2$, se sua FDP conjunta pode ser escrita como

$$f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}) = \frac{\Gamma\left(\sum_{j=1}^{D} \lambda_j\right)}{\prod_{j=1}^{D} \Gamma(\lambda_j)} \prod_{j=1}^{D} x_j^{\lambda_j - 1} \, \mathbb{I}_{(0,1)}(x_1 + x_2 + \cdots + x_D), \tag{5}$$

Distribuição Dirichlet

Nós podemos assumir que o vetor aleatório $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_D)^\top$ segue uma distribuição Dirichlet (Olkin e Rubin, 1964) com vetor de parâmetros $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_D)^\top$, $\lambda_j > 0$, $j = 1, 2, \ldots, D$, com $D \geq 2$, se sua FDP conjunta pode ser escrita como

$$f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}) = \frac{\Gamma\left(\sum_{j=1}^{D} \lambda_j\right)}{\prod_{j=1}^{D} \Gamma(\lambda_j)} \prod_{j=1}^{D} x_j^{\lambda_j - 1} \, \mathbb{I}_{(0,1)}(x_1 + x_2 + \cdots + x_D), \tag{5}$$

em que $\Gamma(\cdot)$ é a função gama, isto é, $\Gamma(\lambda) = \int_0^\infty v^{\lambda-1} e^{-v} dv$.

Nós podemos assumir que o vetor aleatório $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_D)^\top$ segue uma distribuição Dirichlet (Olkin e Rubin, 1964) com vetor de parâmetros $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_D)^\top$, $\lambda_j > 0$, $j = 1, 2, \ldots, D$, com $D \geq 2$, se sua FDP conjunta pode ser escrita como

$$f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}) = \frac{\Gamma\left(\sum_{j=1}^{D} \lambda_j\right)}{\prod_{j=1}^{D} \Gamma(\lambda_j)} \prod_{j=1}^{D} x_j^{\lambda_j - 1} \, \mathbb{I}_{(0,1)}(x_1 + x_2 + \cdots + x_D), \tag{5}$$

em que $\Gamma(\cdot)$ é a função gama, isto é, $\Gamma(\lambda) = \int_0^\infty v^{\lambda-1} e^{-v} dv$.

Distribuição Dirichlet

A distribuição Dirichlet é a generalização da distribuição beta. Além disso, se $\boldsymbol{X} \sim \text{Dirichlet}(\boldsymbol{\lambda})$,

Distribuição Dirichlet

A distribuição Dirichlet é a generalização da distribuição beta. Além disso, se $\boldsymbol{X} \sim \text{Dirichlet}(\boldsymbol{\lambda})$, nós temos que

Distribuição Dirichlet

A distribuição Dirichlet é a generalização da distribuição beta. Além disso, se $\boldsymbol{X} \sim \text{Dirichlet}(\boldsymbol{\lambda})$, nós temos que

$$\mathbb{E}(X_j) = \frac{\lambda_j}{\sum_{j=1}^{D} \lambda_j}, \; j = 1, 2, \ldots, D.$$

Distribuição Dirichlet

A distribuição Dirichlet é a generalização da distribuição beta. Além disso, se $\boldsymbol{X} \sim \text{Dirichlet}(\boldsymbol{\lambda})$, nós temos que

$$\mathbb{E}(X_j) = \frac{\lambda_j}{\sum_{j=1}^{D} \lambda_j}, \; j = 1, 2, \ldots, D.$$

Outras propriedades podem ser encontradas em Pereira e Stern (2008).

Distribuição Dirichlet

A distribuição Dirichlet é a generalização da distribuição beta. Além disso, se $\boldsymbol{X} \sim \text{Dirichlet}(\boldsymbol{\lambda})$, nós temos que

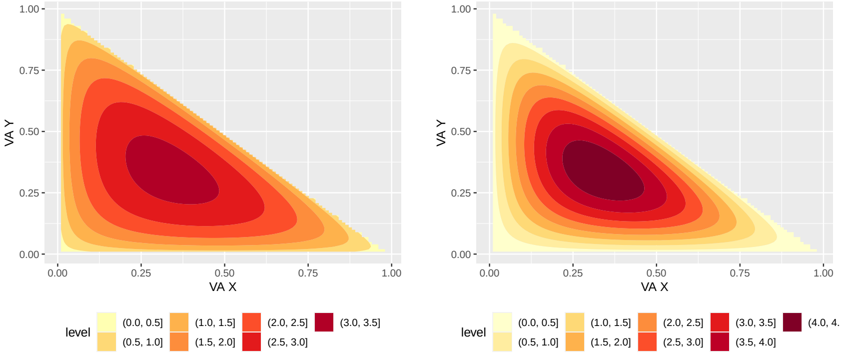
$$\mathbb{E}(X_j) = \frac{\lambda_j}{\sum_{j=1}^{D} \lambda_j}, \ j = 1, 2, \ldots, D.$$

Outras propriedades podem ser encontradas em Pereira e Stern (2008).

Distribuição Dirichlet

Exemplos:

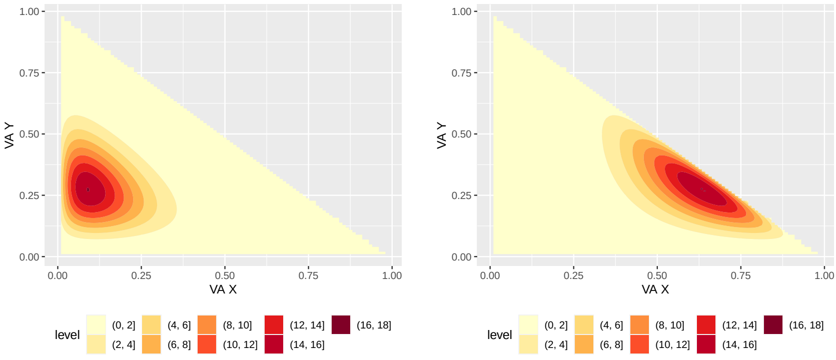
1. $\lambda_1 = 1{,}5$, $\lambda_2 = 1{,}5$ e $\lambda_3 = 1{,}5$;
2. $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 2$ e $\lambda_3 = 2$;
3. $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 4$ e $\lambda_3 = 8$;
4. $\lambda_1 = 8$, $\lambda_2 = 4$ e $\lambda_3 = 2$.



(a) Exemplo 1.

(b) Exemplo 2.

Figura 3: Gráfico de contornos de Dirichlets tridimensionais.



(a) Exemplo 3. (b) Exemplo 4.

Figura 4: Gráfico de contornos de Dirichlets tridimensionais.

Uma vantagem de assumir uma distribuição Dirichlet é que ela pode ser simulada a partir de uma distribuição gama, como demostrado por Devroye (1986).

Distribuição Dirichlet

Uma vantagem de assumir uma distribuição Dirichlet é que ela pode ser simulada a partir de uma distribuição gama, como demostrado por Devroye (1986). O algoritmo de simulação é o seguinte:

Distribuição Dirichlet

Uma vantagem de assumir uma distribuição Dirichlet é que ela pode ser simulada a partir de uma distribuição gama, como demostrado por Devroye (1986). O algoritmo de simulação é o seguinte:

1. Fixa-se $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_D)^\top$;

Distribuição Dirichlet

Uma vantagem de assumir uma distribuição Dirichlet é que ela pode ser simulada a partir de uma distribuição gama, como demostrado por Devroye (1986). O algoritmo de simulação é o seguinte:

1. Fixa-se $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_D)^\top$;
2. Simulam-se D valores de $y_j \sim \text{gama}(\lambda_j, 1)$, com $j = 1, \ldots, D$;

Distribuição Dirichlet

Uma vantagem de assumir uma distribuição Dirichlet é que ela pode ser simulada a partir de uma distribuição gama, como demostrado por Devroye (1986). O algoritmo de simulação é o seguinte:

1. Fixa-se $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_D)^\top$;
2. Simulam-se D valores de $y_j \sim \text{gama}(\lambda_j, 1)$, com $j = 1, \ldots, D$;
3. Calculam-se $x_j = \frac{y_j}{\sum_{j=1}^{D} y_j}$, com $j = 1, \ldots, D$.

Distribuição Dirichlet

Uma vantagem de assumir uma distribuição Dirichlet é que ela pode ser simulada a partir de uma distribuição gama, como demostrado por Devroye (1986). O algoritmo de simulação é o seguinte:

1. Fixa-se $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_D)^\top$;
2. Simulam-se D valores de $y_j \sim \text{gama}(\lambda_j, 1)$, com $j = 1, \ldots, D$;
3. Calculam-se $x_j = \frac{y_j}{\sum_{j=1}^{D} y_j}$, com $j = 1, \ldots, D$.

Roteiro

Referências bibliográficas I

Devroye, L. (1986), *Non-Uniform Random Variate Generation*, Springer-Verlag, New York.

Hardy, G. H. (1908), 'Mendelian proportions in a mixed population', *Science* **28**(706), 49–50.

Mahalanobis, P. C. (1936), 'On the generalised distance in statistics', *Proceedings of the National Institute of Sciences of India* **2**(1), 49–55.

Olkin, I. e Rubin, H. (1964), 'Multivariate beta distributions and independence properties of the wishart distribution', *Annals of Mathematical Statistics* **35**(1), 261–269.

Referências bibliográficas II

Pereira, C. A. B. e Stern, J. M. (2008), 'Special characterizations of standard discrete models', *REVSTAT - Statistical Journal* **6**(3), 199–230.

Ross, S. (2010), *Probabilidade: um curso moderno com aplicações*, 8 edn, Bookman, Porto Alegre.

Weinberg, W. (1908), 'Über den nachweis der vererbung beim menschen', *Jahresheft des Vereins für vaterländische Naturkunde in Württemberg* **64**, 368–382.

Obrigado!

✉ tiago.magalhaes@ufjf.br

ufjf.br/tiago_magalhaes

Departamento de Estatística, Sala 319