Distribuições discretas

Tiago M. Magalhães

Departamento de Estatística - ICE-UFJF

Juiz de Fora, 04 de junho de 2024

Roteiro

Roteiro

Experimento de Bernoulli

Um experimento com apenas dois resultados possíveis:

sucesso ou **fracasso**.

Experimento de Bernoulli

Um experimento com apenas dois resultados possíveis:

sucesso ou **fracasso**.

Experimento de Bernoulli

Sem perda de generalidade, nós definimos:

$$\mathbb{P}(\text{sucesso}) = p \text{ e } \mathbb{P}(\text{fracasso}) = 1 - p,$$

em que p é uma valor entre 0 e 1.

Experimento de Bernoulli

Sem perda de generalidade, nós definimos:

$$\mathbb{P}(\text{sucesso}) = p \text{ e } \mathbb{P}(\text{fracasso}) = 1 - p,$$

em que p é uma valor entre 0 e 1.

Experimento de Bernoulli

Exemplos:

- Lançamento de uma moeda e o interesse ser a face cara;

Experimento de Bernoulli

Exemplos:

- Lançamento de uma moeda e o interesse ser a face cara;
- Lançamento de um dado e o interesse ser por faces pares;

Experimento de Bernoulli

Exemplos:

- Lançamento de uma moeda e o interesse ser a face cara;
- Lançamento de um dado e o interesse ser por faces pares;
- O tempo de vida de uma lâmpada ser maior que 8 anos;

Experimento de Bernoulli

Exemplos:

- Lançamento de uma moeda e o interesse ser a face cara;
- Lançamento de um dado e o interesse ser por faces pares;
- O tempo de vida de uma lâmpada ser maior que 8 anos;
- O corpo de um paciente não rejeitar um novo órgão transplantado;

Experimento de Bernoulli

Exemplos:

- Lançamento de uma moeda e o interesse ser a face cara;
- Lançamento de um dado e o interesse ser por faces pares;
- O tempo de vida de uma lâmpada ser maior que 8 anos;
- O corpo de um paciente não rejeitar um novo órgão transplantado;
- Um cliente ter um pedido de empréstimo aprovado.

Experimento de Bernoulli

Exemplos:

- Lançamento de uma moeda e o interesse ser a face cara;
- Lançamento de um dado e o interesse ser por faces pares;
- O tempo de vida de uma lâmpada ser maior que 8 anos;
- O corpo de um paciente não rejeitar um novo órgão transplantado;
- Um cliente ter um pedido de empréstimo aprovado.

Distribuição de Bernoulli

Seja a variável aleatória discreta (VAD) X: em um experimento de Bernoulli, com probabilidade de sucesso p,

Distribuição de Bernoulli

Seja a variável aleatória discreta (VAD) X: em um experimento de Bernoulli, com probabilidade de sucesso p,

$$X = \begin{cases} 1, & \text{se há a ocorrência do sucesso,} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Distribuição de Bernoulli

Seja a variável aleatória discreta (VAD) X: em um experimento de Bernoulli, com probabilidade de sucesso p,

$$X = \begin{cases} 1, & \text{se há a ocorrência do sucesso,} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Distribuição de Bernoulli

Exemplos:

- Em um único lançamento de uma moeda, $X = 1$ se a face for cara e $X = 0$, caso contrário;

Distribuição de Bernoulli

Exemplos:

- Em um único lançamento de uma moeda, $X = 1$ se a face for cara e $X = 0$, caso contrário;
- Ao se testar uma única lâmpada, $X = 1$ se o tempo de vida dela for maior que 8 anos e $X = 0$, caso contrário;

Distribuição de Bernoulli

Exemplos:

- Em um único lançamento de uma moeda, $X = 1$ se a face for cara e $X = 0$, caso contrário;
- Ao se testar uma única lâmpada, $X = 1$ se o tempo de vida dela for maior que 8 anos e $X = 0$, caso contrário;
- Para um determinado paciente, $X = 1$ se o seu corpo não rejeitar o órgão recém transplantado e $X = 0$, caso contrário.

Distribuição de Bernoulli

Exemplos:

- Em um único lançamento de uma moeda, $X = 1$ se a face for cara e $X = 0$, caso contrário;
- Ao se testar uma única lâmpada, $X = 1$ se o tempo de vida dela for maior que 8 anos e $X = 0$, caso contrário;
- Para um determinado paciente, $X = 1$ se o seu corpo não rejeitar o órgão recém transplantado e $X = 0$, caso contrário.

Distribuição de Bernoulli

Então, a VAD X tem distribuição de Bernoulli com probabilidade p, com distribuição de probabilidades da forma descrita pela Tabela 1.

Tabela 1: Distribuição de probabilidades de uma VAD Bernoulli.

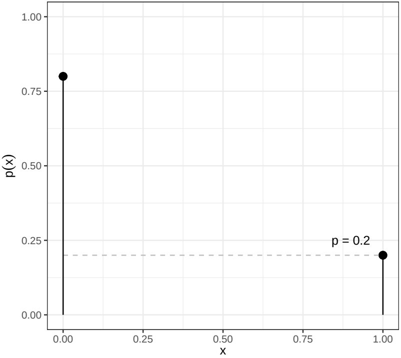
X	0	1
$p(X)$	$1-p$	p

Distribuição de Bernoulli

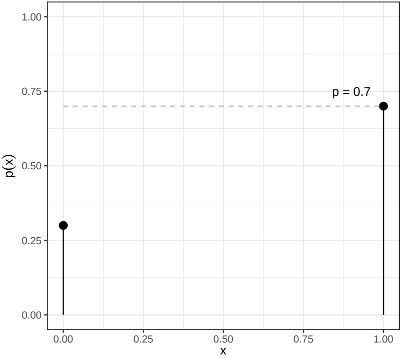
Então, a VAD X tem distribuição de Bernoulli com probabilidade p, com distribuição de probabilidades da forma descrita pela Tabela 1.

Tabela 1: Distribuição de probabilidades de uma VAD Bernoulli.

X	0	1
$p(X)$	$1-p$	p



(a) Probabilidade de sucesso 0,2.



(b) Probabilidade de sucesso 0,7.

Figura 1: Distribuição de probabilidades de uma VAD Bernoulli.

Distribuição de Bernoulli

A esperança e a variância de uma VAD X Bernoulli são, respectivamente:

- $\mathbb{E}(X) = p$.
- $\text{Var}(X) = p(1 - p)$.

Roteiro

Experimento binomial

Um experimento binomial tem **3 características**:

Experimento binomial

Um experimento binomial tem **3 características**:

1. uma realização com n **repetições independentes**;

Experimento binomial

Um experimento binomial tem **3 características**:

1. uma realização com n **repetições independentes**;
2. cada repetição admite apenas dois resultados: **sucesso** ou **fracasso**;

Experimento binomial

Um experimento binomial tem **3 características**:

1. uma realização com n **repetições independentes**;
2. cada repetição admite apenas dois resultados: **sucesso** ou **fracasso**;
3. a probabilidade de sucesso **não se altera** em cada repetição.

Experimento binomial

Um experimento binomial tem **3 características**:

1. uma realização com n **repetições independentes**;
2. cada repetição admite apenas dois resultados: **sucesso** ou **fracasso**;
3. a probabilidade de sucesso **não se altera** em cada repetição.

Experimento binomial

Observação

Um experimento binomial é a **soma** dos resultados de n experimentos **independentes** de Bernoulli.

Experimento binomial

Observação

Um experimento binomial é a **soma** dos resultados de n experimentos **independentes** de Bernoulli.

Distribuição binomial

Seja a VAD X: o número de sucessos em um experimento binomial, com n repetições e probabilidade de sucesso p.

Distribuição binomial

Seja a VAD X: o número de sucessos em um experimento binomial, com n repetições e probabilidade de sucesso p.

Distribuição binomial

Então, a VAD X tem distribuição binomial, com parâmetros n e p, de forma alternativa,

$$X \sim \text{binomial}(n, p) \text{ ou } X \sim \text{bin}(n, p).$$

Distribuição binomial

Então, a VAD X tem distribuição binomial, com parâmetros n e p, de forma alternativa,

$$X \sim \text{binomial}(n, p) \text{ ou } X \sim \text{bin}(n, p).$$

Distribuição binomial

Exemplos:

- Em um lançamento de uma moeda 10 vezes,

Distribuição binomial

Exemplos:

- Em um lançamento de uma moeda 10 vezes, o interesse é contar o número de faces caras;

Distribuição binomial

Exemplos:

- Em um lançamento de uma moeda 10 vezes, o interesse é contar o número de faces caras;
- Em um lote com 30 lâmpadas,

Distribuição binomial

Exemplos:

- Em um lançamento de uma moeda 10 vezes, o interesse é contar o número de faces caras;
- Em um lote com 30 lâmpadas, o interesse é contabilizar o número de lâmpadas em que o tempo de vida foi maior que 8 anos;

Distribuição binomial

Exemplos:

- Em um lançamento de uma moeda 10 vezes, o interesse é contar o número de faces caras;
- Em um lote com 30 lâmpadas, o interesse é contabilizar o número de lâmpadas em que o tempo de vida foi maior que 8 anos;
- Em um banco de dados com 1.500 clientes,

Distribuição binomial

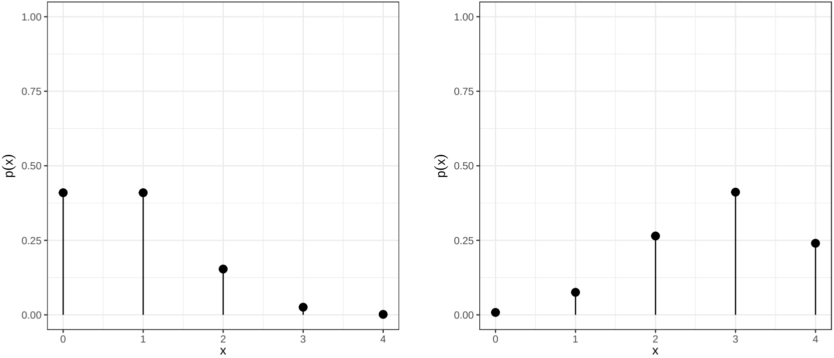
Exemplos:

- Em um lançamento de uma moeda 10 vezes, o interesse é contar o número de faces caras;
- Em um lote com 30 lâmpadas, o interesse é contabilizar o número de lâmpadas em que o tempo de vida foi maior que 8 anos;
- Em um banco de dados com 1.500 clientes, o interesse é contar quantos destes teriam um pedido de empréstimo aprovado.

Distribuição binomial

Exemplos:

- Em um lançamento de uma moeda 10 vezes, o interesse é contar o número de faces caras;
- Em um lote com 30 lâmpadas, o interesse é contabilizar o número de lâmpadas em que o tempo de vida foi maior que 8 anos;
- Em um banco de dados com 1.500 clientes, o interesse é contar quantos destes teriam um pedido de empréstimo aprovado.



(a) $n = 4$ e $p = 0{,}2$.   (b) $n = 4$ e $p = 0{,}7$.

Figura 2: Distribuição de probabilidades de uma VAD binomial.

Distribuição binomial

Interpretação

Quanto maior for a probabilidade de sucesso (p), mais provável será a obtenção de um valor "alto" da VA.

Distribuição binomial

Interpretação

Quanto maior for a probabilidade de sucesso (p), mais provável será a obtenção de um valor "alto" da VA.

Distribuição binomial

A esperança e variância de uma VAD X binomial são dadas, respectivamente, por

- $\mathbb{E}(X) = np$.
- $\text{Var}(X) = np(1-p)$.

Distribuição binomial

Exemplo. Em uma determinada instituição financeira, com 1.500 clientes, sabe-se que a probabilidade de qualquer cliente ter um empréstimo aprovado é de 0,4.

Distribuição binomial

Exemplo. Em uma determinada instituição financeira, com 1.500 clientes, sabe-se que a probabilidade de qualquer cliente ter um empréstimo aprovado é de 0,4. Se X: é o número de empréstimos aprovados nessa instituição,

Distribuição binomial

Exemplo. Em uma determinada instituição financeira, com 1.500 clientes, sabe-se que a probabilidade de qualquer cliente ter um empréstimo aprovado é de 0,4. Se X: é o número de empréstimos aprovados nessa instituição, $X \sim \text{bin}(1.500, 0{,}4)$.

Distribuição binomial

Exemplo. Em uma determinada instituição financeira, com 1.500 clientes, sabe-se que a probabilidade de qualquer cliente ter um empréstimo aprovado é de 0,4. Se X: é o número de empréstimos aprovados nessa instituição, $X \sim \text{bin}(1.500, 0{,}4)$. Então, nós teríamos que,

$$\mathbb{E}(X) = 1.500 \times 0{,}4 = 600,$$

$$\text{Var}(X) = 1.500 \times 0{,}4 \times (1 - 0{,}4) = 360.$$

Distribuição binomial

Exemplo. Em uma determinada instituição financeira, com 1.500 clientes, sabe-se que a probabilidade de qualquer cliente ter um empréstimo aprovado é de 0,4. Se X: é o número de empréstimos aprovados nessa instituição, $X \sim \text{bin}(1.500, 0{,}4)$. Então, nós teríamos que,

$$\mathbb{E}(X) = 1.500 \times 0{,}4 = 600,$$

$$\text{Var}(X) = 1.500 \times 0{,}4 \times (1 - 0{,}4) = 360.$$

Roteiro

Experimento geométrico

Um experimento geométrico tem **3 características**:

Experimento geométrico

Um experimento geométrico tem **3 características**:

1. só existem dois resultados possíveis: **sucesso** ou **fracasso**;

Experimento geométrico

Um experimento geométrico tem **3 características**:

1. só existem dois resultados possíveis: **sucesso** ou **fracasso**;
2. a probabilidade de sucesso **não se altera** durante a experimentação;

Experimento geométrico

Um experimento geométrico tem **3 características**:

1. só existem dois resultados possíveis: **sucesso** ou **fracasso**;
2. a probabilidade de sucesso **não se altera** durante a experimentação;
3. ele **não se encerra** até a ocorrência do primeiro sucesso.

Experimento geométrico

Um experimento geométrico tem **3 características**:

1. só existem dois resultados possíveis: **sucesso** ou **fracasso**;
2. a probabilidade de sucesso **não se altera** durante a experimentação;
3. ele **não se encerra** até a ocorrência do primeiro sucesso.

Distribuição geométrica

Seja a VAD X:

Distribuição geométrica

Seja a VAD X: o número de fracassos até a ocorrência do primeiro sucesso em um experimento geométrico, com probabilidade de sucesso p.

Distribuição geométrica

Seja a VAD X: o número de fracassos até a ocorrência do primeiro sucesso em um experimento geométrico, com probabilidade de sucesso p.

Distribuição geométrica

Então, a VAD X tem distribuição geométrica, com probabilidade p, de forma alternativa,

$$X \sim \text{geométrica}(p) \text{ ou } X \sim \text{geom}(p).$$

Distribuição geométrica

Então, a VAD X tem distribuição geométrica, com probabilidade p, de forma alternativa,

$$X \sim \text{geométrica}(p) \text{ ou } X \sim \text{geom}(p).$$

Distribuição geométrica

Exemplo. Suponham que o experimento é obter a figurinha do Gabriel Jesus do álbum da copa. Para isso, nós precisamos comprar pacotes de figurinhas.

Distribuição geométrica

Exemplo. Suponham que o experimento é obter a figurinha do Gabriel Jesus do álbum da copa. Para isso, nós precisamos comprar pacotes de figurinhas. Se nós a encontramos:

Distribuição geométrica

Exemplo. Suponham que o experimento é obter a figurinha do Gabriel Jesus do álbum da copa. Para isso, nós precisamos comprar pacotes de figurinhas. Se nós a encontramos:

- no primeiro pacote comprado,

Distribuição geométrica

Exemplo. Suponham que o experimento é obter a figurinha do Gabriel Jesus do álbum da copa. Para isso, nós precisamos comprar pacotes de figurinhas. Se nós a encontramos:

- no primeiro pacote comprado, nós tivemos 0 fracassos ($X = 0$),

Distribuição geométrica

Exemplo. Suponham que o experimento é obter a figurinha do Gabriel Jesus do álbum da copa. Para isso, nós precisamos comprar pacotes de figurinhas. Se nós a encontramos:

- no primeiro pacote comprado, nós tivemos 0 fracassos ($X = 0$),
- no segundo pacote,

Distribuição geométrica

Exemplo. Suponham que o experimento é obter a figurinha do Gabriel Jesus do álbum da copa. Para isso, nós precisamos comprar pacotes de figurinhas. Se nós a encontramos:

- no primeiro pacote comprado, nós tivemos 0 fracassos ($X = 0$),
- no segundo pacote, nós tivemos 1 fracasso ($X = 1$),

Distribuição geométrica

Exemplo. Suponham que o experimento é obter a figurinha do Gabriel Jesus do álbum da copa. Para isso, nós precisamos comprar pacotes de figurinhas. Se nós a encontramos:

- no primeiro pacote comprado, nós tivemos 0 fracassos ($X = 0$),
- no segundo pacote, nós tivemos 1 fracasso ($X = 1$),
- no terceiro,

Distribuição geométrica

Exemplo. Suponham que o experimento é obter a figurinha do Gabriel Jesus do álbum da copa. Para isso, nós precisamos comprar pacotes de figurinhas. Se nós a encontramos:

- no primeiro pacote comprado, nós tivemos 0 fracassos ($X = 0$),
- no segundo pacote, nós tivemos 1 fracasso ($X = 1$),
- no terceiro, nós tivemos 2 fracassos ($X = 2$),

Distribuição geométrica

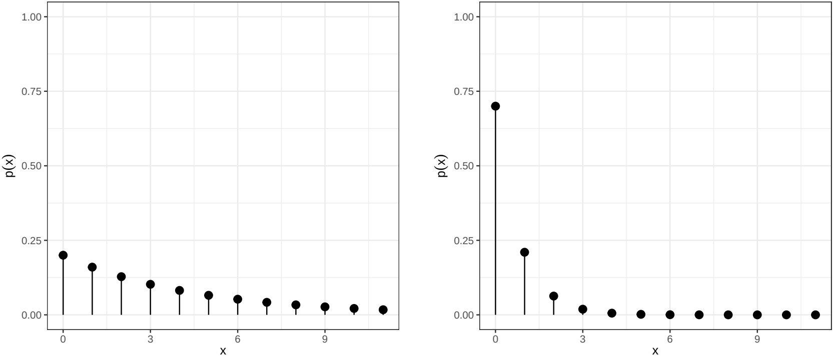
Exemplo. Suponham que o experimento é obter a figurinha do Gabriel Jesus do álbum da copa. Para isso, nós precisamos comprar pacotes de figurinhas. Se nós a encontramos:

- no primeiro pacote comprado, nós tivemos 0 fracassos ($X = 0$),
- no segundo pacote, nós tivemos 1 fracasso ($X = 1$),
- no terceiro, nós tivemos 2 fracassos ($X = 2$),
- ...

Distribuição geométrica

Exemplo. Suponham que o experimento é obter a figurinha do Gabriel Jesus do álbum da copa. Para isso, nós precisamos comprar pacotes de figurinhas. Se nós a encontramos:

- no primeiro pacote comprado, nós tivemos 0 fracassos ($X = 0$),
- no segundo pacote, nós tivemos 1 fracasso ($X = 1$),
- no terceiro, nós tivemos 2 fracassos ($X = 2$),
- ...



(a) $p = 0{,}2$. (b) $p = 0{,}7$.

Figura 3: Distribuição de probabilidades de uma VAD geométrica.

Distribuição geométrica

Interpretação

Quanto maior for a probabilidade de sucesso (p), mais improvável será a obtenção de um valor "alto" da VA,

Distribuição geométrica

Interpretação

Quanto maior for a probabilidade de sucesso (p), mais improvável será a obtenção de um valor "alto" da VA, isto é, haverá poucas repetições do experimento.

Distribuição geométrica

Interpretação

Quanto maior for a probabilidade de sucesso (p), mais improvável será a obtenção de um valor "alto" da VA, isto é, haverá poucas repetições do experimento.

Distribuição geométrica

A esperança e variância de uma VAD X geométrica são dadas, respectivamente, por

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1-p}{p} \text{ e } \mathrm{Var}(X) = \frac{1-p}{p^2}.$$

Distribuição de geométrica

Exemplo. Suponham que a probabilidade de encontrar uma figurinha do Gabriel Jesus em qualquer pacote do álbum da copa seja 0,033.

Distribuição de geométrica

Exemplo. Suponham que a probabilidade de encontrar uma figurinha do Gabriel Jesus em qualquer pacote do álbum da copa seja 0,033. Se X: é o número de pacotes comprados que não tinham o cromo do jogador,

Distribuição de geométrica

Exemplo. Suponham que a probabilidade de encontrar uma figurinha do Gabriel Jesus em qualquer pacote do álbum da copa seja 0,033. Se X: é o número de pacotes comprados que não tinham o cromo do jogador, $X \sim \text{geom}(0{,}033)$.

Distribuição de geométrica

Exemplo. Suponham que a probabilidade de encontrar uma figurinha do Gabriel Jesus em qualquer pacote do álbum da copa seja 0,033. Se X: é o número de pacotes comprados que não tinham o cromo do jogador, $X \sim \text{geom}(0{,}033)$. Então, nós teríamos que,

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1 - 0{,}033}{0{,}033} = 29{,}3,$$

$$\text{Var}(X) = \frac{1 - 0{,}033}{0{,}033^2} = 888.$$

Distribuição de geométrica

Exemplo. Suponham que a probabilidade de encontrar uma figurinha do Gabriel Jesus em qualquer pacote do álbum da copa seja 0,033. Se X: é o número de pacotes comprados que não tinham o cromo do jogador, $X \sim \text{geom}(0{,}033)$. Então, nós teríamos que,

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1 - 0{,}033}{0{,}033} = 29{,}3,$$

$$\text{Var}(X) = \frac{1 - 0{,}033}{0{,}033^2} = 888.$$

Roteiro

Exemplo

Carly e Sam são *influencers* no `Instagram`. A primeira tem 2.000 seguidores e a segunda tem 5.000.

Exemplo

Carly e Sam são *influencers* no `Instagram`. A primeira tem 2.000 seguidores e a segunda tem 5.000. Para qualquer *post*, Carly tem a probabilidade 0,5 de receber uma curtida e Sam tem 0,2.

Exemplo

Carly e Sam são *influencers* no `Instagram`. A primeira tem 2.000 seguidores e a segunda tem 5.000. Para qualquer *post*, Carly tem a probabilidade 0,5 de receber uma curtida e Sam tem 0,2.

Exemplo

Para promover os produtos Ivone, as duas *influencers* fizeram um acordo, em que receberiam 0,01 *bitcoins* por cada curtida recebida no *post* patrocinado.

Pergunta

Quem irá lucrar mais nessa campanha?

Exemplo

Para promover os produtos Ivone, as duas *influencers* fizeram um acordo, em que receberiam 0,01 *bitcoins* por cada curtida recebida no *post* patrocinado.

Pergunta

Quem irá lucrar mais nessa campanha?

Exemplo

Se C e S são as variáveis aleatórias discretas que descrevem o número de curtidas recebidas por Carly e Sam, respectivamente. Nós podemos assumir que

$$C \sim \text{binomial}(n = 2.000, p = 0{,}5) \text{ e } S \sim \text{binomial}(n = 5.000, p = 0{,}2).$$

Exemplo

Se C e S são as variáveis aleatórias discretas que descrevem o número de curtidas recebidas por Carly e Sam, respectivamente. Nós podemos assumir que

$$C \sim \text{binomial}(n = 2.000, p = 0{,}5) \text{ e } S \sim \text{binomial}(n = 5.000, p = 0{,}2).$$

Exemplo

Dessa forma,

$$\mathbb{E}(C) = 2.000 \times 0{,}5 = 1.000 \text{ e}$$

$$\mathbb{E}(S) = 5.000 \times 0{,}2 = 1.000,$$

Exemplo

Dessa forma,

$$\mathbb{E}(C) = 2.000 \times 0{,}5 = 1.000 \text{ e}$$

$$\mathbb{E}(S) = 5.000 \times 0{,}2 = 1.000,$$

isto é, **em média**, as duas recebem o mesmo número de curtidas e consequentemente, lucrariam igual, 10 *bitcoins*.

Exemplo

Dessa forma,

$$\mathbb{E}(C) = 2.000 \times 0{,}5 = 1.000 \text{ e}$$

$$\mathbb{E}(S) = 5.000 \times 0{,}2 = 1.000,$$

isto é, **em média**, as duas recebem o mesmo número de curtidas e consequentemente, lucrariam igual, 10 *bitcoins*.

Exemplo

Adicionalmente, nós temos que

$$\mathrm{Var}(C) = 2.000 \times 0{,}5 \times (1 - 0,5) = 500 \Rightarrow \mathrm{DP}(C) = 22{,}4,$$

$$\mathrm{Var}(S) = 5.000 \times 0{,}2 \times (1 - 0,2) = 800 \Rightarrow \mathrm{DP}(S) = 28{,}3.$$

Exemplo

Adicionalmente, nós temos que

$$\mathrm{Var}(C) = 2.000 \times 0{,}5 \times (1 - 0,5) = 500 \Rightarrow \mathrm{DP}(C) = 22{,}4,$$

$$\mathrm{Var}(S) = 5.000 \times 0{,}2 \times (1 - 0,2) = 800 \Rightarrow \mathrm{DP}(S) = 28{,}3.$$

Exemplo

Reflexão

Se uma instituição financeira, a *Goliath National Bank*, tivesse o interesse em contratar **somente uma** das duas *influencers* para uma campanha publicitária, quem deveria ser escolhida?

Exemplo

Reflexão

Se uma instituição financeira, a *Goliath National Bank*, tivesse o interesse em contratar **somente uma** das duas *influencers* para uma campanha publicitária, quem deveria ser escolhida?

Roteiro

Bibliografia

Anderson, D. R., D. J. Sweeney, T. A. Williams, J. D. Camm, and J. J. Cochran (2019). *Estatística Aplicada à Administração e Economia* (8th ed.). São Paulo: CENGAGE Learning.

Doane, D. P. and L. E. Seward (2014). *Estatística Aplicada à Administração e Economia* (4th ed.). Porto Alegre: McGraw-Hill.

Martins, G. A. and O. Domingues (2019). *Estatística Geral e Aplicada* (6th ed.). São Paulo: Atlas.

Obrigado!

✉ tiago.magalhaes@ufjf.br

🖰 ufjf.br/tiago_magalhaes

🌍 Departamento de Estatística, Sala 319