Distribuições marginais e condicionais

Tiago M. Magalhães

Departamento de Estatística - ICE-UFJF

Juiz de Fora, 12 de novembro de 2024

Roteiro

Roteiro

Distribuições de probabilidade marginal

A cada variável aleatória bidimensional $(X, Y)^\top$, nós associamos duas variáveis aleatórias unidimensionais, a saber X e Y, individualmente.

Isto é, nós poderemos estar interessados na distribuição de probabilidade de X ou na distribuição de probabilidade de Y.

Distribuições de probabilidade marginal

A cada variável aleatória bidimensional $(X, Y)^\top$, nós associamos duas variáveis aleatórias unidimensionais, a saber X e Y, individualmente.

Isto é, nós poderemos estar interessados na distribuição de probabilidade de X ou na distribuição de probabilidade de Y.

Distribuições de probabilidade marginal

Caso discreto. Desde que $X = x_i$ deve ocorrer junto com $Y = y_j$ para algum j e pode ocorrer com $Y = y_j$ somente para um j,

Distribuições de probabilidade marginal

Caso discreto. Desde que $X = x_i$ deve ocorrer junto com $Y = y_j$ para algum j e pode ocorrer com $Y = y_j$ somente para um j, nós teremos

$$\begin{aligned} p_X(x_i) &= \mathbb{P}(X = x_i) \\ &= \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_1 \text{ ou } X = x_i, Y = y_2 \text{ ou } \ldots) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} p(x_i, y_j). \end{aligned}$$

Distribuições de probabilidade marginal

Caso discreto. Desde que $X = x_i$ deve ocorrer junto com $Y = y_j$ para algum j e pode ocorrer com $Y = y_j$ somente para um j, nós teremos

$$\begin{aligned} p_X(x_i) &= \mathbb{P}(X = x_i) \\ &= \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_1 \text{ ou } X = x_i, Y = y_2 \text{ ou } \ldots) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} p(x_i, y_j). \end{aligned}$$

Distribuições de probabilidade marginal

A função p_X definida para $x_1, x_2, \ldots$, representa a **distribuição de probabilidade marginal** de X. Analogamente, nós definimos

$$p_Y(y_j) = \mathbb{P}(Y = y_j) = \sum_{i=1}^{\infty} p(x_i, y_j)$$

como a distribuição de probabilidade marginal de Y.

Distribuições de probabilidade marginal

A função p_X definida para $x_1, x_2, \ldots$, representa a **distribuição de probabilidade marginal** de X. Analogamente, nós definimos

$$p_Y(y_j) = \mathbb{P}(Y = y_j) = \sum_{i=1}^{\infty} p(x_i, y_j)$$

como a distribuição de probabilidade marginal de Y.

Distribuições de probabilidade marginal

Caso contínuo. Seja f a FDP conjunta da variável aleatória bidimensional $(X, Y)^\top$.

Distribuições de probabilidade marginal

Caso contínuo. Seja f a FDP conjunta da variável aleatória bidimensional $(X, Y)^\top$. Nós definiremos f_X e f_Y, respectivamente as **funções densidade de probabilidade marginal** de X e de Y,

Distribuições de probabilidade marginal

Caso contínuo. Seja f a FDP conjunta da variável aleatória bidimensional $(X, Y)^\top$. Nós definiremos f_X e f_Y, respectivamente as **funções densidade de probabilidade marginal** de X e de Y, assim

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy, \quad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx. \tag{1}$$

Distribuições de probabilidade marginal

Caso contínuo. Seja f a FDP conjunta da variável aleatória bidimensional $(X, Y)^\top$. Nós definiremos f_X e f_Y, respectivamente as **funções densidade de probabilidade marginal** de X e de Y, assim

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dy, \quad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dx. \tag{1}$$

Distribuições de probabilidade marginal

As FDP em (1) correspondem às FDP básicas das variáveis aleatórias unidimensionais X e Y, respectivamente. Por exemplo,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(c \leq X \leq d) &= \mathbb{P}(c \leq X \leq d,\ -\infty \leq Y \leq +\infty) \\
&= \int_c^d \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dydx \\
&= \int_c^d f_X(x)dx.
\end{aligned}$$

Distribuições de probabilidade marginal

As FDP em (1) correspondem às FDP básicas das variáveis aleatórias unidimensionais X e Y, respectivamente. Por exemplo,

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(c \leq X \leq d) &= \mathbb{P}(c \leq X \leq d,\ -\infty \leq Y \leq +\infty) \\
&= \int_c^d \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) dy dx \\
&= \int_c^d f_X(x) dx.
\end{aligned}
$$

Exemplos

Exemplo 1. Duas características do desempenho do motor de um foguete são o empuxo X e a taxa de mistura Y.

Exemplo 1. Duas características do desempenho do motor de um foguete são o empuxo X e a taxa de mistura Y. Suponham que $(X, Y)^\top$ seja uma variável aleatória continua bidimensional com FDP conjunta

Exemplos

Exemplo 1. Duas características do desempenho do motor de um foguete são o empuxo X e a taxa de mistura Y. Suponham que $(X, Y)^\top$ seja uma variável aleatória continua bidimensional com FDP conjunta

$$f(x, y) = 2(x + y - 2xy)\, \mathbb{I}_{[0,1]}(x)\, \mathbb{I}_{[0,1]}(y).$$

Exemplos

Exemplo 1. Duas características do desempenho do motor de um foguete são o empuxo X e a taxa de mistura Y. Suponham que $(X, Y)^\top$ seja uma variável aleatória continua bidimensional com FDP conjunta

$$f(x, y) = 2(x + y - 2xy)\,\mathbb{I}_{[0,1]}(x)\,\mathbb{I}_{[0,1]}(y).$$

Encontre as marginais das VAs X e Y.

Exemplos

Exemplo 1. Duas características do desempenho do motor de um foguete são o empuxo X e a taxa de mistura Y. Suponham que $(X, Y)^\top$ seja uma variável aleatória continua bidimensional com FDP conjunta

$$f(x, y) = 2(x + y - 2xy)\, \mathbb{I}_{[0,1]}(x)\, \mathbb{I}_{[0,1]}(y).$$

Encontre as marginais das VAs X e Y.

Roteiro

Probabilidade condicional

Sejam X e Y duas variáveis aleatórias em $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ e A e B dois eventos,

nós definimos a distribuição condicional de X dado Y como

Probabilidade condicional

Sejam X e Y duas variáveis aleatórias em $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ e A e B dois eventos, nós definimos a distribuição condicional de X dado Y como

$$\mathbb{P}(\{X \in A\}|\{Y \in B\}) = \frac{\mathbb{P}(\{X \in A\} \cap \{Y \in B\})}{\mathbb{P}(\{Y \in B\})}.$$

Probabilidade condicional

Sejam X e Y duas variáveis aleatórias em $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ e A e B dois eventos, nós definimos a distribuição condicional de X dado Y como

$$\mathbb{P}(\{X \in A\} | \{Y \in B\}) = \frac{\mathbb{P}(\{X \in A\} \cap \{Y \in B\})}{\mathbb{P}(\{Y \in B\})}.$$

Note que $\mathbb{P}(\{Y \in B\}) \neq 0$, pois $\{Y \in B\}$ já ocorreu.

Probabilidade condicional

Sejam X e Y duas variáveis aleatórias em $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ e A e B dois eventos, nós definimos a distribuição condicional de X dado Y como

$$\mathbb{P}(\{X \in A\}|\{Y \in B\}) = \frac{\mathbb{P}(\{X \in A\} \cap \{Y \in B\})}{\mathbb{P}(\{Y \in B\})}.$$

Note que $\mathbb{P}(\{Y \in B\}) \neq 0$, pois $\{Y \in B\}$ já ocorreu.

Distribuições de probabilidade condicional

Caso discreto. Então, é natural definir a distribuição de probabilidade condicional de $X = x_i$ dado $Y = y_j$ como

Distribuições de probabilidade condicional

Caso discreto. Então, é natural definir a distribuição de probabilidade condicional de $X = x_i$ dado $Y = y_j$ como

$$\begin{aligned} p_{X|Y}(x_i|y_j) &= \mathbb{P}(X = x_i | Y = y_j) \\ &= \frac{\mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j)}{\mathbb{P}(Y = y_j)} \\ &= \frac{p(x_i, y_j)}{p_Y(y_j)}, \end{aligned}$$

para todos os valores de y_j tal que $p_Y(y_j) > 0$.

Distribuições de probabilidade condicional

Caso discreto. Então, é natural definir a distribuição de probabilidade condicional de $X = x_i$ dado $Y = y_j$ como

$$\begin{aligned} p_{X|Y}(x_i|y_j) &= \mathbb{P}(X = x_i | Y = y_j) \\ &= \frac{\mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j)}{\mathbb{P}(Y = y_j)} \\ &= \frac{p(x_i, y_j)}{p_Y(y_j)}, \end{aligned}$$

para todos os valores de y_j tal que $p_Y(y_j) > 0$.

Distribuições de probabilidade condicional

De forma similar, a FDA condicional de X dado $Y = y_j$ é definida, para todos os valores de y_j tal que $p_Y(y_j) > 0$, por

$$\begin{aligned} F_{X|Y}(x_a|y_j) &= \mathbb{P}(X \leq x_a | Y = y_j) \\ &= \sum_{i=1}^{a} p_{X|Y}(x_i|y_j). \end{aligned}$$

Distribuições de probabilidade condicional

De forma similar, a FDA condicional de X dado $Y = y_j$ é definida, para todos os valores de y_j tal que $p_Y(y_j) > 0$, por

$$\begin{aligned} F_{X|Y}(x_a|y_j) &= \mathbb{P}(X \leq x_a|Y = y_j) \\ &= \sum_{i=1}^{a} p_{X|Y}(x_i|y_j). \end{aligned}$$

Distribuições de probabilidade condicional

Caso contínuo. Se $(X, Y)^\top$ é uma variável aleatória bidimensional com FDP conjunta $f(x, y)$,

Distribuições de probabilidade condicional

Caso contínuo. Se $(X, Y)^\top$ é uma variável aleatória bidimensional com FDP conjunta $f(x, y)$, então a FDP condicional de X dado $Y = y$ é definida, para todos os valores de y tal que $f_Y(y) > 0$, por

Distribuições de probabilidade condicional

Caso contínuo. Se $(X, Y)^\top$ é uma variável aleatória bidimensional com FDP conjunta $f(x, y)$, então a FDP condicional de X dado $Y = y$ é definida, para todos os valores de y tal que $f_Y(y) > 0$, por

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)}. \tag{2}$$

Distribuições de probabilidade condicional

Caso contínuo. Se $(X, Y)^\top$ é uma variável aleatória bidimensional com FDP conjunta $f(x, y)$, então a FDP condicional de X dado $Y = y$ é definida, para todos os valores de y tal que $f_Y(y) > 0$, por

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)}. \tag{2}$$

Distribuições de probabilidade condicional

De (2), para qualquer conjunto A, nós temos que

$$\mathbb{P}(X \in A | Y = y) = \int_A f_{X|Y}(x|y) dx.$$

Distribuições de probabilidade condicional

De (2), para qualquer conjunto A, nós temos que

$$\mathbb{P}(X \in A|Y = y) = \int_A f_{X|Y}(x|y)dx.$$

Distribuições de probabilidade condicional

Em particular, se $A = (-\infty, a)$, nós podemos definir a FDA condicional de X dado $Y = y$ por

$$F_{X|Y}(a|y) = \mathbb{P}(X \leq a|Y = y) = \int_{-\infty}^{a} f_{X|Y}(x|y)dx.$$

Distribuições de probabilidade condicional

Em particular, se $A = (-\infty, a)$, nós podemos definir a FDA condicional de X dado $Y = y$ por

$$F_{X|Y}(a|y) = \mathbb{P}(X \leq a|Y = y) = \int_{-\infty}^{a} f_{X|Y}(x|y)dx.$$

Observação

Notem que,

$$p(x_i, y_j) = p_X(x_i) \times p_{Y|X}(y_j|x_i)$$
$$= p_Y(y_j) \times p_{X|Y}(x_i|y_j),$$

para o caso discreto.

Observação

Notem que,

$$
\begin{aligned}
p(x_i, y_j) &= p_X(x_i) \times p_{Y|X}(y_j|x_i) \\
&= p_Y(y_j) \times p_{X|Y}(x_i|y_j),
\end{aligned}
$$

para o caso discreto. Para o caso contínuo,

$$
\begin{aligned}
f(x, y) &= f_X(x) \times f_{Y|X}(y|x) \\
&= f_Y(y) \times f_{X|Y}(x|y).
\end{aligned}
$$

Observação

Notem que,

$$p(x_i, y_j) = p_X(x_i) \times p_{Y|X}(y_j|x_i)$$

$$= p_Y(y_j) \times p_{X|Y}(x_i|y_j),$$

para o caso discreto. Para o caso contínuo,

$$f(x, y) = f_X(x) \times f_{Y|X}(y|x)$$

$$= f_Y(y) \times f_{X|Y}(x|y).$$

Exemplos

Exemplo 2. Seja $(X, Y)^\top$ uma variável aleatória bidimensional tal que

Exemplos

Exemplo 2. Seja $(X, Y)^\top$ uma variável aleatória bidimensional tal que

$$f(x, y) = c\left(x^2 - y^2\right) e^{-x}\, \mathbb{I}_{(0,\infty)}(x)\, \mathbb{I}_{(-x,x)}(y).$$

Exemplos

Exemplo 2. Seja $(X, Y)^\top$ uma variável aleatória bidimensional tal que

$$f(x, y) = c\left(x^2 - y^2\right) e^{-x}\, \mathbb{I}_{(0,\infty)}(x)\, \mathbb{I}_{(-x,x)}(y).$$

1. Encontre o valor de c.
2. Encontre a distribuição de $Y|X = x$.

Exemplos

Exemplo 2. Seja $(X, Y)^\top$ uma variável aleatória bidimensional tal que

$$f(x, y) = c\left(x^2 - y^2\right) e^{-x}\, \mathbb{I}_{(0,\infty)}(x)\, \mathbb{I}_{(-x,x)}(y).$$

1. Encontre o valor de c.
2. Encontre a distribuição de $Y|X = x$.

Exemplos

Exemplo 3. Seja $(X, Y)^\top$ uma variável aleatória bidimensional tal que

Exemplos

Exemplo 3. Seja $(X, Y)^\top$ uma variável aleatória bidimensional tal que

$$f(x, y) = x \exp\{-x(y+1)\}\, \mathbb{I}_{(0,\infty)}(x)\, \mathbb{I}_{(0,\infty)}(y).$$

Exemplos

Exemplo 3. Seja $(X, Y)^\top$ uma variável aleatória bidimensional tal que

$$f(x, y) = x \exp\{-x(y+1)\}\, \mathbb{I}_{(0,\infty)}(x)\, \mathbb{I}_{(0,\infty)}(y).$$

Calcule a FDP de:

1. $X|Y = y$;
2. $Y|X = x$.

Exemplos

Exemplo 3. Seja $(X, Y)^\top$ uma variável aleatória bidimensional tal que

$$f(x, y) = x \exp\{-x(y+1)\}\, \mathbb{I}_{(0,\infty)}(x)\, \mathbb{I}_{(0,\infty)}(y).$$

Calcule a FDP de:

1. $X|Y = y$;
2. $Y|X = x$.

Roteiro

Variáveis aleatórias independentes

Duas variáveis aleatórias, X e Y em $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, são independentes se, e somente, para todo evento A e B,

Variáveis aleatórias independentes

Duas variáveis aleatórias, X e Y em $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, são independentes se, e somente, para todo evento A e B, nós temos que:

$$\mathbb{P}(\{X \in A\} \cap \{Y \in B\}) = \mathbb{P}(X \in A) \times \mathbb{P}(Y \in B).$$

Variáveis aleatórias independentes

Duas variáveis aleatórias, X e Y em $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, são independentes se, e somente, para todo evento A e B, nós temos que:

$$\mathbb{P}(\{X \in A\} \cap \{Y \in B\}) = \mathbb{P}(X \in A) \times \mathbb{P}(Y \in B).$$

Caso discreto

Seja $(X, Y)^\top$ uma variável aleatória discreta bidimensional. Nós diremos que X e Y são variáveis aleatórias independentes se, e somente, se,

Caso discreto

Seja $(X, Y)^\top$ uma variável aleatória discreta bidimensional. Nós diremos que X e Y são variáveis aleatórias independentes se, e somente, se,

$$p(x_i, y_j) = p_X(x_i) \times p_Y(y_j)$$

para qualquer i e j.

Caso discreto

Seja $(X, Y)^\top$ uma variável aleatória discreta bidimensional. Nós diremos que X e Y são variáveis aleatórias independentes se, e somente, se,

$$p(x_i, y_j) = p_X(x_i) \times p_Y(y_j)$$

para qualquer i e j. Isto é,

$$\mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j) = \mathbb{P}(X = x_i) \times \mathbb{P}(Y = y_j),$$

para todo i e j.

Caso discreto

Seja $(X, Y)^\top$ uma variável aleatória discreta bidimensional. Nós diremos que X e Y são variáveis aleatórias independentes se, e somente, se,

$$p(x_i, y_j) = p_X(x_i) \times p_Y(y_j)$$

para qualquer i e j. Isto é,

$$\mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j) = \mathbb{P}(X = x_i) \times \mathbb{P}(Y = y_j),$$

para todo i e j.

Caso contínuo

Seja $(X, Y)^\top$ uma variável aleatória contínua bidimensional. Nós diremos que X e Y são variáveis aleatórias independentes se, e somente, se,

Caso contínuo

Seja $(X, Y)^\top$ uma variável aleatória contínua bidimensional. Nós diremos que X e Y são variáveis aleatórias independentes se, e somente, se,

$$f(x, y) = f_X(x) \times f_Y(y).$$

para todo (x, y).

Caso contínuo

Seja $(X,Y)^\top$ uma variável aleatória contínua bidimensional. Nós diremos que X e Y são variáveis aleatórias independentes se, e somente, se,

$$f(x,y) = f_X(x) \times f_Y(y).$$

para todo (x,y).

Teorema

Caso discreto. Seja $(X, Y)^\top$ uma variável aleatória discreta bidimensional.

Teorema

Caso discreto. Seja $(X, Y)^\top$ uma variável aleatória discreta bidimensional.

Nesse caso, X e Y serão independentes se, e somente, se,

Teorema

Caso discreto. Seja $(X, Y)^\top$ uma variável aleatória discreta bidimensional.

Nesse caso, X e Y serão independentes se, e somente, se, $p_{X|Y}(x_i|y_j) = p_X(x_i)$, para todo i e j.

Teorema

Caso discreto. Seja $(X, Y)^\top$ uma variável aleatória discreta bidimensional. Nesse caso, X e Y serão independentes se, e somente, se, $p_{X|Y}(x_i|y_j) = p_X(x_i)$, para todo i e j.

Caso contínuo.

Teorema

Caso discreto. Seja $(X, Y)^\top$ uma variável aleatória discreta bidimensional. Nesse caso, X e Y serão independentes se, e somente, se, $p_{X|Y}(x_i|y_j) = p_X(x_i)$, para todo i e j.

Caso contínuo. Seja $(X, Y)^\top$ uma variável aleatória contínua bidimensional.

Teorema

Caso discreto. Seja $(X, Y)^\top$ uma variável aleatória discreta bidimensional. Nesse caso, X e Y serão independentes se, e somente, se, $p_{X|Y}(x_i|y_j) = p_X(x_i)$, para todo i e j.

Caso contínuo. Seja $(X, Y)^\top$ uma variável aleatória contínua bidimensional. Nesse caso, X e Y serão independentes se, e somente, se,

Teorema

Caso discreto. Seja $(X, Y)^\top$ uma variável aleatória discreta bidimensional. Nesse caso, X e Y serão independentes se, e somente, se, $p_{X|Y}(x_i|y_j) = p_X(x_i)$, para todo i e j.

Caso contínuo. Seja $(X, Y)^\top$ uma variável aleatória contínua bidimensional. Nesse caso, X e Y serão independentes se, e somente, se, $f_{X|Y}(x|y) = f_X(x)$, para todo x e y.

Teorema

Caso discreto. Seja $(X, Y)^\top$ uma variável aleatória discreta bidimensional. Nesse caso, X e Y serão independentes se, e somente, se, $p_{X|Y}(x_i|y_j) = p_X(x_i)$, para todo i e j.

Caso contínuo. Seja $(X, Y)^\top$ uma variável aleatória contínua bidimensional. Nesse caso, X e Y serão independentes se, e somente, se, $f_{X|Y}(x|y) = f_X(x)$, para todo x e y.

Observação. Analogamente, o teorema vale para Y.

Teorema

Caso discreto. Seja $(X, Y)^\top$ uma variável aleatória discreta bidimensional. Nesse caso, X e Y serão independentes se, e somente, se, $p_{X|Y}(x_i|y_j) = p_X(x_i)$, para todo i e j.

Caso contínuo. Seja $(X, Y)^\top$ uma variável aleatória contínua bidimensional. Nesse caso, X e Y serão independentes se, e somente, se, $f_{X|Y}(x|y) = f_X(x)$, para todo x e y.

Observação. Analogamente, o teorema vale para Y.

Exemplos

Exemplo 4. (Exemplo 2 da aula passada.) Suponhamos que a variável aleatória contínua bidimensional $(X, Y)^\top$ tenha FDP conjunta dada por

Exemplo 4. (Exemplo 2 da aula passada.) Suponhamos que a variável aleatória contínua bidimensional $(X, Y)^\top$ tenha FDP conjunta dada por

$$f(x, y) = 2e^{-x}e^{-2y}\,\mathbb{I}_{(0,+\infty)}(x)\,\mathbb{I}_{(0,+\infty)}(y).$$

Exemplo 4. (Exemplo 2 da aula passada.) Suponhamos que a variável aleatória contínua bidimensional $(X, Y)^\top$ tenha FDP conjunta dada por

$$f(x, y) = 2e^{-x}e^{-2y}\,\mathbb{I}_{(0,+\infty)}(x)\,\mathbb{I}_{(0,+\infty)}(y).$$

1. Calcule a FDP marginal de X e Y;
2. X e Y são independentes?

Exemplos

Exemplo 4. (Exemplo 2 da aula passada.) Suponhamos que a variável aleatória contínua bidimensional $(X, Y)^\top$ tenha FDP conjunta dada por

$$f(x, y) = 2e^{-x}e^{-2y}\,\mathbb{I}_{(0,+\infty)}(x)\,\mathbb{I}_{(0,+\infty)}(y).$$

1. Calcule a FDP marginal de X e Y;
2. X e Y são independentes?

Roteiro

1. Distribuições de probabilidade marginal

2. Distribuições de probabilidade condicional

3. Variáveis aleatórias independentes

4. **Bibliografia**

Bibliografia

Magalhães, M. N. (2015), *Probabilidade e variáveis aleatórias*, 3 edn, Editora da Universidade de São Paulo, São Paulo.

Meyer, P. L. (2017), *Probabilidade: aplicações à Estatística*, 2 edn, Livros Técnicos e Científicos Editora Ltda, Rio de Janeiro.

Ross, S. (2010), *Probabilidade: um curso moderno com aplicações*, 8 edn, Bookman, Porto Alegre.

Ross, S. (2019), *A first course in probability*, 10 edn. global edn, Pearson Education, Malaysia.

Obrigado!

✉ tiago.magalhaes@ufjf.br

🖰 ufjf.br/tiago_magalhaes

🌍 Departamento de Estatística, Sala 319