Funções geradoras

Tiago M. Magalhães

Departamento de Estatística - ICE-UFJF

Juiz de Fora, 24 de setembro de 2024

Roteiro

Roteiro

Função geradora de probabilidades

A função geradora de probabilidades (FGP) da variável aleatória (VA) discreta X, $P_X(t)$, é definida por

$$P_X(t) = \mathbb{E}\left[t^X\right] = \sum_{i=1}^{+\infty} t^{x_i} p_X(x_i),$$

para $t \in \mathbb{R}$.

Função geradora de momentos

E a função geradora de momentos (FGM) da VA X, $M_X(t)$, é definida por

$$M_X(t) = \mathbb{E}\left[e^{tX}\right] = \begin{cases} \sum_{i=1}^{+\infty} e^{tx_i} p_X(x_i), & \text{caso discreto,} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f_X(x)\, dx, & \text{caso contínuo,} \end{cases}$$

para $t \in \mathbb{R}$.

Função característica

As FGP e FGM são ferramentas muito úteis. Contudo, elas nem sempre existirão. Dessa forma, é interessante obter uma função que sempre exista.

Função característica

Uma VA X é complexa, se puder ser escrita como:

$$X = X^a + iX^b,$$

em que $i = \sqrt{-1}$, X^a e X^b são VA reais.

Função característica

A função característica da VA X, $\varphi_X(t)$, é definida por

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}\left[e^{itX}\right] = \mathbb{E}\left[\cos(tX)\right] + i\mathbb{E}\left[\text{sen}(tX)\right],$$

para $t \in \mathbb{R}$ e $i = \sqrt{-1}$.

Função característica

Seja X uma VA qualquer e φ_X sua função característica, então:

1. $\varphi_X(0) = 1$;

Função característica

Seja X uma VA qualquer e φ_X sua função característica, então:

1. $\varphi_X(0) = 1$;
2. $|\varphi_X(t)| \leq 1$;

Função característica

Seja X uma VA qualquer e φ_X sua função característica, então:

1. $\varphi_X(0) = 1$;
2. $|\varphi_X(t)| \leq 1$;
3. Para a e b constantes, $\varphi_{aX+b}(t) = e^{itb}\varphi_X(at)$;

Função característica

Seja X uma VA qualquer e φ_X sua função característica, então:

1. $\varphi_X(0) = 1$;
2. $|\varphi_X(t)| \leq 1$;
3. Para a e b constantes, $\varphi_{aX+b}(t) = e^{itb}\varphi_X(at)$;
4. Se as VA X e Y são independentes então, $\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t) \times \varphi_Y(t)$;

Função característica

Seja X uma VA qualquer e φ_X sua função característica, então:

1. $\varphi_X(0) = 1$;
2. $|\varphi_X(t)| \leq 1$;
3. Para a e b constantes, $\varphi_{aX+b}(t) = e^{itb}\varphi_X(at)$;
4. Se as VA X e Y são independentes então, $\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t) \times \varphi_Y(t)$;
5. $\varphi_X(t)$ é uniformemente contínua;

Função característica

Seja X uma VA qualquer e φ_X sua função característica, então:

1. $\varphi_X(0) = 1$;
2. $|\varphi_X(t)| \leq 1$;
3. Para a e b constantes, $\varphi_{aX+b}(t) = e^{itb}\varphi_X(at)$;
4. Se as VA X e Y são independentes então, $\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t) \times \varphi_Y(t)$;
5. $\varphi_X(t)$ é uniformemente contínua;
6. $\varphi_X(t)$ também gera momentos.

Função característica

Seja X uma VA qualquer e φ_X sua função característica, então:

1. $\varphi_X(0) = 1$;
2. $|\varphi_X(t)| \leq 1$;
3. Para a e b constantes, $\varphi_{aX+b}(t) = e^{itb}\varphi_X(at)$;
4. Se as VA X e Y são independentes então, $\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t) \times \varphi_Y(t)$;
5. $\varphi_X(t)$ é uniformemente contínua;
6. $\varphi_X(t)$ também gera momentos.

Funções geradoras

Seja X uma VA, a partir das funções geradoras, nós podemos observar as seguintes relações

- $M_X(t) = P_X(e^t)$, se X é uma VA discreta;

Funções geradoras

Seja X uma VA, a partir das funções geradoras, nós podemos observar as seguintes relações

- $M_X(t) = P_X(e^t)$, se X é uma VA discreta;
- $\varphi_X(t) = M_X(it)$.

Seja X uma VA, a partir das funções geradoras, nós podemos observar as seguintes relações

- $M_X(t) = P_X(e^t)$, se X é uma VA discreta;
- $\varphi_X(t) = M_X(it)$.

Função geradora de cumulantes

A função geradora de cumulantes (FGC) da VA X, $K_X(t)$, é definida por

$$K_X(t) = \log M_X(t),$$

para $t \in \mathbb{R}$. A FGC também pode ser definida como

$$K_X(t) = \log \varphi_X(t),$$

para $t \in \mathbb{R}$.

Função geradora de cumulantes

A função geradora de cumulantes (FGC) da VA X, $K_X(t)$, é definida por

$$K_X(t) = \log M_X(t),$$

para $t \in \mathbb{R}$. A FGC também pode ser definida como

$$K_X(t) = \log \varphi_X(t),$$

para $t \in \mathbb{R}$.

Roteiro

Função geradora multidimensional de momentos

A FGM conjunta da VA bidimensional $(X, Y)^\top$, $M(t_1, t_2)$, é definida para todos os valores reais t_1 e t_2 por

$$M(t_1, t_2) = \mathbb{E}\left[e^{t_1 X + t_2 Y}\right] \tag{1}$$
$$= \begin{cases} \sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^{+\infty} e^{t_1 x_i + t_2 y_j} p(x_i, y_j), & \text{caso discreto,} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{t_1 x + t_2 y} f(x, y) dx dy, & \text{caso contínuo.} \end{cases}$$

A FGM conjunta é única e determina a distribuição conjunta de $(X, Y)^\top$.

Função geradora multidimensional de momentos

A FGM conjunta da VA bidimensional $(X, Y)^\top$, $M(t_1, t_2)$, é definida para todos os valores reais t_1 e t_2 por

$$\begin{aligned} M(t_1, t_2) &= \mathbb{E}\left[e^{t_1 X + t_2 Y}\right] \\ &= \begin{cases} \sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^{+\infty} e^{t_1 x_i + t_2 y_j} p(x_i, y_j), & \text{caso discreto,} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{t_1 x + t_2 y} f(x, y) dx dy, & \text{caso contínuo.} \end{cases} \end{aligned} \tag{1}$$

A FGM conjunta é única e determina a distribuição conjunta de $(X, Y)^\top$.

Função geradora de momentos

De (1), nós temos que

$$\left.\frac{\partial^{r+s} M(t_1, t_2)}{\partial t_1^r \partial t_2^s}\right|_{t_1=0, t_2=0} = \mathbb{E}\left(X^r Y^s\right).$$

Por exemplo, $r = s = 1$,

$$\left.\frac{\partial^{2} M(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2}\right|_{t_1=0, t_2=0} = \mathbb{E}\left(XY\right).$$

Função geradora de momentos

De (1), nós temos que

$$\left.\frac{\partial^{r+s} M(t_1, t_2)}{\partial t_1^r \partial t_2^s}\right|_{t_1=0, t_2=0} = \mathbb{E}\left(X^r Y^s\right).$$

Por exemplo, $r = s = 1$,

$$\left.\frac{\partial^2 M(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2}\right|_{t_1=0, t_2=0} = \mathbb{E}\left(XY\right).$$

Função geradora de momentos

Se $r = 1$ e $s = 0$,

$$\left.\frac{\partial M(t_1, t_2)}{\partial t_1}\right|_{t_1=0, t_2=0} = \mathbb{E}\left(X\right).$$

Se $r = 0$ e $s = 1$,

$$\left.\frac{\partial M(t_1, t_2)}{\partial t_2}\right|_{t_1=0, t_2=0} = \mathbb{E}\left(Y\right).$$

Função geradora de momentos

Se $r = 1$ e $s = 0$,

$$\left.\frac{\partial M(t_1, t_2)}{\partial t_1}\right|_{t_1=0, t_2=0} = \mathbb{E}(X).$$

Se $r = 0$ e $s = 1$,

$$\left.\frac{\partial M(t_1, t_2)}{\partial t_2}\right|_{t_1=0, t_2=0} = \mathbb{E}(Y).$$

Função geradora de momentos

De (1), nós podemos obter as FGM marginais da seguinte forma

$$M_X(t) = \mathbb{E}\left[e^{tX}\right] = M(t,0),$$
$$M_Y(t) = \mathbb{E}\left[e^{tY}\right] = M(0,t).$$

Função geradora de momentos

Se X e Y são VAs independentes, então a FGM em (1) pode ser escrita da seguinte forma

$$M(t_1, t_2) = M_X(t_1) \times M_Y(t_2).$$

Função geradora de momentos

Se X e Y são VAs independentes, então a FGM em (1) pode ser escrita da seguinte forma

$$M(t_1, t_2) = M_X(t_1) \times M_Y(t_2).$$

Função geradora de momentos

De maneira geral, a FGM conjunta da VA multidimensional $(X_1, X_2, \ldots, X_n)^\top$, $M(t_1, t_2, \ldots, t_n)$, é definida por

$$M(t_1, t_2, \ldots, t_n) = \mathbb{E}\left[e^{t_1 X_1 + t_2 X_2 + \cdots + t_n X_n}\right].$$

Função geradora de momentos

Exemplo. Sejam $X \sim \mathrm{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ e $Y \sim \mathrm{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$ VAs independentes.

1. Qual é a FGM de X e Y, respectivamente? (Não é necessário provar).
2. Qual é a FGM conjunta da VA bidimensional $(X, Y)^\top$?
3. A partir da FGM do item (b), encontre $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(Y)$, $\mathbb{E}(XY)$;
4. Calcule $\mathrm{Cov}(X, Y)$.

Função geradora de momentos

Exemplo. Sejam $X \sim \text{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ e $Y \sim \text{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$ VAs independentes.

1. Qual é a FGM de X e Y, respectivamente? (Não é necessário provar).
2. Qual é a FGM conjunta da VA bidimensional $(X, Y)^\top$?
3. A partir da FGM do item (b), encontre $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(Y)$, $\mathbb{E}(XY)$;
4. Calcule $\text{Cov}(X, Y)$.

Função geradora de momentos

1. As FGMs de X e Y são dadas, respectivamente, por

$$M_X(t_1) = \exp\left\{\mu_1 t_1 + \frac{\sigma_1^2 t_1^2}{2}\right\}, \quad M_Y(t_2) = \exp\left\{\mu_2 t_2 + \frac{\sigma_2^2 t_2^2}{2}\right\}.$$

2. Como X e Y são independentes, a FGM conjunta de X e Y é dada pelo produto das respectivas FGM marginais, isto é,

$$\begin{aligned} M_{X,Y}(t_1, t_2) &= M_X(t_1) \times M_Y(t_2) \\ &= \exp\left\{\mu_1 t_1 + \frac{\sigma_1^2 t_1^2}{2}\right\} \times \exp\left\{\mu_2 t_2 + \frac{\sigma_2^2 t_2^2}{2}\right\} \\ &= \exp\left\{(\mu_1 t_1 + \mu_2 t_2) + \frac{\sigma_1^2 t_1^2 + \sigma_2^2 t_2^2}{2}\right\}. \end{aligned}$$

3.

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \frac{\partial}{\partial t_1}\, M_{X,Y}(t_1,t_2)\Big|_{t_1=0,t_2=0} \\
&= \left(\mu_1 + 2\sigma_1^2 t_1\right)\exp\left\{(\mu_1 t_1 + \mu_2 t_2) + \frac{\sigma_1^2 t_1^2 + \sigma_2^2 t_2^2}{2}\right\}\Bigg|_{t_1=0,t_2=0} \\
&= \mu_1;
\end{aligned}
$$

Função geradora de momentos

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y) &= \frac{\partial}{\partial t_2} \, M_{X,Y}(t_1, t_2)\Big|_{t_1=0, t_2=0} \\
&= \left(\mu_2 + 2\sigma_2^2 t_2\right) \exp\left\{(\mu_1 t_1 + \mu_2 t_2) + \frac{\sigma_1^2 t_1^2 + \sigma_2^2 t_2^2}{2}\right\}\Bigg|_{t_1=0, t_2=0} \\
&= \mu_2;
\end{aligned}
$$

Função geradora de momentos

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(XY) &= \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2}\, M_{X,Y}(t_1, t_2)\Big|_{t_1=0, t_2=0} \\
&= \left(\mu_1 + 2\sigma_1^2 t_1\right)\left(\mu_2 + 2\sigma_2^2 t_2\right) \\
&\quad \times \exp\left\{(\mu_1 t_1 + \mu_2 t_2) + \frac{\sigma_1^2 t_1^2 + \sigma_2^2 t_2^2}{2}\right\}\Bigg|_{t_1=0, t_2=0} \\
&= \mu_1 \mu_2.
\end{aligned}
$$

4. A partir da definição de covariância, nós temos que,

$$\begin{aligned}\mathsf{Cov}(X, Y) &= \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) \\ &= \mu_1\mu_2 - \mu_1\mu_2 = 0.\end{aligned}$$

Roteiro

Bibliografia

Magalhães, M. N. (2015), *Probabilidade e variáveis aleatórias*, 3 edn, Editora da Universidade de São Paulo, São Paulo.

Meyer, P. L. (2017), *Probabilidade: aplicações à Estatística*, 2 edn, Livros Técnicos e Científicos Editora Ltda, Rio de Janeiro.

Ross, S. (2010), *Probabilidade: um curso moderno com aplicações*, 8 edn, Bookman, Porto Alegre.

Ross, S. (2019), *A first course in probability*, 10 edn. global edn, Pearson Education, Malaysia.

Obrigado!

✉ tiago.magalhaes@ufjf.br

ufjf.br/tiago_magalhaes

Departamento de Estatística, Sala 319