

Conceitos iniciais

Tiago M. Magalhães

Departamento de Estatística - ICE-UFJF

Juiz de Fora, 05 de novembro de 2024



Roteiro

- 1 Motivação
- 2 Experimento
- 3 Probabilidade
- 4 Referências bibliográficas



Roteiro

- 1 Motivação
- 2 Experimento
- 3 Probabilidade
- 4 Referências bibliográficas



Motivação

Cálculo de Probabilidades I

Em EST029, as variáveis aleatórias estudadas eram unidimensionais,



Motivação

Cálculo de Probabilidades I

Em EST029, as variáveis aleatórias estudadas eram unidimensionais, isto é, o resultado de um experimento era relacionado com um único número real.

Motivação

Cálculo de Probabilidades I

Em EST029, as variáveis aleatórias estudadas eram unidimensionais, isto é, o resultado de um experimento era relacionado com um único número real.



Motivação

Em muitas situações, no entanto, nós podemos estar interessados em observar dois ou mais números reais associados a um único experimento.

A motivação de EST076 - Cálculo de Probabilidades II é abordar os conceitos da Probabilidade neste contexto.



Motivação

Em muitas situações, no entanto, nós podemos estar interessados em observar dois ou mais números reais associados a um único experimento.

A motivação de EST076 - Cálculo de Probabilidades II é abordar os conceitos da Probabilidade neste contexto. Nesta aula, nós iremos rever e apresentar algumas definições importantes para o desenrolar desta disciplina.



Motivação

Em muitas situações, no entanto, nós podemos estar interessados em observar dois ou mais números reais associados a um único experimento.

A motivação de EST076 - Cálculo de Probabilidades II é abordar os conceitos da Probabilidade neste contexto. Nesta aula, nós iremos rever e apresentar algumas definições importantes para o desenrolar desta disciplina.



Roteiro

- 1 Motivação
- 2 Experimento**
- 3 Probabilidade
- 4 Referências bibliográficas



Experimento

Teste ou conjunto de testes com a finalidade de verificar uma suposição.

Um experimento pode ser classificado como:



Experimento

Teste ou conjunto de testes com a finalidade de verificar uma suposição.

Um experimento pode ser classificado como:

- Determinístico:



Experimento

Teste ou conjunto de testes com a finalidade de verificar uma suposição.

Um experimento pode ser classificado como:

- **Determinístico:** Nós conhecemos o resultado antecipadamente.



Experimento

Teste ou conjunto de testes com a finalidade de verificar uma suposição.

Um experimento pode ser classificado como:

- Determinístico: Nós conhecemos o resultado antecipadamente.
- Probabilístico:



Experimento

Teste ou conjunto de testes com a finalidade de verificar uma suposição.

Um experimento pode ser classificado como:

- Determinístico: Nós conhecemos o resultado antecipadamente.
- Probabilístico: Nós conhecemos o resultado somente após a realização.



Experimento

Teste ou conjunto de testes com a finalidade de verificar uma suposição.

Um experimento pode ser classificado como:

- Determinístico: Nós conhecemos o resultado antecipadamente.
- Probabilístico: Nós conhecemos o resultado somente após a realização.



Experimento

Exemplos:

- Lançamento de um dado e uma moeda;



Experimento

Exemplos:

- Lançamento de um dado e uma moeda;
- Em uma amostra de solo, a proporção de Antimônio, Arsênio e Nióbio;



Experimento

Exemplos:

- Lançamento de um dado e uma moeda;
- Em uma amostra de solo, a proporção de Antimônio, Arsênio e Nióbio;
- Em um determinado dia, o tempo de duração e a quantidade de chuva.



Experimento

Exemplos:

- Lançamento de um dado e uma moeda;
- Em uma amostra de solo, a proporção de Antimônio, Arsênio e Nióbio;
- Em um determinado dia, o tempo de duração e a quantidade de chuva.



Experimento

Espaço amostral (Ω)

São todos os resultados possíveis de um experimento.

Experimento

Espaço amostral (Ω)

São todos os resultados possíveis de um experimento. Por convenção, é denotado pela letra grega Ω .



Experimento

Espaço amostral (Ω)

São todos os resultados possíveis de um experimento. Por convenção, é denotado pela letra grega Ω .



Experimento

Lançamento de um dado e uma moeda

$$\Omega = \{(cara, 1), (cara, 2), \dots, (cara, 6), (coroa, 1), \dots, (coroa, 6)\}.$$



Experimento

Lançamento de um dado e uma moeda

$$\Omega = \{(cara, 1), (cara, 2), \dots, (cara, 6), (coroa, 1), \dots, (coroa, 6)\}.$$

Em uma amostra de solo, a proporção de S_b , A_s e N_b



Experimento

Lançamento de um dado e uma moeda

$$\Omega = \{(cara, 1), (cara, 2), \dots, (cara, 6), (coroa, 1), \dots, (coroa, 6)\}.$$

Em uma amostra de solo, a proporção de Sb, As e Nb

$$\Omega = \{(\omega_1, \omega_2, \omega_3); \omega_1 \in [0, 1], \omega_2 \in [0, 1], \omega_3 \in [0, 1], \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 1\}.$$



Experimento

Lançamento de um dado e uma moeda

$$\Omega = \{(cara, 1), (cara, 2), \dots, (cara, 6), (coroa, 1), \dots, (coroa, 6)\}.$$

Em uma amostra de solo, a proporção de S_b , A_s e N_b

$$\Omega = \{(\omega_1, \omega_2, \omega_3); \omega_1 \in [0, 1], \omega_2 \in [0, 1], \omega_3 \in [0, 1], \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 1\}.$$



Experimento

Em um determinado dia, o tempo de duração e a quantidade de chuva

$\Omega = \{(\omega_1, \omega_2); \omega_1 \in \mathbb{R}_+, \omega_2 \in \mathbb{R}_+\}$ ou, equivalentemente, $\Omega = \mathbb{R}_+^2$.



Experimento

Em um determinado dia, o tempo de duração e a quantidade de chuva $\Omega = \{(\omega_1, \omega_2); \omega_1 \in \mathbb{R}_+, \omega_2 \in \mathbb{R}_+\}$ ou, equivalentemente, $\Omega = \mathbb{R}_+^2$.



Evento

Evento (E)

É um subconjunto do espaço amostral.



Evento

Evento (E)

É um subconjunto do espaço amostral.

Lançamento de um dado e uma moeda

E: face cara na moeda e um número par no dado.

Evento

Lançamento de um dado e uma moeda

E : face cara na moeda e um número par no dado.

Em uma amostra de solo, a proporção de Sb, As e Nb



Evento

Lançamento de um dado e uma moeda

E: face cara na moeda e um número par no dado.

Em uma amostra de solo, a proporção de Sb, As e Nb

E: arsênio ser a metade da composição do solo.

Evento

Lançamento de um dado e uma moeda

E: face cara na moeda e um número par no dado.

Em uma amostra de solo, a proporção de Sb, As e Nb

E: arsênio ser a metade da composição do solo.

Em um determinado dia, o tempo de duração e a quantidade de chuva E : a chuva durar mais que uma hora e chover mais 50ml.

Em um determinado dia, o tempo de duração e a quantidade de chuva E : a chuva durar mais que uma hora e chover mais 50ml.

Eventos mutuamente exclusivos

Dois eventos A e B são ditos mutuamente exclusivos (ME),

Evento

Eventos mutuamente exclusivos

Dois eventos A e B são ditos mutuamente exclusivos (ME), quando a interseção entre eles é igual ao conjunto vazio ($A \cap B = \emptyset$).



Evento

Eventos mutuamente exclusivos

Dois eventos A e B são ditos mutuamente exclusivos (ME), quando a interseção entre eles é igual ao conjunto vazio ($A \cap B = \emptyset$). Isto é, não há nada em comum entre A e B .



Evento

Eventos mutuamente exclusivos

Dois eventos A e B são ditos mutuamente exclusivos (ME), quando a interseção entre eles é igual ao conjunto vazio ($A \cap B = \emptyset$). Isto é, não há nada em comum entre A e B .



Evento

Eventos especiais

Existem dois eventos que se destacam entre todos os eventos possíveis de um experimento, são eles:



Evento

Eventos especiais

Existem dois eventos que se destacam entre todos os eventos possíveis de um experimento, são eles:

- O evento impossível: \emptyset .

Evento

Eventos especiais

Existem dois eventos que se destacam entre todos os eventos possíveis de um experimento, são eles:

- O evento impossível: \emptyset .
- O evento certo: Ω .

Evento

Eventos especiais

Existem dois eventos que se destacam entre todos os eventos possíveis de um experimento, são eles:

- O evento impossível: \emptyset .
- O evento certo: Ω .

σ -álgebra

Um subconjunto de Ω , representada por \mathcal{F} , é denominada uma σ -álgebra se satisfaz as seguinte propriedades:

① $\Omega \in \mathcal{F}$;



σ -álgebra

Um subconjunto de Ω , representada por \mathcal{F} , é denominada uma σ -álgebra se satisfaz as seguintes propriedades:

- ① $\Omega \in \mathcal{F}$;
- ② Se $E \in \mathcal{F}$, então $E^c \in \mathcal{F}$;



σ -álgebra

Um subconjunto de Ω , representada por \mathcal{F} , é denominada uma σ -álgebra se satisfaz as seguintes propriedades:

- 1 $\Omega \in \mathcal{F}$;
- 2 Se $E \in \mathcal{F}$, então $E^c \in \mathcal{F}$;
- 3 Se $E_i \in \mathcal{F}$, $i \geq 1$, então $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathcal{F}$.



σ -álgebra

Um subconjunto de Ω , representada por \mathcal{F} , é denominada uma σ -álgebra se satisfaz as seguintes propriedades:

- ① $\Omega \in \mathcal{F}$;
- ② Se $E \in \mathcal{F}$, então $E^c \in \mathcal{F}$;
- ③ Se $E_i \in \mathcal{F}$, $i \geq 1$, então $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathcal{F}$.



Roteiro

- 1 Motivação
- 2 Experimento
- 3 Probabilidade
- 4 Referências bibliográficas



Probabilidade

Motivação

A Probabilidade é uma quantificação da incerteza.



Probabilidade

Motivação

A Probabilidade é uma quantificação da incerteza. Ela é um peso dado para cada possível resultado de um experimento.



Probabilidade

Motivação

A Probabilidade é uma quantificação da incerteza. Ela é um peso dado para cada possível resultado de um experimento.



Axiomas da Probabilidade

Uma função \mathbb{P} , definida na σ -álgebra \mathcal{F} de subconjuntos de Ω e com valores em $[0, 1]$, é uma probabilidade se satisfaz os Axiomas de Kolmogorov (1933):

① $\mathbb{P}(\Omega) = 1;$



Axiomas da Probabilidade

Uma função \mathbb{P} , definida na σ -álgebra \mathcal{F} de subconjuntos de Ω e com valores em $[0, 1]$, é uma probabilidade se satisfaz os Axiomas de Kolmogorov (1933):

- ① $\mathbb{P}(\Omega) = 1$;
- ② Para todo subconjunto $E \in \mathcal{F}$, $0 \leq \mathbb{P}(E) \leq 1$;



Axiomas da Probabilidade

Uma função \mathbb{P} , definida na σ -álgebra \mathcal{F} de subconjuntos de Ω e com valores em $[0, 1]$, é uma probabilidade se satisfaz os Axiomas de Kolmogorov (1933):

- ① $\mathbb{P}(\Omega) = 1$;
- ② Para todo subconjunto $E \in \mathcal{F}$, $0 \leq \mathbb{P}(E) \leq 1$;
- ③ Para toda sequência $E_1, E_2, \dots \in \mathcal{F}$, **ME**,



Axiomas da Probabilidade

Uma função \mathbb{P} , definida na σ -álgebra \mathcal{F} de subconjuntos de Ω e com valores em $[0, 1]$, é uma probabilidade se satisfaz os Axiomas de Kolmogorov (1933):

- 1 $\mathbb{P}(\Omega) = 1$;
- 2 Para todo subconjunto $E \in \mathcal{F}$, $0 \leq \mathbb{P}(E) \leq 1$;
- 3 Para toda sequência $E_1, E_2, \dots \in \mathcal{F}$, **ME**, nós temos que:

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(E_i).$$



Axiomas da Probabilidade

Uma função \mathbb{P} , definida na σ -álgebra \mathcal{F} de subconjuntos de Ω e com valores em $[0, 1]$, é uma probabilidade se satisfaz os Axiomas de Kolmogorov (1933):

- ① $\mathbb{P}(\Omega) = 1$;
- ② Para todo subconjunto $E \in \mathcal{F}$, $0 \leq \mathbb{P}(E) \leq 1$;
- ③ Para toda sequência $E_1, E_2, \dots \in \mathcal{F}$, **ME**, nós temos que:

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(E_i).$$



Probabilidade

A trinca $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ é denominada espaço de probabilidade. Os subconjuntos que estão em \mathcal{F} são denominados eventos



Probabilidade

A trinca $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ é denominada espaço de probabilidade. Os subconjuntos que estão em \mathcal{F} são denominados eventos e é somente a eles que atribui probabilidade.



Probabilidade

A trinca $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ é denominada espaço de probabilidade. Os subconjuntos que estão em \mathcal{F} são denominados eventos e é somente a eles que atribui probabilidade.



Teoremas da Probabilidade

Sejam E_1, E_2, \dots eventos quaisquer, pertencentes ao mesmo espaço de probabilidade.



Teoremas da Probabilidade

Sejam E_1, E_2, \dots eventos quaisquer, pertencentes ao mesmo espaço de probabilidade. A partir dos Axiomas, nós temos as seguintes propriedades:



Teoremas da Probabilidade

Sejam E_1, E_2, \dots eventos quaisquer, pertencentes ao mesmo espaço de probabilidade. A partir dos Axiomas, nós temos as seguintes propriedades:

① $\mathbb{P}(E^c) = 1 - \mathbb{P}(E)$;



Teoremas da Probabilidade

Sejam E_1, E_2, \dots eventos quaisquer, pertencentes ao mesmo espaço de probabilidade. A partir dos Axiomas, nós temos as seguintes propriedades:

① $\mathbb{P}(E^c) = 1 - \mathbb{P}(E)$;

② $\mathbb{P}(E_i) = \mathbb{P}(E_i \cap E_j) + \mathbb{P}(E_i \cap E_j^c)$;



Teoremas da Probabilidade

Sejam E_1, E_2, \dots eventos quaisquer, pertencentes ao mesmo espaço de probabilidade. A partir dos Axiomas, nós temos as seguintes propriedades:

① $\mathbb{P}(E^c) = 1 - \mathbb{P}(E)$;

② $\mathbb{P}(E_i) = \mathbb{P}(E_i \cap E_j) + \mathbb{P}(E_i \cap E_j^c)$;

③ $\mathbb{P}(E_i \cup E_j) = \mathbb{P}(E_i) + \mathbb{P}(E_j) - \mathbb{P}(E_i \cap E_j)$;



Teoremas da Probabilidade

Sejam E_1, E_2, \dots eventos quaisquer, pertencentes ao mesmo espaço de probabilidade. A partir dos Axiomas, nós temos as seguintes propriedades:

- ① $\mathbb{P}(E^c) = 1 - \mathbb{P}(E)$;
- ② $\mathbb{P}(E_i) = \mathbb{P}(E_i \cap E_j) + \mathbb{P}(E_i \cap E_j^c)$;
- ③ $\mathbb{P}(E_i \cup E_j) = \mathbb{P}(E_i) + \mathbb{P}(E_j) - \mathbb{P}(E_i \cap E_j)$;
- ④ Se $E_i \subset E_j$, então $\mathbb{P}(E_i) \leq \mathbb{P}(E_j)$;



Teoremas da Probabilidade

Sejam E_1, E_2, \dots eventos quaisquer, pertencentes ao mesmo espaço de probabilidade. A partir dos Axiomas, nós temos as seguintes propriedades:

- ① $\mathbb{P}(E^c) = 1 - \mathbb{P}(E)$;
- ② $\mathbb{P}(E_i) = \mathbb{P}(E_i \cap E_j) + \mathbb{P}(E_i \cap E_j^c)$;
- ③ $\mathbb{P}(E_i \cup E_j) = \mathbb{P}(E_i) + \mathbb{P}(E_j) - \mathbb{P}(E_i \cap E_j)$;
- ④ Se $E_i \subset E_j$, então $\mathbb{P}(E_i) \leq \mathbb{P}(E_j)$;
- ⑤ Para uma sequência de eventos,



Teoremas da Probabilidade

Sejam E_1, E_2, \dots eventos quaisquer, pertencentes ao mesmo espaço de probabilidade. A partir dos Axiomas, nós temos as seguintes propriedades:

- 1 $\mathbb{P}(E^c) = 1 - \mathbb{P}(E)$;
- 2 $\mathbb{P}(E_i) = \mathbb{P}(E_i \cap E_j) + \mathbb{P}(E_i \cap E_j^c)$;
- 3 $\mathbb{P}(E_i \cup E_j) = \mathbb{P}(E_i) + \mathbb{P}(E_j) - \mathbb{P}(E_i \cap E_j)$;
- 4 Se $E_i \subset E_j$, então $\mathbb{P}(E_i) \leq \mathbb{P}(E_j)$;
- 5 Para uma sequência de eventos,

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(E_i).$$



Teoremas da Probabilidade

Sejam E_1, E_2, \dots eventos quaisquer, pertencentes ao mesmo espaço de probabilidade. A partir dos Axiomas, nós temos as seguintes propriedades:

- ① $\mathbb{P}(E^c) = 1 - \mathbb{P}(E)$;
- ② $\mathbb{P}(E_i) = \mathbb{P}(E_i \cap E_j) + \mathbb{P}(E_i \cap E_j^c)$;
- ③ $\mathbb{P}(E_i \cup E_j) = \mathbb{P}(E_i) + \mathbb{P}(E_j) - \mathbb{P}(E_i \cap E_j)$;
- ④ Se $E_i \subset E_j$, então $\mathbb{P}(E_i) \leq \mathbb{P}(E_j)$;
- ⑤ Para uma sequência de eventos,

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(E_i).$$



Observação

Ainda que o interesse seja em observar mais do que uma situação a partir de um experimento, a definição de probabilidade não se altera.

Probabilidade

Observação

Ainda que o interesse seja em observar mais do que uma situação a partir de um experimento, a definição de probabilidade não se altera. Logo, conceitos como Probabilidade Condicional, Teorema de Bayes e Independência continuam válidos.



Observação

Ainda que o interesse seja em observar mais do que uma situação a partir de um experimento, a definição de probabilidade não se altera. Logo, conceitos como Probabilidade Condicional, Teorema de Bayes e Independência continuam válidos.

Roteiro

- 1 Motivação
- 2 Experimento
- 3 Probabilidade
- 4 Referências bibliográficas



Referências

Kolmogorov, A. N. (1933), *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Springer, Berlin.



Obrigado!

✉ tiago.magalhaes@ufjf.br

📄 ufjf.br/tiago_magalhaes

🌐 Departamento de Estatística, Sala 319

