Método jacobiano

Tiago M. Magalhães

Departamento de Estatística - ICE-UFJF

Juiz de Fora, 01 de outubro de 2024

Roteiro

Roteiro

Introdução

Ao definir uma variável aleatória (VA) X, nós salientamos que X é uma função definida a partir do espaço amostral Ω para números reais.

Introdução

Ao definir uma VA bidimensional $(X, Y)^\top$, nós estaremos interessados em um par de funções,

$$X = X(\omega), Y = Y(\omega),$$

cada uma das quais é definida no espaço amostral de algum experimento e associa um número real a todo $\omega \in \Omega$,

Introdução

Ao definir uma VA bidimensional $(X, Y)^\top$, nós estaremos interessados em um par de funções,

$$X = X(\omega), Y = Y(\omega),$$

cada uma das quais é definida no espaço amostral de algum experimento e associa um número real a todo $\omega \in \Omega$, desse modo fornecendo o vetor bidimensional $[X(\omega), Y(\omega)]^\top$.

Introdução

Ao definir uma VA bidimensional $(X, Y)^\top$, nós estaremos interessados em um par de funções,

$$X = X(\omega), Y = Y(\omega),$$

cada uma das quais é definida no espaço amostral de algum experimento e associa um número real a todo $\omega \in \Omega$, desse modo fornecendo o vetor bidimensional $[X(\omega), Y(\omega)]^\top$.

Introdução

Nós vamos considerar $Z = H_1(X, Y)$, uma função de X e Y. $Z = Z(\omega)$ é também uma VA. Consideremos a sequência de etapas:

Introdução

Nós vamos considerar $Z = H_1(X, Y)$, uma função de X e Y. $Z = Z(\omega)$ é também uma VA. Consideremos a sequência de etapas:

1. Executar o experimento ε e obter o resultado ω.

Introdução

Nós vamos considerar $Z = H_1(X, Y)$, uma função de X e Y. $Z = Z(\omega)$ é também uma VA. Consideremos a sequência de etapas:

1. Executar o experimento ε e obter o resultado ω.
2. Calcular os números $X(\omega)$ e $Y(\omega)$.

Introdução

Nós vamos considerar $Z = H_1(X, Y)$, uma função de X e Y. $Z = Z(\omega)$ é também uma VA. Consideremos a sequência de etapas:

1. Executar o experimento ε e obter o resultado ω.
2. Calcular os números $X(\omega)$ e $Y(\omega)$.
3. Calcular o número $Z = H_1[X(\omega), Y(\omega)]$.

Introdução

Nós vamos considerar $Z = H_1(X, Y)$, uma função de X e Y. $Z = Z(\omega)$ é também uma VA. Consideremos a sequência de etapas:

1. Executar o experimento ε e obter o resultado ω.
2. Calcular os números $X(\omega)$ e $Y(\omega)$.
3. Calcular o número $Z = H_1[X(\omega), Y(\omega)]$.

Introdução

O valor de Z depende evidentemente de ω, o resultado original do experimento. Ou seja, $Z = Z(\omega)$ é uma função que associa um número real $Z(\omega)$ a todo resultado $\omega \in \Omega$.

O valor de Z depende evidentemente de ω, o resultado original do experimento. Ou seja, $Z = Z(\omega)$ é uma função que associa um número real $Z(\omega)$ a todo resultado $\omega \in \Omega$. Consequentemente, Z é uma VA.

Introdução

O valor de Z depende evidentemente de ω, o resultado original do experimento. Ou seja, $Z = Z(\omega)$ é uma função que associa um número real $Z(\omega)$ a todo resultado $\omega \in \Omega$. Consequentemente, Z é uma VA.

Introdução

Motivação

A questão que surge é a seguinte: dada a distribuição de probabilidade conjunta $(X, Y)^\top$, qual é a distribuição de probabilidades de $Z = H_1(X, Y)$?

Introdução

Motivação

A questão que surge é a seguinte: dada a distribuição de probabilidade conjunta $(X, Y)^\top$, qual é a distribuição de probabilidades de $Z = H_1(X, Y)$?

Roteiro

1 Introdução

2 Caso discreto

3 Método jacobiano

4 Funções não biunívocas

5 Bibliografia

Caso discreto

Se $(X, Y)^\top$ for uma VA discreta, encontrar a distribuição de probabilidades de $Z = H_1(X, Y)$ é uma tarefa relativamente simples.

Exemplo

Qual é a distribuição de probabilidades de $Z = \min(X, Y)$, em que $(X, Y)^\top$ tem distribuição de probabilidade dada por:

Tabela 1: Distribuição de probabilidade conjunta de X e Y.

Y	X					
	0	1	2	3	4	5
0	0,00	0,01	0,03	0,05	0,07	0,09
1	0,01	0,02	0,04	0,05	0,06	0,08
2	0,01	0,03	0,05	0,05	0,05	0,06
3	0,01	0,02	0,04	0,06	0,06	0,05

Exemplo

Qual é a distribuição de probabilidades de $Z = \min(X, Y)$, em que $(X, Y)^\top$ tem distribuição de probabilidade dada por:

Tabela 1: Distribuição de probabilidade conjunta de X e Y.

Y	X					
	0	1	2	3	4	5
0	0,00	0,01	0,03	0,05	0,07	0,09
1	0,01	0,02	0,04	0,05	0,06	0,08
2	0,01	0,03	0,05	0,05	0,05	0,06
3	0,01	0,02	0,04	0,06	0,06	0,05

Exemplo

Notem que, o suporte de Z é $\mathcal{Z} = \{0, 1, 2, 3\}$, obtido da seguinte maneira:

Z	(X, Y)								
0	(0,0)	(0,1)	(0,2)	(0,3)	(1,0)	(2,0)	(3,0)	(4,0)	(5,0)
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(2,1)	(3,1)	(4,1)	(5,1)		
2	(2,2)	(2,3)	(3,2)	(4,2)	(5,2)				
3	(3,3)	(4,3)	(5,3)						

Exemplo

Notem que, o suporte de Z é $\mathcal{Z} = \{0, 1, 2, 3\}$, obtido da seguinte maneira:

Z	(X, Y)								
0	(0,0)	(0,1)	(0,2)	(0,3)	(1,0)	(2,0)	(3,0)	(4,0)	(5,0)
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(2,1)	(3,1)	(4,1)	(5,1)		
2	(2,2)	(2,3)	(3,2)	(4,2)	(5,2)				
3	(3,3)	(4,3)	(5,3)						

Exemplo

Com as probabilidades,

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(Z=0) &= \mathbb{P}(X=0, Y=0) + \mathbb{P}(X=0, Y=1) + \mathbb{P}(X=0, Y=2) \\
&\quad + \mathbb{P}(X=0, Y=3) + \mathbb{P}(X=1, Y=0) + \mathbb{P}(X=2, Y=0) \\
&\quad + \mathbb{P}(X=3, Y=0) + \mathbb{P}(X=4, Y=0) + \mathbb{P}(X=5, Y=0); \\
\mathbb{P}(Z=1) &= \mathbb{P}(X=1, Y=1) + \mathbb{P}(X=1, Y=2) + \mathbb{P}(X=1, Y=3) \\
&\quad + \mathbb{P}(X=2, Y=1) + \mathbb{P}(X=3, Y=1) + \mathbb{P}(X=4, Y=1) \\
&\quad + \mathbb{P}(X=5, Y=1);
\end{aligned}
$$

Exemplo

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(Z=2) &= \mathbb{P}(X=2, Y=2) + \mathbb{P}(X=2, Y=3) + \mathbb{P}(X=3, Y=2) \\
&\quad + \mathbb{P}(X=4, Y=2) + \mathbb{P}(X=5, Y=2); \\
\mathbb{P}(Z=3) &= \mathbb{P}(X=3, Y=3) + \mathbb{P}(X=4, Y=3) + \mathbb{P}(X=5, Y=3).
\end{aligned}
$$

Exemplo

A distribuição de probabilidade da VA $Z = \min(X, Y)$ é dada por:

Tabela 2: Distribuição de probabilidade de $Z = \min(X, Y)$.

Z	0	1	2	3
$\mathbb{P}(Z)$	0,28	0,30	0,25	0,17

Exemplo

A distribuição de probabilidade da VA $Z = \min(X, Y)$ é dada por:

Tabela 2: Distribuição de probabilidade de $Z = \min(X, Y)$.

Z	0	1	2	3
$\mathbb{P}(Z)$	0,28	0,30	0,25	0,17

Roteiro

Caso contínuo

Se $(X, Y)^\top$ for uma VA bidimensional contínua e se $Z = H_1(X, Y)$ for uma função contínua de (X, Y), então Z será uma VA contínua (unidimensional) e o procedimento de achar sua função densidade de probabilidade (FDP) é um pouco mais complicado. A fim de encontrar a FDP de Z, nós precisaremos do **Método jacobiano**.

Caso contínuo

Se $(X, Y)^\top$ for uma VA bidimensional contínua e se $Z = H_1(X, Y)$ for uma função contínua de (X, Y), então Z será uma VA contínua (unidimensional) e o procedimento de achar sua função densidade de probabilidade (FDP) é um pouco mais complicado. A fim de encontrar a FDP de Z, nós precisaremos do **Método jacobiano**.

Método jacobiano

A busca pela FDP de $Z = H_1(X, Y)$ é simplificada com a introdução de uma segunda VA $W = H_2(X, Y)$ e obtenção da FDP conjunta de Z e W, $g(z, w)$. Com o conhecimento de $g(z, w)$, nós poderemos então obter a FDP marginal de Z, $g_Z(z)$, pela integração de $g(z, w)$ com relação a w,

$$g_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(z, w)\, dw.$$

Método jacobiano

A busca pela FDP de $Z = H_1(X, Y)$ é simplificada com a introdução de uma segunda VA $W = H_2(X, Y)$ e obtenção da FDP conjunta de Z e W, $g(z, w)$. Com o conhecimento de $g(z, w)$, nós poderemos então obter a FDP marginal de Z, $g_Z(z)$, pela integração de $g(z, w)$ com relação a w,

$$g_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(z, w)\, dw.$$

Método jacobiano

Os problemas restantes são:

1. como encontrar a FDP conjunta de Z e W,

Método jacobiano

Os problemas restantes são:

1. como encontrar a FDP conjunta de Z e W,
2. como escolher a VA apropriada $W = H_2(X, Y)$.

Método jacobiano

Os problemas restantes são:

1. como encontrar a FDP conjunta de Z e W,
2. como escolher a VA apropriada $W = H_2(X, Y)$.

Para resolver o último problema, nós devemos dizer que geralmente se faz a mais simples escolha possível para W.

Método jacobiano

Os problemas restantes são:

1. como encontrar a FDP conjunta de Z e W,
2. como escolher a VA apropriada $W = H_2(X, Y)$.

Para resolver o último problema, nós devemos dizer que geralmente se faz a mais simples escolha possível para W. Nesta passagem, W possui apenas papel intermediário, e nós não estamos realmente interessados nela (isso nem sempre é verdade).

Método jacobiano

Os problemas restantes são:

1. como encontrar a FDP conjunta de Z e W,
2. como escolher a VA apropriada $W = H_2(X, Y)$.

Para resolver o último problema, nós devemos dizer que geralmente se faz a mais simples escolha possível para W. Nesta passagem, W possui apenas papel intermediário, e nós não estamos realmente interessados nela (isso nem sempre é verdade).

Método jacobiano

Suponhamos que $(X, Y)^\top$ seja uma VA contínua bidimensional com FDP conjunta f. Sejam $Z = H_1(X, Y)$ e $W = H_2(X, Y)$, e admitamos que as funções H_1 e H_2 satisfaçam as seguintes condições

Método jacobiano

Suponhamos que $(X, Y)^\top$ seja uma VA contínua bidimensional com FDP conjunta f. Sejam $Z = H_1(X, Y)$ e $W = H_2(X, Y)$, e admitamos que as funções H_1 e H_2 satisfaçam as seguintes condições

- As equações $z = H_1(x, y)$ e $w = H_2(x, y)$ podem ser **univocamente** resolvidas para x e y, em termos de z e w, isto é, $x = G_1(z, w)$ e $y = G_2(z, w)$.

Método jacobiano

Suponhamos que $(X, Y)^\top$ seja uma VA contínua bidimensional com FDP conjunta f. Sejam $Z = H_1(X, Y)$ e $W = H_2(X, Y)$, e admitamos que as funções H_1 e H_2 satisfaçam as seguintes condições

- As equações $z = H_1(x, y)$ e $w = H_2(x, y)$ podem ser **univocamente** resolvidas para x e y, em termos de z e w, isto é, $x = G_1(z, w)$ e $y = G_2(z, w)$.

Distribuição normal multivariada

- As derivadas parciais $\partial z/\partial x$, $\partial w/\partial x$, $\partial z/\partial y$ e $\partial w/\partial y$ existem, são contínuas e de tal forma que:

$$J(x,y) = \frac{\partial(z,w)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial z}{\partial x} & \dfrac{\partial z}{\partial y} \\ \dfrac{\partial w}{\partial x} & \dfrac{\partial w}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0, \qquad (1)$$

em todos os pontos (x, y).

Distribuição normal multivariada

- As derivadas parciais $\partial z/\partial x$, $\partial w/\partial x$, $\partial z/\partial y$ e $\partial w/\partial y$ existem, são contínuas e de tal forma que:

$$J(x,y) = \frac{\partial(z,w)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial z}{\partial x} & \dfrac{\partial z}{\partial y} \\ \dfrac{\partial w}{\partial x} & \dfrac{\partial w}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0, \tag{1}$$

em todos os pontos (x, y).

Método jacobiano

Nestas circunstâncias, a FDP conjunta de $(Z, W)^\top$, isto é, $g(z, w)$ é dada pela seguinte expressão

$$g(z, w) = f(x, y)\ |J(x, y)|^{-1}\ \mathbb{I}_{\mathcal{J}}(z, w), \tag{2}$$

em que $x = G_1(z, w)$, $y = G_2(z, w)$ e $\mathcal{J}$ é o suporte de $(Z, W)^\top$, isto é, região com $g(z, w) > 0$.

Método jacobiano

Nestas circunstâncias, a FDP conjunta de $(Z, W)^\top$, isto é, $g(z, w)$ é dada pela seguinte expressão

$$g(z, w) = f(x, y)\ |J(x, y)|^{-1}\ \mathbb{I}_{\mathcal{J}}(z, w), \tag{2}$$

em que $x = G_1(z, w)$, $y = G_2(z, w)$ e $\mathcal{J}$ é o suporte de $(Z, W)^\top$, isto é, região com $g(z, w) > 0$. O determinante em (1) é denominado **jacobiano** da transformação $(x, y) \to (z, w)$.

Método jacobiano

Nestas circunstâncias, a FDP conjunta de $(Z, W)^\top$, isto é, $g(z, w)$ é dada pela seguinte expressão

$$g(z, w) = f(x, y)\ |J(x, y)|^{-1}\ \mathbb{I}_{\mathcal{J}}(z, w), \tag{2}$$

em que $x = G_1(z, w)$, $y = G_2(z, w)$ e $\mathcal{J}$ é o suporte de $(Z, W)^\top$, isto é, região com $g(z, w) > 0$. O determinante em (1) é denominado **jacobiano** da transformação $(x, y) \to (z, w)$.

Exemplos

Exemplo 1. Se X e Y são duas VA independentes com distribuições gama de parâmetros (α, λ) e (β, λ), respectivamente, calcule a FDP conjunta de $U = X + Y$ e $V = X/(X + Y)$.

Exemplos

Exemplo 1. Se X e Y são duas VA independentes com distribuições gama de parâmetros (α, λ) e (β, λ), respectivamente, calcule a FDP conjunta de $U = X + Y$ e $V = X/(X + Y)$. Como são VAs independentes, a FDP conjunta de $(X, Y)^\top$ é dada pela seguinte expressão

$$
\begin{aligned}
f(x, y) &= \frac{\lambda^{\alpha} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(\alpha)} \mathbb{I}_{(0,+\infty)}(x) \times \frac{\lambda^{\beta} y^{\beta-1} e^{-\lambda y}}{\Gamma(\beta)} \mathbb{I}_{(0,+\infty)}(y) \\
&= \frac{\lambda^{\alpha+\beta} x^{\alpha-1} y^{\beta-1} e^{-\lambda(x+y)}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \mathbb{I}_{(0,+\infty)}(x) \, \mathbb{I}_{(0,+\infty)}(y).
\end{aligned}
$$

Exemplo 1. Se X e Y são duas VA independentes com distribuições gama de parâmetros (α, λ) e (β, λ), respectivamente, calcule a FDP conjunta de $U = X + Y$ e $V = X/(X + Y)$. Como são VAs independentes, a FDP conjunta de $(X, Y)^\top$ é dada pela seguinte expressão

$$f(x, y) = \frac{\lambda^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(\alpha)} \mathbb{I}_{(0,+\infty)}(x) \times \frac{\lambda^\beta y^{\beta-1} e^{-\lambda y}}{\Gamma(\beta)} \mathbb{I}_{(0,+\infty)}(y)$$

$$= \frac{\lambda^{\alpha+\beta} x^{\alpha-1} y^{\beta-1} e^{-\lambda(x+y)}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \mathbb{I}_{(0,+\infty)}(x) \, \mathbb{I}_{(0,+\infty)}(y).$$

Exemplos

Antes de aplicar o método jacobiano, é preciso verificar se a transformação é bijetora, isto é, se a transformação é injetora e sobrejetora. É injetora se $H(a,b) = H(c,d) \Rightarrow (a,b) = (c,d)$.

Exemplos

Antes de aplicar o método jacobiano, é preciso verificar se a transformação é bijetora, isto é, se a transformação é injetora e sobrejetora. É injetora se $H(a, b) = H(c, d) \Rightarrow (a, b) = (c, d)$.

$$H(a, b) = [a + b, a/(a + b)] = [c + d, c/(c + d)] = H(c, d).$$

$(\star)$ $a + b = c + d$ (1).

$(\star)$ $\dfrac{a}{a+b} = \dfrac{c}{c+d}$, por (1) $\Rightarrow \dfrac{a}{c+d} = \dfrac{c}{c+d} \Rightarrow a = c$. (2)

Exemplos

Antes de aplicar o método jacobiano, é preciso verificar se a transformação é bijetora, isto é, se a transformação é injetora e sobrejetora. É injetora se $H(a, b) = H(c, d) \Rightarrow (a, b) = (c, d)$.

$$H(a, b) = [a + b, a/(a + b)] = [c + d, c/(c + d)] = H(c, d).$$

$(\star)$ $a + b = c + d$ (1).

$(\star)$ $\dfrac{a}{a + b} = \dfrac{c}{c + d}$, por (1) $\Rightarrow \dfrac{a}{c + d} = \dfrac{c}{c + d} \Rightarrow a = c$. (2)

Por (1) e (2), $c + b = c + d \Rightarrow b = d$.

Exemplos

Antes de aplicar o método jacobiano, é preciso verificar se a transformação é bijetora, isto é, se a transformação é injetora e sobrejetora. É injetora se $H(a,b) = H(c,d) \Rightarrow (a,b) = (c,d)$.

$$H(a,b) = [a+b, a/(a+b)] = [c+d, c/(c+d)] = H(c,d).$$

$(\star)$ $a+b = c+d$ (1).

$(\star)$ $\dfrac{a}{a+b} = \dfrac{c}{c+d}$, por (1) $\Rightarrow \dfrac{a}{c+d} = \dfrac{c}{c+d} \Rightarrow a = c$. (2)

Por (1) e (2), $c+b = c+d \Rightarrow b = d$.

Logo, a transformação H é injetora.

Exemplos

Antes de aplicar o método jacobiano, é preciso verificar se a transformação é bijetora, isto é, se a transformação é injetora e sobrejetora. É injetora se $H(a,b) = H(c,d) \Rightarrow (a,b) = (c,d)$.

$$H(a,b) = [a+b, a/(a+b)] = [c+d, c/(c+d)] = H(c,d).$$

$(\star)$ $a + b = c + d$ (1).

$(\star)$ $\dfrac{a}{a+b} = \dfrac{c}{c+d}$, por (1) $\Rightarrow \dfrac{a}{c+d} = \dfrac{c}{c+d} \Rightarrow a = c$. (2)

Por (1) e (2), $c + b = c + d \Rightarrow b = d$.

Logo, a transformação H é injetora.

Exemplos

Será sobrejetora se, $\forall(c,d) \in \mathcal{B}$, $\exists(a,b) \in \mathcal{A}$ tal que $H(a,b) = [a + b, a/(a+b)] = (c,d)$.

$$a + b = c \ (3); \ \frac{a}{a+b} = d.$$

$$\text{Por (3), } \frac{a}{c} = d \Rightarrow a = cd. \ (4)$$

$$\text{Por (3) e (4), } cd + b = c \Rightarrow b = c(1-d).$$

$$H[cd, c(1-d)] = (c,d).$$

Exemplos

Será sobrejetora se, $\forall(c,d) \in \mathcal{B}$, $\exists(a,b) \in \mathcal{A}$ tal que $H(a,b) = [a+b, a/(a+b)] = (c,d)$.

$$a + b = c \ (3); \ \frac{a}{a+b} = d.$$

$$\text{Por (3), } \frac{a}{c} = d \Rightarrow a = cd. \ (4)$$

$$\text{Por (3) e (4), } cd + b = c \Rightarrow b = c(1-d).$$

$$H[cd, c(1-d)] = (c,d).$$

Portanto, a transformação é sobrejetora,

como ela também é injetora, H é bijetora.

Exemplos

Será sobrejetora se, $\forall (c,d) \in \mathcal{B}$, $\exists (a,b) \in \mathcal{A}$ tal que $H(a,b) = [a + b, a/(a+b)] = (c,d)$.

$$a + b = c \ (3); \ \frac{a}{a+b} = d.$$

$$\text{Por (3), } \frac{a}{c} = d \Rightarrow a = cd. \ (4)$$

$$\text{Por (3) e (4), } cd + b = c \Rightarrow b = c(1-d).$$

$$H[cd, c(1-d)] = (c,d).$$

Portanto, a transformação é sobrejetora,

como ela também é injetora, H é bijetora.

Exemplos

Notem que

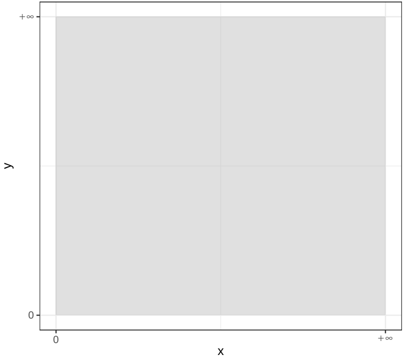
$$0 < x < +\infty \text{ e } 0 < y < +\infty$$

$$\Downarrow$$

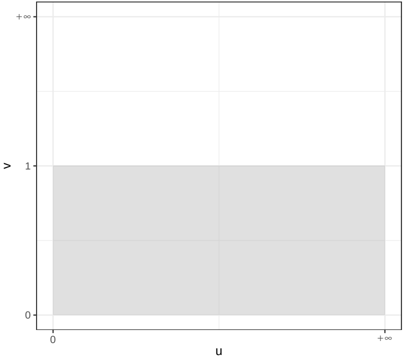
$$0 < x + y < +\infty \text{ e } 0 < \frac{x}{x+y} < 1$$

$$\Downarrow$$

$$0 < u < +\infty \text{ e } 0 < v < 1.$$



(a) Suporte de $(X, Y)^\top$.



(b) Suporte de $(U, V)^\top$.

Figura 1: Suporte.

Exemplos

Agora, nós temos que, $u = H_1(x, y) = x + y$ e $v = H_2(x, y) = x/(x + y)$,

então

$$J(x,y) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \dfrac{y}{(x+y)^2} & -\dfrac{x}{(x+y)^2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{x+y}.$$

Notem que, $-1/(x + y) = -1/u$.

Exemplos

Agora, nós temos que, $u = H_1(x, y) = x + y$ e $v = H_2(x, y) = x/(x + y)$,

então

$$J(x, y) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \dfrac{y}{(x+y)^2} & -\dfrac{x}{(x+y)^2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{x+y}.$$

Notem que, $-1/(x + y) = -1/u$.

Exemplos

Lembrando que $x = G_1(u, v) = uv$ e $y = G_2(u, v) = u(1 - v)$, por (2), nós temos que

$$g(u, v) = f[uv, u(1 - v)] \left| -\frac{1}{u} \right|^{-1} \mathbb{I}_{(0,+\infty)}(u)\, \mathbb{I}_{(0,1)}(v)$$

$$= \frac{\lambda^{\alpha+\beta} u^{\alpha+\beta-1} e^{-\lambda u}}{\Gamma(\alpha + \beta)} \frac{v^{\alpha-1}(1 - v)^{\beta-1}}{B(\alpha, \beta)} \mathbb{I}_{(0,+\infty)}(u)\, \mathbb{I}_{(0,1)}(v),$$

Exemplos

Lembrando que $x = G_1(u, v) = uv$ e $y = G_2(u, v) = u(1 - v)$, por (2), nós temos que

$$g(u, v) = f[uv, u(1-v)] \left| -\frac{1}{u} \right|^{-1} \mathbb{I}_{(0,+\infty)}(u)\, \mathbb{I}_{(0,1)}(v)$$

$$= \frac{\lambda^{\alpha+\beta} u^{\alpha+\beta-1} e^{-\lambda u}}{\Gamma(\alpha+\beta)} \frac{v^{\alpha-1}(1-v)^{\beta-1}}{B(\alpha,\beta)} \mathbb{I}_{(0,+\infty)}(u)\, \mathbb{I}_{(0,1)}(v),$$

isto é, $U \sim \text{gama}(\alpha+\beta, \lambda)$ e $V \sim \text{beta}(\alpha, \beta)$.

Exemplos

Lembrando que $x = G_1(u, v) = uv$ e $y = G_2(u, v) = u(1 - v)$, por (2), nós temos que

$$\begin{aligned} g(u, v) &= f[uv, u(1-v)] \left| -\frac{1}{u} \right|^{-1} \mathbb{I}_{(0,+\infty)}(u)\, \mathbb{I}_{(0,1)}(v) \\ &= \frac{\lambda^{\alpha+\beta} u^{\alpha+\beta-1} e^{-\lambda u}}{\Gamma(\alpha+\beta)} \frac{v^{\alpha-1}(1-v)^{\beta-1}}{B(\alpha, \beta)} \mathbb{I}_{(0,+\infty)}(u)\, \mathbb{I}_{(0,1)}(v), \end{aligned}$$

isto é, $U \sim \text{gama}(\alpha+\beta, \lambda)$ e $V \sim \text{beta}(\alpha, \beta)$. Adicionalmente, U e V são independentes.

Exemplos

Lembrando que $x = G_1(u, v) = uv$ e $y = G_2(u, v) = u(1 - v)$, por (2), nós temos que

$$g(u, v) = f[uv, u(1-v)] \left| -\frac{1}{u} \right|^{-1} \mathbb{I}_{(0,+\infty)}(u)\, \mathbb{I}_{(0,1)}(v)$$

$$= \frac{\lambda^{\alpha+\beta} u^{\alpha+\beta-1} e^{-\lambda u}}{\Gamma(\alpha+\beta)} \frac{v^{\alpha-1}(1-v)^{\beta-1}}{B(\alpha,\beta)} \mathbb{I}_{(0,+\infty)}(u)\, \mathbb{I}_{(0,1)}(v),$$

isto é, $U \sim \text{gama}(\alpha+\beta, \lambda)$ e $V \sim \text{beta}(\alpha, \beta)$. Adicionalmente, U e V são independentes.

Exemplos

Exemplo 2. Sejam U e V duas variáveis aleatórias independentes com distribuição qui-quadrado(m) e qui-quadrado(n), respectivamente. Seja

$$X = \frac{U/m}{V/n}.$$

Qual é a distribuição de X?

Exemplos

Exemplo 2. Sejam U e V duas variáveis aleatórias independentes com distribuição qui-quadrado(m) e qui-quadrado(n), respectivamente. Seja

$$X = \frac{U/m}{V/n}.$$

Qual é a distribuição de X? Dica: seja $Y = V$.

Exemplos

Exemplo 2. Sejam U e V duas variáveis aleatórias independentes com distribuição qui-quadrado(m) e qui-quadrado(n), respectivamente. Seja

$$X = \frac{U/m}{V/n}.$$

Qual é a distribuição de X? Dica: seja $Y = V$.

Exemplos

Como no exemplo anterior, nós precisamos verificar se a transformação é bijetora. É injetora se $H(a,b) = H(c,d) \Rightarrow (a,b) = (c,d)$.

Exemplos

Como no exemplo anterior, nós precisamos verificar se a transformação é bijetora. É injetora se $H(a, b) = H(c, d) \Rightarrow (a, b) = (c, d)$.

$$H(a, b) = [(a/m)/(b/n), b] = [(c/m)/(d/n), d] = H(c, d).$$

$$\frac{a/m}{b/n} = \frac{c/m}{d/n}. \text{ Por (1), } \frac{a/m}{d/n} = \frac{c/m}{d/n} \Rightarrow a = c.$$

$$b = d.(1)$$

Exemplos

Como no exemplo anterior, nós precisamos verificar se a transformação é bijetora. É injetora se $H(a, b) = H(c, d) \Rightarrow (a, b) = (c, d)$.

$$H(a, b) = [(a/m)/(b/n), b] = [(c/m)/(d/n), d] = H(c, d).$$

$$\frac{a/m}{b/n} = \frac{c/m}{d/n}. \text{ Por (1), } \frac{a/m}{d/n} = \frac{c/m}{d/n} \Rightarrow a = c.$$

$$b = d.(1)$$

Logo, a transformação g é injetora.

Exemplos

Como no exemplo anterior, nós precisamos verificar se a transformação é bijetora. É injetora se $H(a, b) = H(c, d) \Rightarrow (a, b) = (c, d)$.

$$H(a, b) = [(a/m)/(b/n), b] = [(c/m)/(d/n), d] = H(c, d).$$

$$\frac{a/m}{b/n} = \frac{c/m}{d/n}. \text{ Por (1), } \frac{a/m}{d/n} = \frac{c/m}{d/n} \Rightarrow a = c.$$

$$b = d.(1)$$

Logo, a transformação g é injetora.

Exemplos

Será sobrejetora se, $\forall (c, d) \in \mathcal{B}$, $\exists (a, b) \in \mathcal{A}$ tal que

$H(a, b) = [(a/m)/(b/n), b] = (c, d)$.

Exemplos

Será sobrejetora se, $\forall (c,d) \in \mathcal{B}$, $\exists (a,b) \in \mathcal{A}$ tal que

$H(a,b) = [(a/m)/(b/n), b] = (c,d)$.

$$\frac{a/m}{b/n} = c; \;\; b = d. \; (3)$$

$$\text{Por (3), } \frac{a/m}{d/n} = c \Rightarrow a = \frac{m}{n}cd. \; (4)$$

$$H[(m/n)cd, d] = (c,d).$$

Exemplos

Será sobrejetora se, $\forall(c, d) \in \mathcal{B}$, $\exists(a, b) \in \mathcal{A}$ tal que

$H(a, b) = [(a/m)/(b/n), b] = (c, d)$.

$$\frac{a/m}{b/n} = c; \;\; b = d. \; (3)$$

$$\text{Por (3), } \frac{a/m}{d/n} = c \Rightarrow a = \frac{m}{n}cd. \; (4)$$

$$H[(m/n)cd, d] = (c, d).$$

Portanto, a transformação é sobrejetora,

como ela também é injetora, H é bijetora.

Exemplos

Será sobrejetora se, $\forall(c,d) \in \mathcal{B}$, $\exists(a,b) \in \mathcal{A}$ tal que

$H(a,b) = [(a/m)/(b/n), b] = (c,d)$.

$$\frac{a/m}{b/n} = c; \;\; b = d. \; (3)$$

$$\text{Por (3), } \frac{a/m}{d/n} = c \Rightarrow a = \frac{m}{n}cd. \; (4)$$

$$H[(m/n)cd, d] = (c,d).$$

Portanto, a transformação é sobrejetora,

como ela também é injetora, H é bijetora.

Exemplos

Agora, nós temos que, $x = H_1(u, v) = (u/m)/(v/n)$ e $y = H_2(u, v) = v$, então

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{n}{mv} & -\dfrac{nu}{mv^2} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{n}{mv}.$$

Exemplos

Agora, nós temos que, $x = H_1(u, v) = (u/m)/(v/n)$ e $y = H_2(u, v) = v$, então

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{n}{mv} & -\dfrac{nu}{mv^2} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{n}{mv}.$$

Note que, $n/(mv) = n/(my)$.

Exemplos

Agora, nós temos que, $x = H_1(u, v) = (u/m)/(v/n)$ e $y = H_2(u, v) = v$, então

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{n}{mv} & -\dfrac{nu}{mv^2} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{n}{mv}.$$

Note que, $n/(mv) = n/(my)$.

Exemplos

Lembrando que a FDP conjunta de $(U, V)^\top$ é dada por

$$f(u, v) = \frac{2^{-(m+n)/2}}{\Gamma(m/2)\Gamma(n/2)} u^{m/2-1} v^{n/2-1} \exp\{-(u+v)/2\} \, \mathbb{I}_{\mathbb{R}_+^2}(u, v).$$

Exemplos

Lembrando também que $u = G_1(x, y) = (m/n)xy$ e $v = G_2(x, y) = y$, por (2), nós temos que a FDP conjunta de $(X, Y)^\top$ pode ser expressa como

$$
\begin{aligned}
g(x, y) &= f[(m/n)xy, y] \left| \frac{n}{my} \right|^{-1} \mathbb{I}_{(0,+\infty)}(x)\, \mathbb{I}_{(0,+\infty)}(y) \\
&= \frac{2^{-(m+n)/2}}{\Gamma(m/2)\Gamma(n/2)} \left(\frac{m}{n} \right)^{m/2} x^{m/2-1} y^{(m+n)/2-1} \\
&\quad \times \exp\left\{ -\frac{1}{2} \left(1 + \frac{m}{n} x \right) y \right\} \mathbb{I}_{\mathbb{R}_+^2}(x, y).
\end{aligned}
$$

Exemplos

Lembrando também que $u = G_1(x, y) = (m/n)xy$ e $v = G_2(x, y) = y$, por (2), nós temos que a FDP conjunta de $(X, Y)^\top$ pode ser expressa como

$$g(x, y) = f[(m/n)xy, y] \left| \frac{n}{my} \right|^{-1} \mathbb{I}_{(0,+\infty)}(x)\, \mathbb{I}_{(0,+\infty)}(y)$$

$$= \frac{2^{-(m+n)/2}}{\Gamma(m/2)\Gamma(n/2)} \left(\frac{m}{n} \right)^{m/2} x^{m/2-1} y^{(m+n)/2-1}$$

$$\times \exp\left\{ -\frac{1}{2} \left(1 + \frac{m}{n} x \right) y \right\} \mathbb{I}_{\mathbb{R}_+^2}(x, y).$$

Exemplos

Assim, a marginal de X será

$$
\begin{aligned}
g_X(x) &= \int_0^\infty g(x,y)dy \\
&= \frac{2^{-(m+n)/2}}{\Gamma(m/2)\Gamma(n/2)}\left(\frac{m}{n}\right)^{m/2} x^{m/2-1}\int_0^\infty \overbrace{y^{(m+n)/2-1}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(1+\frac{m}{n}x\right)y\right\}}^{\text{gama}\left[\frac{m+n}{2},\frac{1}{2}\left(1+\frac{m}{n}x\right)\right]} dy \\
&= \frac{2^{-(m+n)/2}}{\Gamma(m/2)\Gamma(n/2)}\left(\frac{m}{n}\right)^{m/2} x^{m/2-1}\frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\left[\frac{1}{2}\left(1+\frac{m}{n}x\right)\right]^{(m+n)/2}} \\
&= \frac{1}{B(m/2,n/2)}\left(\frac{m}{n}\right)^{m/2} x^{m/2-1}\left(1+\frac{m}{n}x\right)^{-(m+n)/2}\mathbb{I}_{\mathbb{R}_+}(x),
\end{aligned}
$$

isto é, $X \sim \mathrm{F}(m,n)$. (UFA!!!)

Exemplos

Assim, a marginal de X será

$$
\begin{aligned}
g_X(x) &= \int_0^\infty g(x,y)dy \\
&= \frac{2^{-(m+n)/2}}{\Gamma(m/2)\Gamma(n/2)} \left(\frac{m}{n}\right)^{m/2} x^{m/2-1} \int_0^\infty \overbrace{y^{(m+n)/2-1} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(1+\frac{m}{n}x\right)y\right\}}^{\text{gama}\left[\frac{m+n}{2},\frac{1}{2}\left(1+\frac{m}{n}x\right)\right]} dy \\
&= \frac{2^{-(m+n)/2}}{\Gamma(m/2)\Gamma(n/2)} \left(\frac{m}{n}\right)^{m/2} x^{m/2-1} \frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\left[\frac{1}{2}\left(1+\frac{m}{n}x\right)\right]^{(m+n)/2}} \\
&= \frac{1}{B(m/2,n/2)} \left(\frac{m}{n}\right)^{m/2} x^{m/2-1} \left(1+\frac{m}{n}x\right)^{-(m+n)/2} \mathbb{I}_{\mathbb{R}_+}(x),
\end{aligned}
$$

isto é, $X \sim \mathrm{F}(m,n)$. (UFA!!!)

Roteiro

Método jacobiano

Quando a função $Z = H_1(X, Y)$ não for biunívoca (bijetora), o método do jacobiano, descrito em (2), não pode ser usado de imediato.

Método jacobiano

Primeiramente, o suporte em X e/ou de Y precisa ser subdividido em regiões onde $H_1(X, Y)$ seja biunívoca.

Após isso, o método pode ser aplicado em cada uma das regiões e a FDP de Z é a soma das FDPs obtidas para cada $H_1(X, Y)$ da região.

Método jacobiano

Primeiramente, o suporte em X e/ou de Y precisa ser subdividido em regiões onde $H_1(X, Y)$ seja biunívoca.

Após isso, o método pode ser aplicado em cada uma das regiões e a FDP de Z é a soma das FDPs obtidas para cada $H_1(X, Y)$ da região.

Método jacobiano

Isto é, a FDP conjunta de $(Z, W)^\top$ será dada pela expressão

$$g(z, w) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\, |J_i(x, y)|^{-1}\, \mathbb{I}_{\mathcal{J}_i}(z, w), \tag{3}$$

em que $x = G_{1i}(z, w)$, $y = G_{2i}(z, w)$, $\mathcal{J}_i$ é o i-ésimo suporte de $(Z, W)^\top$ e n é o número de subdivisões.

Isto é, a FDP conjunta de $(Z, W)^\top$ será dada pela expressão

$$g(z, w) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\, |J_i(x, y)|^{-1}\, \mathbb{I}_{\mathcal{J}_i}(z, w), \tag{3}$$

em que $x = G_{1i}(z, w)$, $y = G_{2i}(z, w)$, $\mathcal{J}_i$ é o i-ésimo suporte de $(Z, W)^\top$ e n é o número de subdivisões.

Roteiro

Bibliografia

Meyer, P. L. (2017), *Probabilidade: aplicações à Estatística*, 2 edn, Livros Técnicos e Científicos Editora Ltda, Rio de Janeiro.

Ross, S. (2010), *Probabilidade: um curso moderno com aplicações*, 8 edn, Bookman, Porto Alegre.

Ross, S. (2019), *A first course in probability*, 10 edn. global edn, Pearson Education, Malaysia.

Obrigado!

✉ tiago.magalhaes@ufjf.br

🖱 ufjf.br/tiago_magalhaes

🌍 Departamento de Estatística, Sala 319