

Funções geradoras

Tiago M. Magalhães

Departamento de Estatística - ICE-UFJF

Juiz de Fora, 21 de novembro de 2024



Roteiro

- 1 Funções geradoras
- 2 Função geradora multidimensional de momentos
- 3 Bibliografia



Roteiro

- 1 Funções geradoras
- 2 Função geradora multidimensional de momentos
- 3 Bibliografia



Função geradora de probabilidades

A função geradora de probabilidades (FGP) da variável aleatória (VA) discreta X , $P_X(t)$, é definida por

$$P_X(t) = \mathbb{E} \left[t^X \right] = \sum_{i=1}^{+\infty} t^{x_i} p_X(x_i),$$

para $t \in \mathbb{R}$.



Função geradora de momentos

E a função geradora de momentos (FGM) da VA X , $M_X(t)$, é definida por

$$M_X(t) = \mathbb{E} \left[e^{tX} \right] = \begin{cases} \sum_{i=1}^{+\infty} e^{tx_i} p_X(x_i), & \text{caso discreto,} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f_X(x) dx, & \text{caso contínuo,} \end{cases}$$

para $t \in \mathbb{R}$.



Função característica

As FGP e FGM são ferramentas muito úteis. Contudo, elas nem sempre existirão. Dessa forma, é interessante obter uma função que sempre exista.



Função característica

Uma VA X é complexa, se puder ser escrita como:

$$X = X^a + iX^b,$$

em que $i = \sqrt{-1}$, X^a e X^b são VA reais.

Função característica

A função característica da VA X , $\varphi_X(t)$, é definida por

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E} \left[e^{itX} \right] = \mathbb{E} [\cos(tX)] + i\mathbb{E} [\text{sen}(tX)],$$

para $t \in \mathbb{R}$ e $i = \sqrt{-1}$.



Função característica

Seja X uma VA qualquer e φ_X sua função característica, então:

① $\varphi_X(0) = 1;$



Função característica

Seja X uma VA qualquer e φ_X sua função característica, então:

- ① $\varphi_X(0) = 1$;
- ② $|\varphi_X(t)| \leq 1$;



Função característica

Seja X uma VA qualquer e φ_X sua função característica, então:

- ① $\varphi_X(0) = 1$;
- ② $|\varphi_X(t)| \leq 1$;
- ③ Para a e b constantes, $\varphi_{aX+b}(t) = e^{itb} \varphi_X(at)$;



Função característica

Seja X uma VA qualquer e φ_X sua função característica, então:

- ① $\varphi_X(0) = 1$;
- ② $|\varphi_X(t)| \leq 1$;
- ③ Para a e b constantes, $\varphi_{aX+b}(t) = e^{itb} \varphi_X(at)$;
- ④ Se as VA X e Y são independentes então, $\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t) \times \varphi_Y(t)$;



Função característica

Seja X uma VA qualquer e φ_X sua função característica, então:

- ① $\varphi_X(0) = 1$;
- ② $|\varphi_X(t)| \leq 1$;
- ③ Para a e b constantes, $\varphi_{aX+b}(t) = e^{itb} \varphi_X(at)$;
- ④ Se as VA X e Y são independentes então, $\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t) \times \varphi_Y(t)$;
- ⑤ $\varphi_X(t)$ é uniformemente contínua;



Função característica

Seja X uma VA qualquer e φ_X sua função característica, então:

- ① $\varphi_X(0) = 1$;
- ② $|\varphi_X(t)| \leq 1$;
- ③ Para a e b constantes, $\varphi_{aX+b}(t) = e^{itb} \varphi_X(at)$;
- ④ Se as VA X e Y são independentes então, $\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t) \times \varphi_Y(t)$;
- ⑤ $\varphi_X(t)$ é uniformemente contínua;
- ⑥ $\varphi_X(t)$ também gera momentos.



Função característica

Seja X uma VA qualquer e φ_X sua função característica, então:

- ① $\varphi_X(0) = 1$;
- ② $|\varphi_X(t)| \leq 1$;
- ③ Para a e b constantes, $\varphi_{aX+b}(t) = e^{itb} \varphi_X(at)$;
- ④ Se as VA X e Y são independentes então, $\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t) \times \varphi_Y(t)$;
- ⑤ $\varphi_X(t)$ é uniformemente contínua;
- ⑥ $\varphi_X(t)$ também gera momentos.



Funções geradoras

Seja X uma VA, a partir das funções geradoras, nós podemos observar as seguintes relações

- $M_X(t) = P_X(e^t)$, se X é uma VA discreta;



Funções geradoras

Seja X uma VA, a partir das funções geradoras, nós podemos observar as seguintes relações

- $M_X(t) = P_X(e^t)$, se X é uma VA discreta;
- $\varphi_X(t) = M_X(it)$.



Funções geradoras

Seja X uma VA, a partir das funções geradoras, nós podemos observar as seguintes relações

- $M_X(t) = P_X(e^t)$, se X é uma VA discreta;
- $\varphi_X(t) = M_X(it)$.



Função geradora de cumulantes

A função geradora de cumulantes (FGC) da VA X , $K_X(t)$, é definida por

$$K_X(t) = \log M_X(t),$$

para $t \in \mathbb{R}$. A FGC também pode ser definida como

$$K_X(t) = \log \varphi_X(t),$$

para $t \in \mathbb{R}$.



Função geradora de cumulantes

A função geradora de cumulantes (FGC) da VA X , $K_X(t)$, é definida por

$$K_X(t) = \log M_X(t),$$

para $t \in \mathbb{R}$. A FGC também pode ser definida como

$$K_X(t) = \log \varphi_X(t),$$

para $t \in \mathbb{R}$.



Roteiro

- 1 Funções geradoras
- 2 Função geradora multidimensional de momentos
- 3 Bibliografia



Função geradora multidimensional de momentos

A FGM conjunta da VA bidimensional $(X, Y)^T$, $M(t_1, t_2)$, é definida para todos os valores reais t_1 e t_2 por

$$\begin{aligned} M(t_1, t_2) &= \mathbb{E} \left[e^{t_1 X + t_2 Y} \right] & (1) \\ &= \begin{cases} \sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^{+\infty} e^{t_1 x_i + t_2 y_j} p(x_i, y_j), & \text{caso discreto,} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{t_1 x + t_2 y} f(x, y) dx dy, & \text{caso contínuo.} \end{cases} \end{aligned}$$

A FGM conjunta é única e determina a distribuição conjunta de $(X, Y)^T$.



Função geradora multidimensional de momentos

A FGM conjunta da VA bidimensional $(X, Y)^T$, $M(t_1, t_2)$, é definida para todos os valores reais t_1 e t_2 por

$$\begin{aligned} M(t_1, t_2) &= \mathbb{E} \left[e^{t_1 X + t_2 Y} \right] & (1) \\ &= \begin{cases} \sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^{+\infty} e^{t_1 x_i + t_2 y_j} p(x_i, y_j), & \text{caso discreto,} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{t_1 x + t_2 y} f(x, y) dx dy, & \text{caso contínuo.} \end{cases} \end{aligned}$$

A FGM conjunta é única e determina a distribuição conjunta de $(X, Y)^T$.



Função geradora de momentos

De (1), nós temos que

$$\left. \frac{\partial^{r+s} M(t_1, t_2)}{\partial t_1^r \partial t_2^s} \right|_{t_1=0, t_2=0} = \mathbb{E}(X^r Y^s).$$

Por exemplo, $r = s = 1$,

$$\left. \frac{\partial^2 M(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} \right|_{t_1=0, t_2=0} = \mathbb{E}(XY).$$

Função geradora de momentos

De (1), nós temos que

$$\left. \frac{\partial^{r+s} M(t_1, t_2)}{\partial t_1^r \partial t_2^s} \right|_{t_1=0, t_2=0} = \mathbb{E}(X^r Y^s).$$

Por exemplo, $r = s = 1$,

$$\left. \frac{\partial^2 M(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} \right|_{t_1=0, t_2=0} = \mathbb{E}(XY).$$



Função geradora de momentos

Se $r = 1$ e $s = 0$,

$$\left. \frac{\partial M(t_1, t_2)}{\partial t_1} \right|_{t_1=0, t_2=0} = \mathbb{E}(X).$$

Se $r = 0$ e $s = 1$,

$$\left. \frac{\partial M(t_1, t_2)}{\partial t_2} \right|_{t_1=0, t_2=0} = \mathbb{E}(Y).$$

Função geradora de momentos

Se $r = 1$ e $s = 0$,

$$\left. \frac{\partial M(t_1, t_2)}{\partial t_1} \right|_{t_1=0, t_2=0} = \mathbb{E}(X).$$

Se $r = 0$ e $s = 1$,

$$\left. \frac{\partial M(t_1, t_2)}{\partial t_2} \right|_{t_1=0, t_2=0} = \mathbb{E}(Y).$$

Função geradora de momentos

De (1), nós podemos obter as FGM marginais da seguinte forma

$$M_X(t) = \mathbb{E} \left[e^{tX} \right] = M(t, 0),$$

$$M_Y(t) = \mathbb{E} \left[e^{tY} \right] = M(0, t).$$



Função geradora de momentos

Se X e Y são VAs independentes, então a FGM em (1) pode ser escrita da seguinte forma

$$M(t_1, t_2) = M_X(t_1) \times M_Y(t_2).$$



Função geradora de momentos

Se X e Y são VAs independentes, então a FGM em (1) pode ser escrita da seguinte forma

$$M(t_1, t_2) = M_X(t_1) \times M_Y(t_2).$$



Função geradora de momentos

De maneira geral, a FGM conjunta da VA multidimensional $(X_1, X_2, \dots, X_n)^T$, $M(t_1, t_2, \dots, t_n)$, é definida por

$$M(t_1, t_2, \dots, t_n) = \mathbb{E} \left[e^{t_1 X_1 + t_2 X_2 + \dots + t_n X_n} \right].$$



Função geradora de momentos

Exemplo. Sejam $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ e $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ VAs independentes.

- ① Qual é a FGM de X e Y , respectivamente? (Não é necessário provar).
- ② Qual é a FGM conjunta da VA bidimensional $(X, Y)^\top$?
- ③ A partir da FGM do item (b), encontre $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(Y)$, $\mathbb{E}(XY)$;
- ④ Calcule $\text{Cov}(X, Y)$.



Função geradora de momentos

Exemplo. Sejam $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ e $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ VAs independentes.

- ① Qual é a FGM de X e Y , respectivamente? (Não é necessário provar).
- ② Qual é a FGM conjunta da VA bidimensional $(X, Y)^\top$?
- ③ A partir da FGM do item (b), encontre $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(Y)$, $\mathbb{E}(XY)$;
- ④ Calcule $\text{Cov}(X, Y)$.



Roteiro

- 1 Funções geradoras
- 2 Função geradora multidimensional de momentos
- 3 Bibliografia



Bibliografia

- Magalhães, M. N. (2015), *Probabilidade e variáveis aleatórias*, 3 edn, Editora da Universidade de São Paulo, São Paulo.
- Meyer, P. L. (2017), *Probabilidade: aplicações à Estatística*, 2 edn, Livros Técnicos e Científicos Editora Ltda, Rio de Janeiro.
- Ross, S. (2010), *Probabilidade: um curso moderno com aplicações*, 8 edn, Bookman, Porto Alegre.
- Ross, S. (2019), *A first course in probability*, 10 edn. global edn, Pearson Education, Malaysia.



Obrigado!

✉ tiago.magalhaes@ufjf.br

📄 ufjf.br/tiago_magalhaes

🌐 Departamento de Estatística, Sala 319

