Estatísticas de ordem

Tiago M. Magalhães

Departamento de Estatística - ICE-UFJF

Juiz de Fora, 04 de outubro de 2024

Roteiro

Roteiro

1. Estatísticas de ordem

2. Distribuição das estatísticas de ordem

3. Distribuição da amplitude

4. Bibliografia

Estatísticas de ordem

Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ VA IID, com distribuição $\mathcal{D}$, função densidade de probabilidade (FDP) f e função de distribuição acumulada (FDA) F. Definam:

$$
\begin{aligned}
X_{(1)} &= \text{o menor valor entre } X_1, X_2, \ldots, X_n;\\
X_{(2)} &= \text{o segundo menor valor entre } X_1, X_2, \ldots, X_n;\\
&\vdots\\
X_{(j)} &= \text{o } j\text{-ésimo menor valor entre } X_1, X_2, \ldots, X_n;\\
&\vdots\\
X_{(n)} &= \text{o maior valor entre } X_1, X_2, \ldots, X_n.
\end{aligned}
$$

Estatísticas de ordem

Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ VA IID, com distribuição $\mathcal{D}$, função densidade de probabilidade (FDP) f e função de distribuição acumulada (FDA) F. Definam:

$$\begin{aligned}
X_{(1)} &= \text{o menor valor entre } X_1, X_2, \ldots, X_n; \\
X_{(2)} &= \text{o segundo menor valor entre } X_1, X_2, \ldots, X_n; \\
&\vdots \\
X_{(j)} &= \text{o } j\text{-ésimo menor valor entre } X_1, X_2, \ldots, X_n; \\
&\vdots \\
X_{(n)} &= \text{o maior valor entre } X_1, X_2, \ldots, X_n.
\end{aligned}$$

Estatísticas de ordem

Os valores ordenados $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \cdots \leq X_{(n)}$ são denominados de **estatísticas de ordem** correspondentes as VA $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Em outras palavras, $X_{(1)}, X_{(2)}, \ldots, X_{(n)}$ são os valores ordenados de $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Estatísticas de ordem

Os valores ordenados $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \cdots \leq X_{(n)}$ são denominados de **estatísticas de ordem** correspondentes as VA $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Em outras palavras, $X_{(1)}, X_{(2)}, \ldots, X_{(n)}$ são os valores ordenados de $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Estatísticas de ordem

Observação

Os valores extremos $X_{(1)}$ e $X_{(n)}$ são frenquentemente os mais interessantes.

Estatísticas de ordem

Observação

Os valores extremos $X_{(1)}$ e $X_{(n)}$ são frenquentemente os mais interessantes.

Pois, eles são, respectivamente, o **mínimo** e o **máximo**, isto é, $X_{(1)} = \min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ e $X_{(n)} = \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$.

Estatísticas de ordem

Observação

Os valores extremos $X_{(1)}$ e $X_{(n)}$ são frenquentemente os mais interessantes.

Pois, eles são, respectivamente, o **mínimo** e o **máximo**, isto é, $X_{(1)} = \min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ e $X_{(n)} = \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$.

Exemplos

Exemplo 1. Se $X_1, \ldots, X_5$ são VA IID a uma exponencial com parâmetro λ, calcule:

(a) $\mathbb{P}\left(\min\{X_1, \ldots, X_5\} \leq a\right)$;

(b) $\mathbb{P}\left(\max\{X_1, \ldots, X_5\} \leq a\right)$.

Exemplos

Exemplo 1. Se $X_1, \ldots, X_5$ são VA IID a uma exponencial com parâmetro λ, calcule:

(a) $\mathbb{P}\left(\min\left\{X_1, \ldots, X_5\right\} \leq a\right)$;

(b) $\mathbb{P}\left(\max\left\{X_1, \ldots, X_5\right\} \leq a\right)$.

Lembrando que, se $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$, então

$$F_X(x) = 1 - \exp\left\{-\lambda x\right\}, \; S_X(x) = 1 - F_X(x) = \exp\left\{-\lambda x\right\}. \qquad (1)$$

Exemplos

Exemplo 1. Se $X_1, \ldots, X_5$ são VA IID a uma exponencial com parâmetro λ, calcule:

(a) $\mathbb{P}\left(\min\left\{X_1, \ldots, X_5\right\} \leq a\right)$;

(b) $\mathbb{P}\left(\max\left\{X_1, \ldots, X_5\right\} \leq a\right)$.

Lembrando que, se $X \sim \text{Exp}(\lambda)$, então

$$F_X(x) = 1 - \exp\left\{-\lambda x\right\}, \; S_X(x) = 1 - F_X(x) = \exp\left\{-\lambda x\right\}. \tag{1}$$

Exemplos

Para o Item (a), nós temos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\min\{X_1,\ldots,X_5\} \leq a\right) &= 1 - \mathbb{P}\left(\min\{X_1,\ldots,X_5\} > a\right) \\
&= 1 - \mathbb{P}\left(X_1 > a, \ldots, X_5 > a\right) \\
&\overset{\text{Ind.}}{=} 1 - \left[\mathbb{P}\left(X_1 > a\right) \times \cdots \times \mathbb{P}\left(X_5 > a\right)\right] \\
&\overset{\text{I.D.}}{=} 1 - \left[\mathbb{P}\left(X_1 > a\right)\right]^5 = 1 - \left[S_{X_1}(a)\right]^5 \\
&\overset{(1)}{=} 1 - \left[\exp\{-\lambda a\}\right]^5 = 1 - \exp\{-5\lambda a\}.
\end{aligned}$$

Exemplos

Para o Item (a), nós temos que

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\min\{X_1,\ldots,X_5\} \leq a\right) &= 1 - \mathbb{P}\left(\min\{X_1,\ldots,X_5\} > a\right) \\
&= 1 - \mathbb{P}\left(X_1 > a,\ldots,X_5 > a\right) \\
&\overset{\text{Ind.}}{=} 1 - \left[\mathbb{P}\left(X_1 > a\right) \times \cdots \times \mathbb{P}\left(X_5 > a\right)\right] \\
&\overset{\text{I.D.}}{=} 1 - \left[\mathbb{P}\left(X_1 > a\right)\right]^5 = 1 - \left[S_{X_1}(a)\right]^5 \\
&\overset{(1)}{=} 1 - \left[\exp\{-\lambda a\}\right]^5 = 1 - \exp\{-5\lambda a\}.
\end{aligned}
$$

Observem que, $\min\{X_1,\ldots,X_5\} \sim \mathrm{Exp}(5\lambda)$.

Exemplos

Para o Item (a), nós temos que

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\min\left\{X_1,\ldots,X_5\right\} \leq a\right) &= 1 - \mathbb{P}\left(\min\left\{X_1,\ldots,X_5\right\} > a\right) \\
&= 1 - \mathbb{P}\left(X_1 > a,\ldots,X_5 > a\right) \\
&\overset{\text{Ind.}}{=} 1 - \left[\mathbb{P}\left(X_1 > a\right) \times \cdots \times \mathbb{P}\left(X_5 > a\right)\right] \\
&\overset{\text{I.D.}}{=} 1 - \left[\mathbb{P}\left(X_1 > a\right)\right]^5 = 1 - \left[S_{X_1}(a)\right]^5 \\
&\overset{(1)}{=} 1 - \left[\exp\left\{-\lambda a\right\}\right]^5 = 1 - \exp\left\{-5\lambda a\right\}.
\end{aligned}
$$

Observem que, $\min\left\{X_1,\ldots,X_5\right\} \sim \mathrm{Exp}(5\lambda)$.

Exemplos

Para o Item (b), nós temos que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\max\left\{X_1,\ldots,X_5\right\} \leq a\right) &= \mathbb{P}\left(X_1 \leq a,\ldots,X_5 \leq a\right)\\ &\overset{\text{Ind.}}{=} \mathbb{P}\left(X_1 \leq a\right) \times \cdots \times \mathbb{P}\left(X_5 \leq a\right)\\ &\overset{\text{I.D.}}{=} \left[\mathbb{P}\left(X_1 \leq a\right)\right]^5 = \left[F_{X_1}(a)\right]^5\\ &\overset{(1)}{=} \left[1 - \exp\left\{-\lambda a\right\}\right]^5.\end{aligned}$$

Exemplos

Para o Item (b), nós temos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\max\left\{X_1, \ldots, X_5\right\} \leq a\right) &= \mathbb{P}\left(X_1 \leq a, \ldots, X_5 \leq a\right) \\
&\overset{\text{Ind.}}{=} \mathbb{P}\left(X_1 \leq a\right) \times \cdots \times \mathbb{P}\left(X_5 \leq a\right) \\
&\overset{\text{I.D.}}{=} \left[\mathbb{P}\left(X_1 \leq a\right)\right]^5 = \left[F_{X_1}(a)\right]^5 \\
&\overset{(1)}{=} \left[1 - \exp\left\{-\lambda a\right\}\right]^5 .
\end{aligned}$$

Roteiro

A FDP conjunta de $X_{(1)}, X_{(2)}, \ldots, X_{(n)}$ é dada por

$$f_{X_{(1)},\ldots,X_{(n)}}(x_1, \ldots, x_n) = n! \times f_{X_1}(x_1) \times \cdots \times f_{X_n}(x_n)\, \mathbb{I}_{\mathbb{R}}(x_1 < \cdots < x_n).$$

Estatísticas de ordem

A FDP conjunta de $X_{(1)}, X_{(2)}, \ldots, X_{(n)}$ é dada por

$$f_{X_{(1)},\ldots,X_{(n)}}(x_1, \ldots, x_n) = n! \times f_{X_1}(x_1) \times \cdots \times f_{X_n}(x_n)\, \mathbb{I}_{\mathbb{R}}(x_1 < \cdots < x_n).$$

Estatísticas de ordem

E a FDP marginal da j-ésima estatística de ordem $X_{(j)}$ é dada por

$$f_{X_{(j)}}(x) = \frac{n!}{(n-j)!(j-1)!} [F(x)]^{j-1} [1 - F(x)]^{n-j} f(x). \quad (2)$$

Estatísticas de ordem

E a FDP marginal da j-ésima estatística de ordem $X_{(j)}$ é dada por

$$f_{X_{(j)}}(x) = \frac{n!}{(n-j)!(j-1)!}\left[F(x)\right]^{j-1}\left[1-F(x)\right]^{n-j} f(x). \qquad (2)$$

Estatísticas de ordem

Para $X_{(1)} = \min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ e $X_{(n)} = \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ a FDP em (2) pode escrita ser, respectivamente, da seguinte forma:

Estatísticas de ordem

Para $X_{(1)} = \min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ e $X_{(n)} = \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ a FDP em (2) pode escrita ser, respectivamente, da seguinte forma:

$$f_{X_{(1)}}(x) = n\left[1 - F(x)\right]^{n-1} f(x), \quad f_{X_{(n)}}(x) = n\left[F(x)\right]^{n-1} f(x).$$

Estatísticas de ordem

Para $X_{(1)} = \min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ e $X_{(n)} = \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ a FDP em (2) pode escrita ser, respectivamente, da seguinte forma:

$$f_{X_{(1)}}(x) = n\,[1 - F(x)]^{n-1}\, f(x), \quad f_{X_{(n)}}(x) = n\,[F(x)]^{n-1}\, f(x).$$

Exemplos

Exemplo 2. Nós dizemos que uma VA possui uma distribuição *exponencial truncada* de parâmetros $\lambda > 0$ e $\theta > 0$,

Exemplos

Exemplo 2. Nós dizemos que uma VA possui uma distribuição *exponencial truncada* de parâmetros $\lambda > 0$ e $\theta > 0$, $X \sim \text{ET}(\lambda, \theta)$,

Exemplos

Exemplo 2. Nós dizemos que uma VA possui uma distribuição *exponencial truncada* de parâmetros $\lambda > 0$ e $\theta > 0$, $X \sim \text{ET}(\lambda, \theta)$, se sua FDP é da forma

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda(x-\theta)} \, \mathbb{I}_{(\theta,\infty)}(x).$$

Exemplos

Exemplo 2. Nós dizemos que uma VA possui uma distribuição *exponencial truncada* de parâmetros $\lambda > 0$ e $\theta > 0$, $X \sim \text{ET}(\lambda, \theta)$, se sua FDP é da forma

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda(x-\theta)}\, \mathbb{I}_{(\theta,\infty)}(x).$$

Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de $X \sim \text{ET}(1, \theta)$.

Exemplos

Exemplo 2. Nós dizemos que uma VA possui uma distribuição *exponencial truncada* de parâmetros $\lambda > 0$ e $\theta > 0$, $X \sim \mathrm{ET}(\lambda, \theta)$, se sua FDP é da forma

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda(x-\theta)}\, \mathbb{I}_{(\theta,\infty)}(x).$$

Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de $X \sim \mathrm{ET}(1, \theta)$. Encontre a FDP de $Y = \min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$.

Exemplos

Exemplo 2. Nós dizemos que uma VA possui uma distribuição *exponencial truncada* de parâmetros $\lambda > 0$ e $\theta > 0$, $X \sim \text{ET}(\lambda, \theta)$, se sua FDP é da forma

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda(x-\theta)} \, \mathbb{I}_{(\theta,\infty)}(x).$$

Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de $X \sim \text{ET}(1, \theta)$. Encontre a FDP de $Y = \min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$.

Exemplos

Primeiramente, é importante saber que, se $X \sim \text{ET}(\lambda, \theta)$, então

Exemplos

Primeiramente, é importante saber que, se $X \sim \text{ET}(\lambda, \theta)$, então

$$F_X(x) = 1 - \exp\{-\lambda(x - \theta)\}, \ \mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda} + \theta, \ \text{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}. \tag{3}$$

Exemplos

Primeiramente, é importante saber que, se $X \sim \text{ET}(\lambda, \theta)$, então

$$F_X(x) = 1 - \exp\{-\lambda(x - \theta)\}, \ \mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda} + \theta, \ \text{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}. \tag{3}$$

Note quem, $X = Z + \theta$, em que $Z \sim \text{exponencial}(\lambda)$.

Exemplos

Primeiramente, é importante saber que, se $X \sim \text{ET}(\lambda, \theta)$, então

$$F_X(x) = 1 - \exp\left\{-\lambda(x-\theta)\right\}, \ \mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda} + \theta, \ \text{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}. \qquad (3)$$

Note quem, $X = Z + \theta$, em que $Z \sim \text{exponencial}(\lambda)$.

Exemplos

Para encontrar a distribuição de Y, nós podemos utilizar a técnica da FDA, da seguinte forma

$$
\begin{aligned}
G(y) &= \mathbb{P}\left(Y \leq y\right) = \mathbb{P}\left(\min\left\{X_1, \ldots, X_n\right\} \leq y\right) \\
&= 1 - \mathbb{P}\left(\min\left\{X_1, \ldots, X_n\right\} > y\right) = 1 - \mathbb{P}\left(X_1 > y, \ldots, X_n > y\right) \\
&\overset{\text{Ind.}}{=} 1 - \left[\mathbb{P}\left(X_1 > y\right) \times \cdots \times \mathbb{P}\left(X_n > y\right)\right] \\
&\overset{\text{I.D.}}{=} 1 - \left[\mathbb{P}\left(X_1 > y\right)\right]^n = 1 - \left[1 - \mathbb{P}\left(X_1 \leq y\right)\right]^n \\
&= 1 - \left[1 - F_{X_1}(y)\right]^n \overset{(3)}{=} 1 - \left[\exp\left\{-(y-\theta)\right\}\right]^n \\
&= 1 - \exp\left\{-n(y-\theta)\right\}.
\end{aligned}
$$

Exemplos

Para encontrar a distribuição de Y, nós podemos utilizar a técnica da FDA, da seguinte forma

$$\begin{aligned}
G(y) &= \mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}(\min\{X_1, \ldots, X_n\} \leq y) \\
&= 1 - \mathbb{P}(\min\{X_1, \ldots, X_n\} > y) = 1 - \mathbb{P}(X_1 > y, \ldots, X_n > y) \\
&\overset{\text{Ind.}}{=} 1 - [\mathbb{P}(X_1 > y) \times \cdots \times \mathbb{P}(X_n > y)] \\
&\overset{\text{I.D.}}{=} 1 - [\mathbb{P}(X_1 > y)]^n = 1 - [1 - \mathbb{P}(X_1 \leq y)]^n \\
&= 1 - [1 - F_{X_1}(y)]^n \overset{(3)}{=} 1 - [\exp\{-(y - \theta)\}]^n \\
&= 1 - \exp\{-n(y - \theta)\}.
\end{aligned}$$

Logo, $Y \sim \mathrm{ET}(n, \theta)$.

Exemplos

Para encontrar a distribuição de Y, nós podemos utilizar a técnica da FDA, da seguinte forma

$$
\begin{aligned}
G(y) = \mathbb{P}\left(Y \leq y\right) &= \mathbb{P}\left(\min\left\{X_1, \ldots, X_n\right\} \leq y\right) \\
&= 1 - \mathbb{P}\left(\min\left\{X_1, \ldots, X_n\right\} > y\right) = 1 - \mathbb{P}\left(X_1 > y, \ldots, X_n > y\right) \\
&\overset{\text{Ind.}}{=} 1 - \left[\mathbb{P}\left(X_1 > y\right) \times \cdots \times \mathbb{P}\left(X_n > y\right)\right] \\
&\overset{\text{I.D.}}{=} 1 - \left[\mathbb{P}\left(X_1 > y\right)\right]^n = 1 - \left[1 - \mathbb{P}\left(X_1 \leq y\right)\right]^n \\
&= 1 - \left[1 - F_{X_1}(y)\right]^n \overset{(3)}{=} 1 - \left[\exp\left\{-(y-\theta)\right\}\right]^n \\
&= 1 - \exp\left\{-n(y-\theta)\right\}.
\end{aligned}
$$

Logo, $Y \sim \mathrm{ET}(n, \theta)$.

Roteiro

Amplitude

Novamente, sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ VA IID, com distribuição $\mathcal{D}$, FDP f e FDA F. A VA

$$R = X_{(n)} - X_{(1)}$$

Amplitude

Novamente, sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ VA IID, com distribuição $\mathcal{D}$, FDP f e FDA F. A VA

$$R = X_{(n)} - X_{(1)}$$

é denominada de **amplitude** das VA observadas.

Amplitude

Novamente, sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ VA IID, com distribuição $\mathcal{D}$, FDP f e FDA F. A VA

$$R = X_{(n)} - X_{(1)}$$

é denominada de **amplitude** das VA observadas.

Amplitude

De maneira geral, a distribuição de R pode ser obtida a partir da definição da FDA, da seguinte forma:

$$G(a) = \mathbb{P}(R \leq a) = n \int_{-\infty}^{+\infty} [F(x+a) - F(x)]^{n-1} f(x)\, dx. \qquad (4)$$

Amplitude

De maneira geral, a distribuição de R pode ser obtida a partir da definição da FDA, da seguinte forma:

$$G(a) = \mathbb{P}(R \leq a) = n \int_{-\infty}^{+\infty} [F(x+a) - F(x)]^{n-1} f(x)\, dx. \tag{4}$$

A expressão (4) tem forma explícita para poucos casos.

Amplitude

De maneira geral, a distribuição de R pode ser obtida a partir da definição da FDA, da seguinte forma:

$$G(a) = \mathbb{P}(R \leq a) = n \int_{-\infty}^{+\infty} \left[F(x + a) - F(x)\right]^{n-1} f(x)\, dx. \qquad (4)$$

A expressão (4) tem forma explícita para poucos casos.

Amplitude

Observação

A amplitude é bastante utilizada no Controle Estatístico de Qualidade.

Amplitude

Observação

A amplitude é bastante utilizada no Controle Estatístico de Qualidade.

Exemplos

Exemplo 3. Se $X_1, X_2, \ldots, X_n$ são VA IID uniformes no intervalo (0,1), encontre a distribuição de:

$$R = X_{(n)} - X_{(1)}.$$

Exemplo 3. Se $X_1, X_2, \ldots, X_n$ são VA IID uniformes no intervalo (0,1), encontre a distribuição de:

$$R = X_{(n)} - X_{(1)}.$$

Amplitude

De (4), para $0 < a < 1$, nós temos que:

$$
\begin{aligned}
G(a) &= n \int_0^1 [F(x+a) - F(x)]^{n-1} f(x)\, dx \\
&\overset{*}{=} n \int_0^{1-a} [F(x+a) - F(x)]^{n-1}\ dx + n \int_{1-a}^1 [F(x+a) - F(x)]^{n-1}\ dx \\
&= n \int_0^{1-a} [(x+a) - x]^{n-1}\ dx + n \int_{1-a}^1 [1 - x]^{n-1}\ dx \\
&= n(1-a)^{n-1} a^{n-1} + a^n.
\end{aligned}
$$

$*$: Lembrando que, $0 < x + a < 1 \Rightarrow x < 1 - a$.

Amplitude

De (4), para $0 < a < 1$, nós temos que:

$$\begin{aligned} G(a) &= n\int_0^1 [F(x+a) - F(x)]^{n-1} f(x)\,dx \\ &\overset{*}{=} n\int_0^{1-a} [F(x+a) - F(x)]^{n-1}\ dx + n\int_{1-a}^1 [F(x+a) - F(x)]^{n-1}\ dx \\ &= n\int_0^{1-a} [(x+a) - x]^{n-1}\ dx + n\int_{1-a}^1 [1-x]^{n-1}\ dx \\ &= n(1-a)^{n-1}a^{n-1} + a^n. \end{aligned}$$

$*$: Lembrando que, $0 < x + a < 1 \Rightarrow x < 1 - a$.

Amplitude

A FDP de R é obtida derivando $G(a)$, assim:

$$\begin{aligned} g(a) &= \frac{d}{da}G(a) = n(n-1)a^{n-2}(1-a)\,\mathbb{I}_{(0,1)}(a) \\ &= \frac{1}{B(n-1,2)}\,a^{n-2}(1-a)\,\mathbb{I}_{(0,1)}(a). \end{aligned}$$

Amplitude

A FDP de R é obtida derivando $G(a)$, assim:

$$\begin{aligned} g(a) &= \frac{d}{da}G(a) = n(n-1)a^{n-2}(1-a)\,\mathbb{I}_{(0,1)}(a) \\ &= \frac{1}{B(n-1,2)}\,a^{n-2}(1-a)\,\mathbb{I}_{(0,1)}(a). \end{aligned}$$

Logo, $R = X_{(n)} - X_{(1)} \sim$ beta de parâmetros $n-1$ e 2.

Amplitude

A FDP de R é obtida derivando $G(a)$, assim:

$$\begin{aligned} g(a) = \frac{d}{da} G(a) &= n(n-1)a^{n-2}(1-a)\, \mathbb{I}_{(0,1)}(a) \\ &= \frac{1}{B(n-1,2)}\, a^{n-2}(1-a)\, \mathbb{I}_{(0,1)}(a). \end{aligned}$$

Logo, $R = X_{(n)} - X_{(1)} \sim$ beta de parâmetros $n-1$ e 2.

Roteiro

Bibliografia

Meyer, P. L. (2017), *Probabilidade: aplicações à Estatística*, 2 edn, Livros Técnicos e Científicos Editora Ltda, Rio de Janeiro.

Ross, S. (2010), *Probabilidade: um curso moderno com aplicações*, 8 edn, Bookman, Porto Alegre.

Ross, S. (2019), *A first course in probability*, 10 edn. global edn, Pearson Education, Malaysia.

Obrigado!

✉ tiago.magalhaes@ufjf.br

ufjf.br/tiago_magalhaes

Departamento de Estatística, Sala 319