Vetores aleatórios

Tiago M. Magalhães

Departamento de Estatística - ICE-UFJF

Juiz de Fora, 03 de setembro de 2024

Roteiro

Roteiro

Vetores aleatórios

Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade e n funções, $X_1(\omega)$, $X_2(\omega)$, $\ldots$, $X_n(\omega)$, cada uma associando um número real a cada resultado $\omega \in \Omega$.

Vetores aleatórios

Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade e n funções, $X_1(\omega)$, $X_2(\omega)$, ..., $X_n(\omega)$, cada uma associando um número real a cada resultado $\omega \in \Omega$.

Dessa forma, nós denominaremos $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)^\top$ como uma variável aleatória n-dimensional, multidimensional, multivariada ou, ainda, de um **vetor aleatório**.

Vetores aleatórios

Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade e n funções, $X_1(\omega)$, $X_2(\omega)$, $\ldots$, $X_n(\omega)$, cada uma associando um número real a cada resultado $\omega \in \Omega$.

Dessa forma, nós denominaremos $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)^\top$ como uma variável aleatória n-dimensional, multidimensional, multivariada ou, ainda, de um **vetor aleatório**.

Vetores aleatórios

Sem perda de generalidade e para simplificar os enunciados, nós iremos apresentar os conceitos e as definições para o caso de **variáveis aleatórias bidimensionais** $(X_1, X_2)^\top$ ou $(X, Y)^\top$.

Vetores aleatórios

Sem perda de generalidade e para simplificar os enunciados, nós iremos apresentar os conceitos e as definições para o caso de **variáveis aleatórias bidimensionais** $(X_1, X_2)^\top$ ou $(X, Y)^\top$.

Variável aleatória discreta bidimensional

O vetor $(X, Y)^\top$ será uma **variável aleatória discreta bidimensional** se os valores possíveis (suporte) de $(X, Y)^\top$ forem finitos ou infinitos numeráveis,

Variável aleatória discreta bidimensional

O vetor $(X, Y)^\top$ será uma **variável aleatória discreta bidimensional** se os valores possíveis (suporte) de $(X, Y)^\top$ forem finitos ou infinitos numeráveis, isto é, os valores possíveis de $(X, Y)^\top$ possam ser representados por (x_i, y_j), $i = 1, 2, \ldots, n, \ldots; j = 1, 2, \ldots, m, \ldots$

Variável aleatória discreta bidimensional

O vetor $(X, Y)^\top$ será uma **variável aleatória discreta bidimensional** se os valores possíveis (suporte) de $(X, Y)^\top$ forem finitos ou infinitos numeráveis, isto é, os valores possíveis de $(X, Y)^\top$ possam ser representados por (x_i, y_j), $i = 1, 2, \ldots, n, \ldots$; $j = 1, 2, \ldots, m, \ldots$

Variável aleatória contínua bidimensional

O vetor $(X, Y)^\top$ será uma **variável aleatória contínua bidimensional** se $(X, Y)^\top$ puder tomar todos os valores em algum conjunto não numerável do plano euclidiano.

Variável aleatória contínua bidimensional

O vetor $(X, Y)^\top$ será uma **variável aleatória contínua bidimensional** se $(X, Y)^\top$ puder tomar todos os valores em algum conjunto não numerável do plano euclidiano.

Variável aleatória bidimensional

Observação

O vetor $(X, Y)^\top$ pode ser composto por uma variável aleatória discreta e uma variável aleatória contínua.

Variável aleatória bidimensional

Observação

O vetor $(X, Y)^\top$ pode ser composto por uma variável aleatória discreta e uma variável aleatória contínua.

Roteiro

Função de probabilidades

Seja $(X, Y)^\top$ uma variável aleatória discreta bidimensional.

Função de probabilidades

Seja $(X, Y)^\top$ uma variável aleatória discreta bidimensional. A cada resultado possível (x_i, y_j) associaremos um número $p(x_i, y_j)$ representando $\mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j)$

Função de probabilidades

Seja $(X, Y)^\top$ uma variável aleatória discreta bidimensional. A cada resultado possível (x_i, y_j) associaremos um número $p(x_i, y_j)$ representando $\mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j)$ e satisfazendo às seguintes condições:

Função de probabilidades

Seja $(X, Y)^\top$ uma variável aleatória discreta bidimensional. A cada resultado possível (x_i, y_j) associaremos um número $p(x_i, y_j)$ representando $\mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j)$ e satisfazendo às seguintes condições:

- $p(x_i, y_j) \geq 0$, para todo (x, y);

Função de probabilidades

Seja $(X, Y)^\top$ uma variável aleatória discreta bidimensional. A cada resultado possível (x_i, y_j) associaremos um número $p(x_i, y_j)$ representando $\mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j)$ e satisfazendo às seguintes condições:

- $p(x_i, y_j) \geq 0$, para todo (x, y);
- $\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} p(x_i, y_j) = 1.$

Função de probabilidades

Seja $(X, Y)^\top$ uma variável aleatória discreta bidimensional. A cada resultado possível (x_i, y_j) associaremos um número $p(x_i, y_j)$ representando $\mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j)$ e satisfazendo às seguintes condições:

- $p(x_i, y_j) \geq 0$, para todo (x, y);
- $\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} p(x_i, y_j) = 1$.

Função de probabilidades

A função p definida para todo (x_i, y_j) no contradomínio de $(X, Y)^\top$ é denominada **função de probabilidade** de $(X, Y)^\top$. O conjunto dos termos $[x_i, y_j, p(x_i, y_j)],\ i, j = 1, 2, \ldots$

Função de probabilidades

A função p definida para todo (x_i, y_j) no contradomínio de $(X, Y)^\top$ é denominada **função de probabilidade** de $(X, Y)^\top$. O conjunto dos termos $[x_i, y_j, p(x_i, y_j)],\ i, j = 1, 2, \ldots$ é, algumas vezes, denominado distribuição de probabilidade de $(X, Y)^\top$.

Função de probabilidades

A função p definida para todo (x_i, y_j) no contradomínio de $(X, Y)^\top$ é denominada **função de probabilidade** de $(X, Y)^\top$. O conjunto dos termos $[x_i, y_j, p(x_i, y_j)]$, $i, j = 1, 2, \ldots$ é, algumas vezes, denominado distribuição de probabilidade de $(X, Y)^\top$.

Função densidade de probabilidade

Seja $(X, Y)^\top$ uma variável aleatória contínua tomando todos os valores em alguma região R do plano euclidiano.

Função densidade de probabilidade

Seja $(X, Y)^\top$ uma variável aleatória contínua tomando todos os valores em alguma região R do plano euclidiano. A **função densidade de probabilidade conjunta** (FDP) f é uma função que satisfaz às seguintes condições:

Função densidade de probabilidade

Seja $(X, Y)^\top$ uma variável aleatória contínua tomando todos os valores em alguma região R do plano euclidiano. A **função densidade de probabilidade conjunta** (FDP) f é uma função que satisfaz às seguintes condições:

- $f(x, y) \geq 0$, para todo $(x, y) \in R$;

Função densidade de probabilidade

Seja $(X, Y)^\top$ uma variável aleatória contínua tomando todos os valores em alguma região R do plano euclidiano. A **função densidade de probabilidade conjunta** (FDP) f é uma função que satisfaz às seguintes condições:

- $f(x, y) \geq 0$, para todo $(x, y) \in R$;
- $\int \int_R f(x, y) dxdy = 1$.

Função densidade de probabilidade

Seja $(X, Y)^\top$ uma variável aleatória contínua tomando todos os valores em alguma região R do plano euclidiano. A **função densidade de probabilidade conjunta** (FDP) f é uma função que satisfaz às seguintes condições:

- $f(x, y) \geq 0$, para todo $(x, y) \in R$;
- $\int \int_R f(x, y) dxdy = 1$.

Roteiro

Função de distribuição acumulada

Seja $(X, Y)^\top$ uma variável aleatória bidimensional.

Função de distribuição acumulada

Seja $(X, Y)^\top$ uma variável aleatória bidimensional. A **função de distribuição acumulada** (FDA) F da variável aleatória bidimensional $(X, Y)^\top$ é definida por

Função de distribuição acumulada

Seja $(X, Y)^\top$ uma variável aleatória bidimensional. A **função de distribuição acumulada** (FDA) F da variável aleatória bidimensional $(X, Y)^\top$é definida por

$$F(x, y) = \mathbb{P}\left(X \leq x, Y \leq y\right).$$

Função de distribuição acumulada

Seja $(X, Y)^\top$ uma variável aleatória bidimensional. A **função de distribuição acumulada** (FDA) F da variável aleatória bidimensional $(X, Y)^\top$é definida por

$$F(x, y) = \mathbb{P}\left(X \leq x, Y \leq y\right).$$

Função de distribuição acumulada

A FDA de uma variável aleatória bidimensional $(X, Y)^\top$ tem propriedades análogas de uma FDA unidimensional. Entre elas, se F for a FDA de uma variável aleatória bidimensional com FDP f, então

Função de distribuição acumulada

A FDA de uma variável aleatória bidimensional $(X, Y)^\top$ tem propriedades análogas de uma FDA unidimensional. Entre elas, se F for a FDA de uma variável aleatória bidimensional com FDP f, então

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = f(x,y),$$

Função de distribuição acumulada

A FDA de uma variável aleatória bidimensional $(X, Y)^\top$ tem propriedades análogas de uma FDA unidimensional. Entre elas, se F for a FDA de uma variável aleatória bidimensional com FDP f, então

$$\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} = f(x, y),$$

sempre que F for derivável.

Função de distribuição acumulada

A FDA de uma variável aleatória bidimensional $(X, Y)^\top$ tem propriedades análogas de uma FDA unidimensional. Entre elas, se F for a FDA de uma variável aleatória bidimensional com FDP f, então

$$\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} = f(x, y),$$

sempre que F for derivável.

Roteiro

Exemplos

Exemplo 1. Suponhamos que a variável aleatória contínua bidimensional $(X, Y)^\top$ tenha FDP conjunta dada por

$$f(x, y) = x^2 + \frac{xy}{3} \mathbb{I}_{[0,1]}(x) \mathbb{I}_{[0,2]}(y). \tag{1}$$

Exemplos

Exemplo 1. Suponhamos que a variável aleatória contínua bidimensional $(X, Y)^\top$ tenha FDP conjunta dada por

$$f(x, y) = x^2 + \frac{xy}{3}\, \mathbb{I}_{[0,1]}(x)\, \mathbb{I}_{[0,2]}(y). \tag{1}$$

1. Mostre que $f(x, y)$ em (1) é uma FDP conjunta.
2. Calcule a probabilidade de $B = \{X + Y \geq 1\}$.

Exemplos

Exemplo 1. Suponhamos que a variável aleatória contínua bidimensional $(X, Y)^\top$ tenha FDP conjunta dada por

$$f(x, y) = x^2 + \frac{xy}{3}\, \mathbb{I}_{[0,1]}(x)\, \mathbb{I}_{[0,2]}(y). \tag{1}$$

1. Mostre que $f(x, y)$ em (1) é uma FDP conjunta.
2. Calcule a probabilidade de $B = \{X + Y \geq 1\}$.

Exemplos

Para o Item 1.1, nós temos que

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy = \int_0^2\int_0^1\left(x^2+\frac{xy}{3}\right)dxdy$$
$$= \int_0^2\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2y}{6}\right)\Big|_0^1 dy = \int_0^2\left(\frac{1}{3}+\frac{y}{6}\right)dy$$
$$= \left(\frac{y}{3}+\frac{y^2}{12}\right)\Big|_0^2 = \frac{2}{3}+\frac{4}{12} = 1.$$

Exemplos

Para o Item 1.1, nós temos que

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy &= \int_0^2\int_0^1 \left(x^2+\frac{xy}{3}\right)dxdy\\ &= \int_0^2 \left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2y}{6}\right)\Bigg|_0^1 dy = \int_0^2\left(\frac{1}{3}+\frac{y}{6}\right)dy\\ &= \left(\frac{y}{3}+\frac{y^2}{12}\right)\Bigg|_0^2 = \frac{2}{3}+\frac{4}{12} = 1.\end{aligned}$$

Exemplos

Para o Item 1.2, isto é, calcular a probabilidade do evento $B = \{X + Y \geq 1\}$,

é conveniente utilizar o evento complementar,

Exemplos

Para o Item 1.2, isto é, calcular a probabilidade do evento $B = \{X + Y \geq 1\}$, é conveniente utilizar o evento complementar, $B^c = \{X + Y < 1\}$, ver Figura 1.

Exemplos

Para o Item 1.2, isto é, calcular a probabilidade do evento $B = \{X + Y \geq 1\}$, é conveniente utilizar o evento complementar, $B^c = \{X + Y < 1\}$, ver Figura 1.

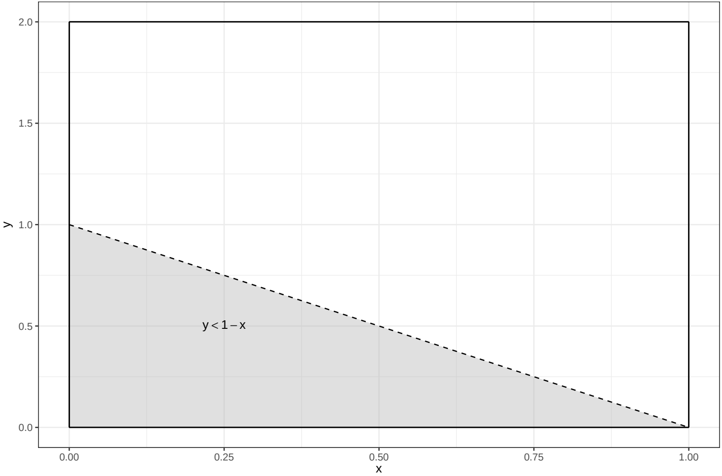

Figura 1: Área de integração para $\mathbb{P}(B^c)$.

Exemplos

Portanto,

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(B) &= 1 - \mathbb{P}(B^c) \\
&= 1 - \int_0^1 \int_0^{1-x} \left(x^2 + \frac{xy}{3}\right) dydx \\
&= 1 - \int_0^1 \left[x^2(1-x) + \frac{x(1-x)^2}{6}\right] dx \\
&= 1 - \frac{7}{72} = \frac{65}{72}.
\end{aligned}
$$

Exemplos

Portanto,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(B) &= 1 - \mathbb{P}(B^c) \\
&= 1 - \int_0^1 \int_0^{1-x} \left(x^2 + \frac{xy}{3}\right) dydx \\
&= 1 - \int_0^1 \left[x^2(1-x) + \frac{x(1-x)^2}{6}\right] dx \\
&= 1 - \frac{7}{72} = \frac{65}{72}.
\end{aligned}$$

Exemplo 2. Suponhamos que a variável aleatória contínua bidimensional $(X, Y)^\top$ tenha FDP conjunta dada por

$$
\begin{aligned}
f(x, y) &= 2 \exp\{-(x + 2y)\} \, \mathbb{I}_{\mathbb{R}^2_+}(x, y) \\
&= 2e^{-x} e^{-2y} \, \mathbb{I}_{(0,+\infty)}(x) \, \mathbb{I}_{(0,+\infty)}(y).
\end{aligned}
$$

Exemplos

Exemplo 2. Suponhamos que a variável aleatória contínua bidimensional $(X, Y)^\top$ tenha FDP conjunta dada por

$$\begin{aligned} f(x, y) &= 2\exp\{-(x+2y)\}\,\mathbb{I}_{\mathbb{R}^2_+}(x, y) \\ &= 2e^{-x}e^{-2y}\,\mathbb{I}_{(0,+\infty)}(x)\,\mathbb{I}_{(0,+\infty)}(y). \end{aligned}$$

Calcular:

1. $\mathbb{P}(X > 1, Y < 1)$;
2. $\mathbb{P}(X < Y)$;
3. $\mathbb{P}(X < a)$.

Exemplos

Exemplo 2. Suponhamos que a variável aleatória contínua bidimensional $(X, Y)^\top$ tenha FDP conjunta dada por

$$\begin{aligned} f(x, y) &= 2 \exp\{-(x + 2y)\} \, \mathbb{I}_{\mathbb{R}^2_+}(x, y) \\ &= 2e^{-x} e^{-2y} \, \mathbb{I}_{(0,+\infty)}(x) \, \mathbb{I}_{(0,+\infty)}(y). \end{aligned}$$

Calcular:

1. $\mathbb{P}(X > 1, Y < 1)$;
2. $\mathbb{P}(X < Y)$;
3. $\mathbb{P}(X < a)$.

Exemplos

Para o item 2.1, ver Figura 2, nós temos que

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(X > 1, Y < 1) &= \int_0^1 \int_1^{+\infty} 2e^{-x}e^{-2y}\,dxdy \\
&= \int_0^1 \left(-2e^{-x}e^{-2y}\right)\Big|_1^{+\infty} dy = e^{-1}\int_0^1 2e^{-2y}\,dy \\
&= e^{-1}\left(-e^{-2y}\right)\Big|_0^1 = e^{-1}\left(-e^{-2}+1\right).
\end{aligned}
$$

Exemplos

Para o item 2.1, ver Figura 2, nós temos que

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(X > 1, Y < 1) &= \int_0^1 \int_1^{+\infty} 2e^{-x} e^{-2y} dxdy \\
&= \int_0^1 \left(-2e^{-x} e^{-2y} \right) \Big|_1^{+\infty} dy = e^{-1} \int_0^1 2e^{-2y} dy \\
&= e^{-1} \left(-e^{-2y} \right) \Big|_0^1 = e^{-1} \left(-e^{-2} + 1 \right).
\end{aligned}
$$

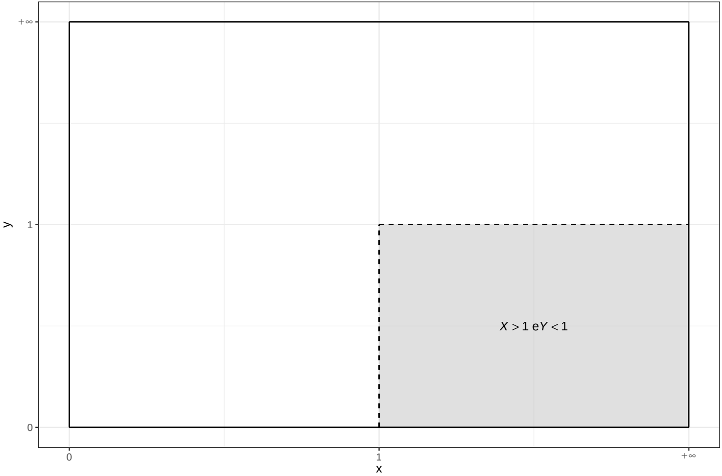

Figura 2: Área de integração para $\mathbb{P}(X > 1, Y < 1)$.

Para o item 2.2, ver Figura 3, nós temos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X < Y) &= \int_0^{+\infty}\int_0^{y} 2e^{-x}e^{-2y}\,dxdy \\
&= \int_0^{+\infty} 2e^{-2y}\left(1 - e^{-y}\right) dy \\
&= \int_0^{+\infty} 2e^{-2y}\,dy - \int_0^{+\infty} 2e^{-3y}\,dy \\
&\stackrel{*}{=} \int_0^{+\infty} 2e^{-2y}\,dy - \frac{2}{3}\int_0^{+\infty} 3e^{-3y}\,dy \\
&= 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

Exemplos

Para o item 2.2, ver Figura 3, nós temos que

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(X < Y) &= \int_0^{+\infty} \int_0^{y} 2e^{-x} e^{-2y} dxdy \\
&= \int_0^{+\infty} 2e^{-2y} \left(1 - e^{-y}\right) dy \\
&= \int_0^{+\infty} 2e^{-2y} dy - \int_0^{+\infty} 2e^{-3y} dy \\
&\stackrel{*}{=} \int_0^{+\infty} 2e^{-2y} dy - \frac{2}{3} \int_0^{+\infty} 3e^{-3y} dy \\
&= 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.
\end{aligned}
$$

$*$: Distribuições exponenciais de parâmetros 2 e 3, respectivamente.

Exemplos

Para o item 2.2, ver Figura 3, nós temos que

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(X < Y) &= \int_0^{+\infty} \int_0^{y} 2e^{-x} e^{-2y} dxdy \\
&= \int_0^{+\infty} 2e^{-2y} \left(1 - e^{-y}\right) dy \\
&= \int_0^{+\infty} 2e^{-2y} dy - \int_0^{+\infty} 2e^{-3y} dy \\
&\overset{*}{=} \int_0^{+\infty} 2e^{-2y} dy - \frac{2}{3} \int_0^{+\infty} 3e^{-3y} dy \\
&= 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.
\end{aligned}
$$

$*$: Distribuições exponenciais de parâmetros 2 e 3, respectivamente.

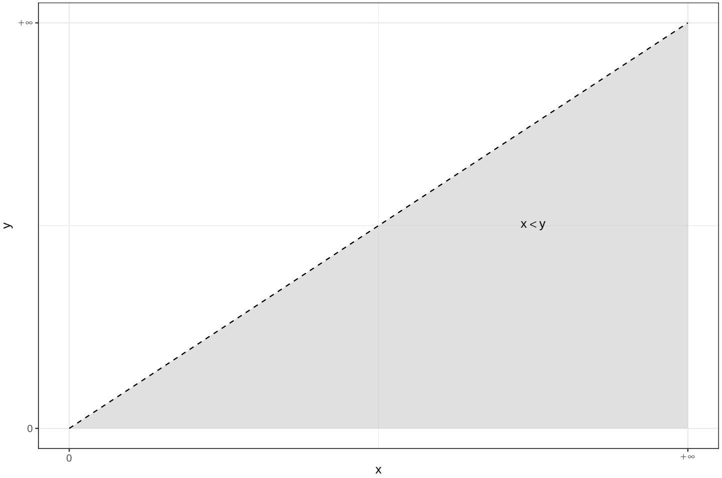

Figura 3: Área de integração para $\mathbb{P}(X < Y)$.

Exemplos

Para o item 2.3, ver Figura 4, nós temos que

$$\mathbb{P}(X < a) = \int_0^a \int_0^{+\infty} 2e^{-x} e^{-2y} dydx$$

$$= \int_0^a e^{-x} \underbrace{\int_0^{+\infty} 2e^{-2y} dy}_{\exp(2)} dx$$

$$= \int_0^a e^{-x} dx = 1 - e^{-a}.$$

Exemplos

Para o item 2.3, ver Figura 4, nós temos que

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(X < a) &= \int_0^a \int_0^{+\infty} 2e^{-x} e^{-2y} dy dx \\
&= \int_0^a e^{-x} \underbrace{\int_0^{+\infty} 2e^{-2y} dy}_{\exp(2)} dx \\
&= \int_0^a e^{-x} dx = 1 - e^{-a}.
\end{aligned}
$$

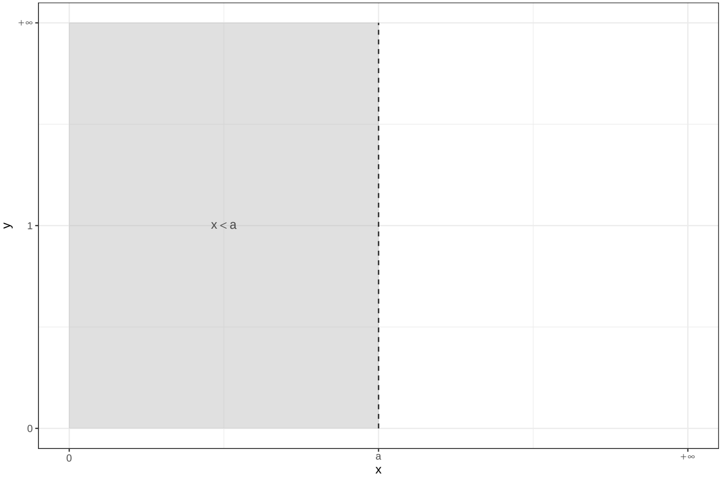

Figura 4: Área de integração para $\mathbb{P}(X < a)$.

Exemplos

Notem que, $\mathbb{P}(X < a) = 1 - e^{-a} = F(a)$,

Exemplos

Notem que, $\mathbb{P}(X < a) = 1 - e^{-a} = F(a)$, em que F é a FDA de uma variável aleatória com **distribuição exponencial de parâmetro 1**.

Exemplos

Notem que, $\mathbb{P}(X < a) = 1 - e^{-a} = F(a)$, em que F é a FDA de uma variável aleatória com **distribuição exponencial de parâmetro 1**.

Coincidência?

Exemplos

Notem que, $\mathbb{P}(X < a) = 1 - e^{-a} = F(a)$, em que F é a FDA de uma variável aleatória com **distribuição exponencial de parâmetro 1**.

Coincidência?

Roteiro

Bibliografia

Magalhães, M. N. (2015), *Probabilidade e variáveis aleatórias*, 3 edn, Editora da Universidade de São Paulo, São Paulo.

Meyer, P. L. (2017), *Probabilidade: aplicações à Estatística*, 2 edn, Livros Técnicos e Científicos Editora Ltda, Rio de Janeiro.

Ross, S. (2010), *Probabilidade: um curso moderno com aplicações*, 8 edn, Bookman, Porto Alegre.

Ross, S. (2019), *A first course in probability*, 10 edn. global edn, Pearson Education, Malaysia.

Obrigado!

✉ tiago.magalhaes@ufjf.br

ufjf.br/tiago_magalhaes

Departamento de Estatística, Sala 319