Análise de diagnóstico

Tiago M. Magalhães

Departamento de Estatística - ICE-UFJF

Juiz de Fora, 08 de maio de 2024

Roteiro

Roteiro

Modelo de regressão linear

Suponham que $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ tais que

$$Y_\ell = \boldsymbol{x}_\ell^\top \boldsymbol{\beta} + \varepsilon_\ell, \ \ell = 1, 2, \ldots, n, \tag{1}$$

Modelo de regressão linear

Suponham que $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ tais que

$$Y_\ell = \boldsymbol{x}_\ell^\top \boldsymbol{\beta} + \varepsilon_\ell, \ \ell = 1, 2, \ldots, n, \tag{1}$$

em que $\boldsymbol{x}_\ell = (x_{\ell 1}, x_{\ell 2}, \ldots, x_{\ell p})^\top$ é conhecido, $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p)^\top$ é um vetor de parâmetros desconhecidos a serem estimados, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ são variáveis aleatórias independentes e com a mesma variância σ^2, também desconhecida, a ser estimada.

Modelo de regressão linear

Suponham que $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ tais que

$$Y_\ell = \boldsymbol{x}_\ell^\top \boldsymbol{\beta} + \varepsilon_\ell, \ \ell = 1, 2, \ldots, n, \tag{1}$$

em que $\boldsymbol{x}_\ell = (x_{\ell 1}, x_{\ell 2}, \ldots, x_{\ell p})^\top$ é conhecido, $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p)^\top$ é um vetor de parâmetros desconhecidos a serem estimados, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ são variáveis aleatórias independentes e com a mesma variância σ^2, também desconhecida, a ser estimada.

Forma matricial

A Equação (1) pode ser escrita de forma matricial, da seguinte forma:

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X}\beta + \varepsilon, \tag{2}$$

Forma matricial

A Equação (1) pode ser escrita de forma matricial, da seguinte forma:

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X}\beta + \boldsymbol{\varepsilon}, \tag{2}$$

em que $\boldsymbol{Y} = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)^\top$, $\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n)^\top$ é a matriz de planejamento e $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)^\top$, com

$$\mathbb{E}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \mathbf{0} \text{ e } \mathrm{Var}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \sigma^2 \boldsymbol{I}_n.$$

Forma matricial

A Equação (1) pode ser escrita de forma matricial, da seguinte forma:

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X}\beta + \boldsymbol{\varepsilon}, \tag{2}$$

em que $\boldsymbol{Y} = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)^\top$, $\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n)^\top$ é a matriz de planejamento e $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)^\top$, com

$$\mathbb{E}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \mathbf{0} \text{ e } \mathrm{Var}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \sigma^2 \boldsymbol{I}_n.$$

Suposições

Resumindo,

- A relação entre as variáveis resposta e as preditoras é linear;

Suposições

Resumindo,

- A relação entre as variáveis resposta e as preditoras é linear;
- Os erros:

Suposições

Resumindo,

- A relação entre as variáveis resposta e as preditoras é linear;
- Os erros:
  - têm média zero;

Suposições

Resumindo,

- A relação entre as variáveis resposta e as preditoras é linear;
- Os erros:
  - têm média zero;
  - variância constante;

Suposições

Resumindo,

- A relação entre as variáveis resposta e as preditoras é linear;
- Os erros:
  - têm média zero;
  - variância constante;
  - e são não correlacionados.

Suposições

Resumindo,

- A relação entre as variáveis resposta e as preditoras é linear;
- Os erros:
  - têm média zero;
  - variância constante;
  - e são não correlacionados.

Roteiro

Pontos de alavanca

Seja a matriz chapéu (*hat matrix*) $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^\top$, com o seu ℓ-ésimo elemento da diagonal é dado por

$$h_{\ell\ell} = \boldsymbol{x}_\ell(\boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{x}_\ell^\top.$$

Pontos de alavanca

Seja a matriz chapéu (*hat matrix*) $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^\top$, com o seu ℓ-ésimo elemento da diagonal é dado por

$$h_{\ell\ell} = \boldsymbol{x}_\ell(\boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{x}_\ell^\top.$$

$h_{\ell\ell}$ é uma medida de distância entre ℓ-ésima observação e o espaço $\boldsymbol{x}$.

Pontos de alavanca

Seja a matriz chapéu (*hat matrix*) $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^\top$, com o seu ℓ-ésimo elemento da diagonal é dado por

$$h_{\ell\ell} = \boldsymbol{x}_\ell(\boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{x}_\ell^\top.$$

$h_{\ell\ell}$ é uma medida de distância entre ℓ-ésima observação e o espaço $\boldsymbol{x}$.

Pontos de alavanca

Observações:

- O tamanho médio da diagonal de $\boldsymbol{H}$ é p/n;

Pontos de alavanca

Observações:

- O tamanho médio da diagonal de $\boldsymbol{H}$ é p/n;
- Um ponto é considerado de alavanca, quando $h_{\ell\ell} > 2p/n$;

Pontos de alavanca

Observações:

- O tamanho médio da diagonal de $\boldsymbol{H}$ é p/n;
- Um ponto é considerado de alavanca, quando $h_{\ell\ell} > 2p/n$;
- Uma observação com grande $h_{\ell\ell}$ e um grande resíduo, provavelmente, será um ponto influente.

Pontos de alavanca

Observações:

- O tamanho médio da diagonal de $\boldsymbol{H}$ é p/n;
- Um ponto é considerado de alavanca, quando $h_{\ell\ell} > 2p/n$;
- Uma observação com grande $h_{\ell\ell}$ e um grande resíduo, provavelmente, será um ponto influente.

Roteiro

Pontos influentes

As medidas de influência são aquelas que medem o efeito da exclusão da ℓ-ésima observação.

Pontos influentes

- Distância de Cook, mede o efeito em $\widehat{\beta}$;

Pontos influentes

- Distância de Cook, mede o efeito em $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$;
- Dfbetas, mede o efeito em $\hat{\beta}_m$, $m = 1, 2, \ldots, p$;

Pontos influentes

- Distância de Cook, mede o efeito em $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$;
- Dfbetas, mede o efeito em $\hat{\beta}_m$, $m = 1, 2, \ldots, p$;
- Dffits, mede o efeito em $\hat{Y}_\ell$, $\ell = 1, 2, \ldots, n$;

Pontos influentes

- Distância de Cook, mede o efeito em $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$;
- Dfbetas, mede o efeito em $\hat{\beta}_m$, $m = 1, 2, \ldots, p$;
- Dffits, mede o efeito em $\hat{Y}_\ell$, $\ell = 1, 2, \ldots, n$;
- Covratio, mede o efeito na matriz de covariâncias.

Pontos influentes

- Distância de Cook, mede o efeito em $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$;
- Dfbetas, mede o efeito em $\hat{\beta}_m$, $m = 1, 2, \ldots, p$;
- Dffits, mede o efeito em $\hat{Y}_\ell$, $\ell = 1, 2, \ldots, n$;
- Covratio, mede o efeito na matriz de covariâncias.

Pontos influentes

A **distância de Cook** (Cook, 1977, 1979) serve para analisar o quão bem o modelo ajusta a observação Y_ℓ e quão a observação está distante do conjunto de dados.

Pontos influentes

A **distância de Cook** (Cook, 1977, 1979) serve para analisar o quão bem o modelo ajusta a observação Y_ℓ e quão a observação está distante do conjunto de dados. Esta medida é calculada da seguinte forma:

$$D_\ell = \frac{(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{(\ell)} - \widehat{\boldsymbol{\beta}})^\top (\boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{X})(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{(\ell)} - \widehat{\boldsymbol{\beta}})}{p\text{QMRes}} = \frac{r_\ell^2}{p} \frac{h_{\ell\ell}}{1 - h_{\ell\ell}}.$$

Pontos influentes

A **distância de Cook** (Cook, 1977, 1979) serve para analisar o quão bem o modelo ajusta a observação Y_ℓ e quão a observação está distante do conjunto de dados. Esta medida é calculada da seguinte forma:

$$D_\ell = \frac{(\widehat{\beta}_{(\ell)} - \widehat{\beta})^\top (\boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{X})(\widehat{\beta}_{(\ell)} - \widehat{\beta})}{p\text{QMRes}} = \frac{r_\ell^2}{p} \frac{h_{\ell\ell}}{1 - h_{\ell\ell}}.$$

Um valor será considerado influente se $D_\ell > 1$.

Pontos influentes

A **distância de Cook** (Cook, 1977, 1979) serve para analisar o quão bem o modelo ajusta a observação Y_ℓ e quão a observação está distante do conjunto de dados. Esta medida é calculada da seguinte forma:

$$D_\ell = \frac{(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{(\ell)} - \widehat{\boldsymbol{\beta}})^\top (\boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{X})(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{(\ell)} - \widehat{\boldsymbol{\beta}})}{p\text{QMRes}} = \frac{r_\ell^2}{p} \frac{h_{\ell\ell}}{1 - h_{\ell\ell}}.$$

Um valor será considerado influente se $D_\ell > 1$. A distância de Cook pode ser utilizada para verificar a influência conjunta de observações.

Pontos influentes

A **distância de Cook** (Cook, 1977, 1979) serve para analisar o quão bem o modelo ajusta a observação Y_ℓ e quão a observação está distante do conjunto de dados. Esta medida é calculada da seguinte forma:

$$D_\ell = \frac{(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{(\ell)} - \widehat{\boldsymbol{\beta}})^\top (\boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{X})(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{(\ell)} - \widehat{\boldsymbol{\beta}})}{p\text{QMRes}} = \frac{r_\ell^2}{p} \frac{h_{\ell\ell}}{1 - h_{\ell\ell}}.$$

Um valor será considerado influente se $D_\ell > 1$. A distância de Cook pode ser utilizada para verificar a influência conjunta de observações.

Pontos influentes

O **Dfbetas** (Belsley et al., 1980) mede o quanto o coeficiente de regressão se altera, em unidades de desvio padrão, quando a ℓ-ésima observação é removida. Esta medida é calculada da seguinte forma:

$$\text{Dfbetas}_{m,\ell} = \frac{\hat{\beta}_m - \hat{\beta}_{m(\ell)}}{\sqrt{S^2_{(\ell)} c_{mm}}},$$

Pontos influentes

O **Dfbetas** (Belsley et al., 1980) mede o quanto o coeficiente de regressão se altera, em unidades de desvio padrão, quando a ℓ-ésima observação é removida. Esta medida é calculada da seguinte forma:

$$\text{Dfbetas}_{m,\ell} = \frac{\hat{\beta}_m - \hat{\beta}_{m(\ell)}}{\sqrt{S^2_{(\ell)} c_{mm}}},$$

em que $\hat{\beta}_{m(\ell)}$ é o m-ésimo coeficiente estimado, quando a ℓ-ésima observação é removida.

Pontos influentes

O **Dfbetas** (Belsley et al., 1980) mede o quanto o coeficiente de regressão se altera, em unidades de desvio padrão, quando a ℓ-ésima observação é removida. Esta medida é calculada da seguinte forma:

$$\text{Dfbetas}_{m,\ell} = \frac{\hat{\beta}_m - \hat{\beta}_{m(\ell)}}{\sqrt{S^2_{(\ell)} c_{mm}}},$$

em que $\hat{\beta}_{m(\ell)}$ é o m-ésimo coeficiente estimado, quando a ℓ-ésima observação é removida. Um valor será considerado influente se $\text{Dfbetas}_{m,\ell} > 2/\sqrt{n}$.

Pontos influentes

O **Dfbetas** (Belsley et al., 1980) mede o quanto o coeficiente de regressão se altera, em unidades de desvio padrão, quando a ℓ-ésima observação é removida. Esta medida é calculada da seguinte forma:

$$\text{Dfbetas}_{m,\ell} = \frac{\hat{\beta}_m - \hat{\beta}_{m(\ell)}}{\sqrt{S^2_{(\ell)} c_{mm}}},$$

em que $\hat{\beta}_{m(\ell)}$ é o m-ésimo coeficiente estimado, quando a ℓ-ésima observação é removida. Um valor será considerado influente se $\text{Dfbetas}_{m,\ell} > 2/\sqrt{n}$.

Pontos influentes

O **Dffits** (*difference in fit(s)*, Belsley et al., 1980) mede a influência da ℓ-ésima observação no valor ajustado, em unidades de desvio padrão. Esta medida é calculada da seguinte forma:

$$\text{Dffits}_\ell = \frac{\hat{Y}_\ell - \hat{Y}_{(\ell)}}{\sqrt{S^2_{(\ell)} h_{\ell\ell}}}.$$

Pontos influentes

O **Dffits** (*difference in fit(s)*, Belsley et al., 1980) mede a influência da ℓ-ésima observação no valor ajustado, em unidades de desvio padrão. Esta medida é calculada da seguinte forma:

$$\text{Dffits}_\ell = \frac{\hat{Y}_\ell - \hat{Y}_{(\ell)}}{\sqrt{S^2_{(\ell)} h_{\ell\ell}}}.$$

Um valor será considerado influente se $\text{Dffits}_\ell > 2\sqrt{p/n}$.

Pontos influentes

O **Dffits** (*difference in fit(s)*, Belsley et al., 1980) mede a influência da ℓ-ésima observação no valor ajustado, em unidades de desvio padrão. Esta medida é calculada da seguinte forma:

$$\text{Dffits}_\ell = \frac{\hat{Y}_\ell - \hat{Y}_{(\ell)}}{\sqrt{S^2_{(\ell)} h_{\ell\ell}}}.$$

Um valor será considerado influente se $\text{Dffits}_\ell > 2\sqrt{p/n}$. Dfbetas e Dffits são medidas equivalentes, ver Montgomery et al. (2021).

Pontos influentes

O **Dffits** (*difference in fit(s)*, Belsley et al., 1980) mede a influência da ℓ-ésima observação no valor ajustado, em unidades de desvio padrão. Esta medida é calculada da seguinte forma:

$$\text{Dffits}_\ell = \frac{\hat{Y}_\ell - \hat{Y}_{(\ell)}}{\sqrt{S^2_{(\ell)} h_{\ell\ell}}}.$$

Um valor será considerado influente se $\text{Dffits}_\ell > 2\sqrt{p/n}$. Dfbetas e Dffits são medidas equivalentes, ver Montgomery et al. (2021).

Pontos influentes

A **Covratio** traz informações sobre a precisão geral da estimativa. Esta medida é calculada da seguinte forma:

$$\text{Covratio}_\ell = \frac{|(\boldsymbol{X}_\ell^\top \boldsymbol{X}_\ell)^{-1} S^2_{(\ell)}|}{|(\boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{X})^{-1} \text{QMRes}|} = \left[\frac{S^2_{(\ell)}}{\text{QMRes}}\right]^p \frac{h_{\ell\ell}}{1 - h_{\ell\ell}}.$$

Pontos influentes

A **Covratio** traz informações sobre a precisão geral da estimativa. Esta medida é calculada da seguinte forma:

$$\text{Covratio}_\ell = \frac{|(\boldsymbol{X}_\ell^\top \boldsymbol{X}_\ell)^{-1} S^2_{(\ell)}|}{|(\boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{X})^{-1} \text{QMRes}|} = \left[\frac{S^2_{(\ell)}}{\text{QMRes}}\right]^p \frac{h_{\ell\ell}}{1 - h_{\ell\ell}}.$$

Se $\text{Covratio}_\ell > 1$, a ℓ-ésima observação melhora a precisão do modelo mas, se $\text{Covratio}_\ell < 1$, ocorrerá o contrário.

Pontos influentes

A **Covratio** traz informações sobre a precisão geral da estimativa. Esta medida é calculada da seguinte forma:

$$\text{Covratio}_\ell = \frac{|(\boldsymbol{X}_\ell^\top \boldsymbol{X}_\ell)^{-1} S^2_{(\ell)}|}{|(\boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{X})^{-1} \text{QMRes}|} = \left[\frac{S^2_{(\ell)}}{\text{QMRes}}\right]^p \frac{h_{\ell\ell}}{1 - h_{\ell\ell}}.$$

Se $\text{Covratio}_\ell > 1$, a ℓ-ésima observação melhora a precisão do modelo mas, se $\text{Covratio}_\ell < 1$, ocorrerá o contrário. Uma alternativa é utilizar $1 + 3p/n$ e $1 - 3p/n$ como pontos de corte.

Pontos influentes

A **Covratio** traz informações sobre a precisão geral da estimativa. Esta medida é calculada da seguinte forma:

$$\text{Covratio}_\ell = \frac{|(\boldsymbol{X}_\ell^\top \boldsymbol{X}_\ell)^{-1} S^2_{(\ell)}|}{|(\boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{X})^{-1}\text{QMRes}|} = \left[\frac{S^2_{(\ell)}}{\text{QMRes}}\right]^p \frac{h_{\ell\ell}}{1-h_{\ell\ell}}.$$

Se $\text{Covratio}_\ell > 1$, a ℓ-ésima observação melhora a precisão do modelo mas, se $\text{Covratio}_\ell < 1$, ocorrerá o contrário. Uma alternativa é utilizar $1 + 3p/n$ e $1 - 3p/n$ como pontos de corte.

Pontos influentes

Uma vez que foi identificado observações influentes, elas poderão ser removidas caso sejam um erro de mensuração ou não pertençam a população de interesse. Caso contrário, elas deverão ser mantidas e a adoção de técnicas robustas é necessária,

Pontos influentes

Uma vez que foi identificado observações influentes, elas poderão ser removidas caso sejam um erro de mensuração ou não pertençam a população de interesse. Caso contrário, elas deverão ser mantidas e a adoção de técnicas robustas é necessária, por exemplo, metodologias que ponderam as observações.

Pontos influentes

Uma vez que foi identificado observações influentes, elas poderão ser removidas caso sejam um erro de mensuração ou não pertençam a população de interesse. Caso contrário, elas deverão ser mantidas e a adoção de técnicas robustas é necessária, por exemplo, metodologias que ponderam as observações.

Roteiro

Aplicação

(Montgomery et al., 2021, p. 180) Uma empresa de energia investiga a relação entre a demanda no horário de pico (Y, em kW) e total de energia (x_2, em kWh) utilizada durante o mês de agosto, com o gráfico de dispersão apresentado na Figura 1.

Aplicação

(Montgomery et al., 2021, p. 180) Uma empresa de energia investiga a relação entre a demanda no horário de pico (Y, em kW) e total de energia (x_2, em kWh) utilizada durante o mês de agosto, com o gráfico de dispersão apresentado na Figura 1. Após o ajuste dos dados, nós temos o seguinte modelo estimado,

$$\hat{Y}_\ell = -0{,}831 + 0{,}004 x_{\ell 2},$$

$\ell = 1, 2, \ldots, 53.$

Aplicação

(Montgomery et al., 2021, p. 180) Uma empresa de energia investiga a relação entre a demanda no horário de pico (Y, em kW) e total de energia (x_2, em kWh) utilizada durante o mês de agosto, com o gráfico de dispersão apresentado na Figura 1. Após o ajuste dos dados, nós temos o seguinte modelo estimado,

$$\hat{Y}_\ell = -0{,}831 + 0{,}004 x_{\ell 2},$$

$\ell = 1, 2, \ldots, 53.$

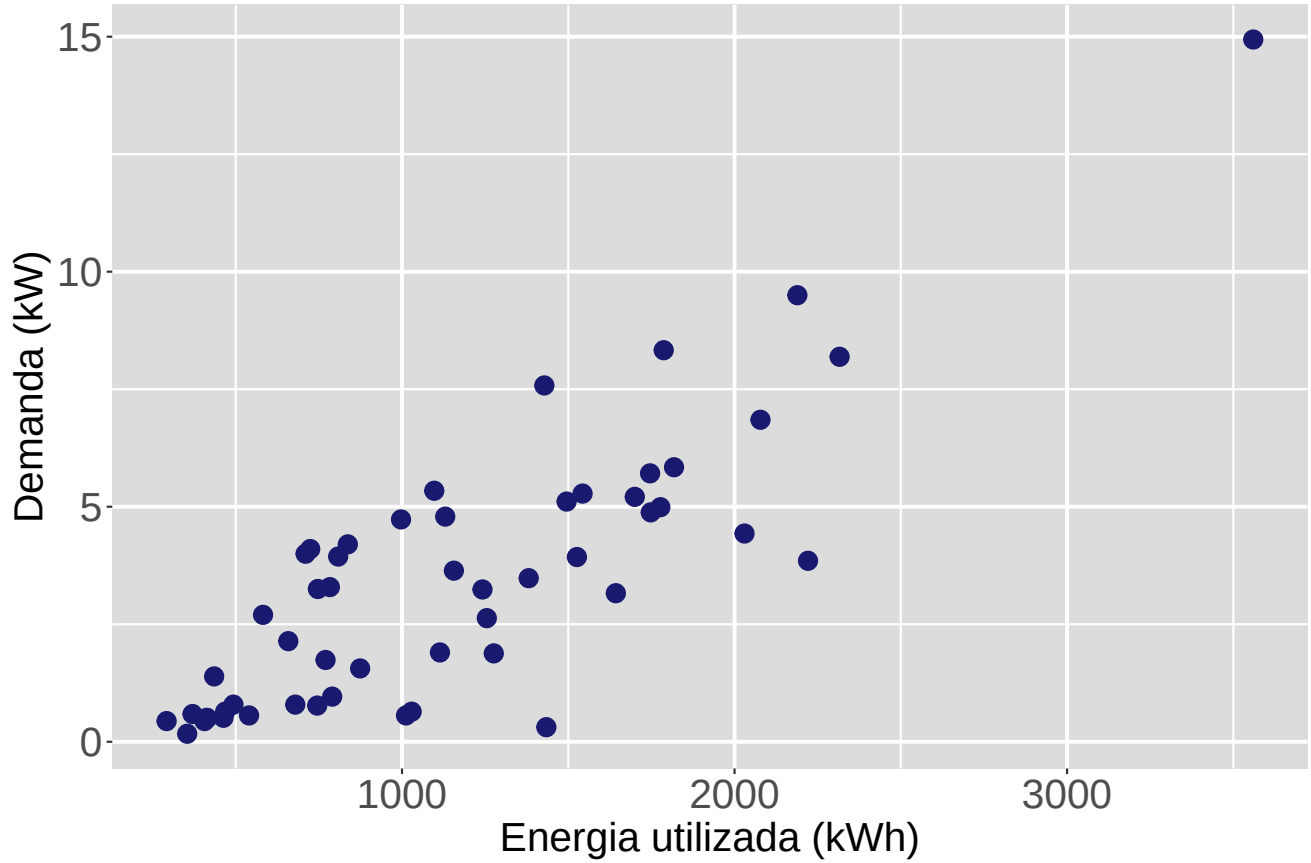


Figura 1: Gráfico de dispersão.

Exemplo

Nós temos também que:

Tabela 1: Estimativas do parâmetros.

Parâmetro	Estimativa	EP	t_c
β_1	-0,831	0,442	-1,882
β_2	0,004	0,001	11,030

Região crítica, para $\alpha = 5\%$: $|t_c| > 2{,}008$, com QMRes $= 2{,}488$.

Exemplo

Nós temos também que:

Tabela 1: Estimativas do parâmetros.

Parâmetro	Estimativa	EP	t_c
β_1	-0,831	0,442	-1,882
β_2	0,004	0,001	11,030

Região crítica, para $\alpha = 5\%$: $|t_c| > 2{,}008$, com QMRes $= 2{,}488$.

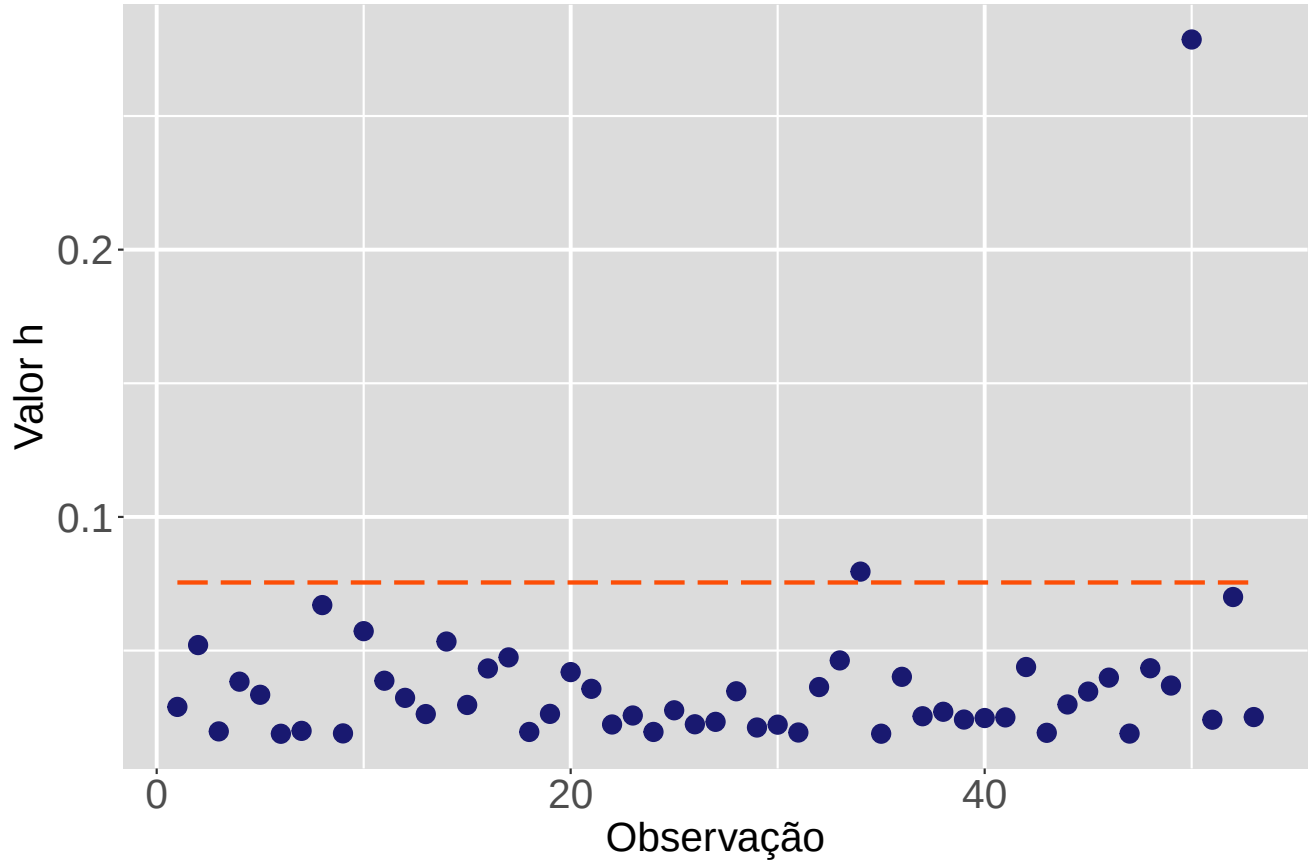


Figura 2: Gráfico de alavanca.

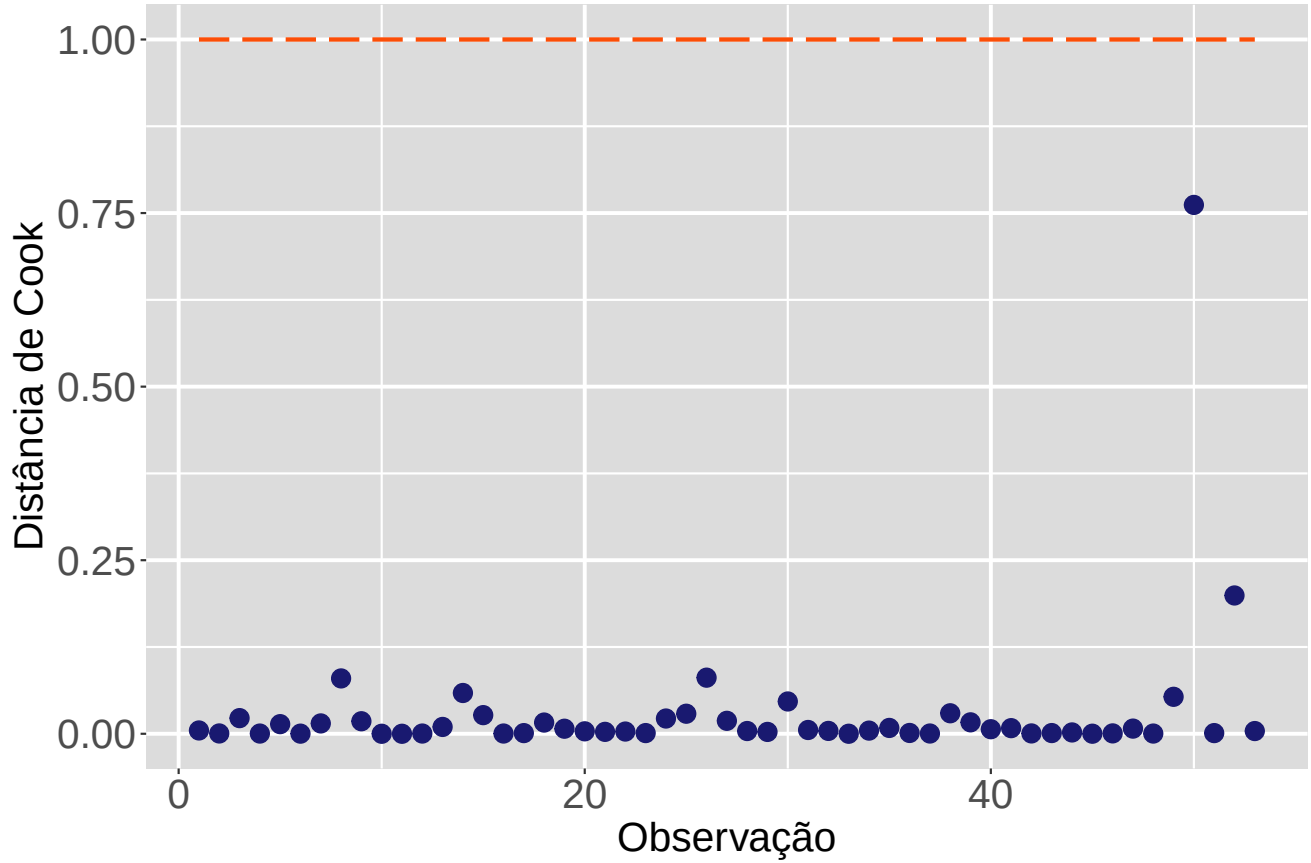
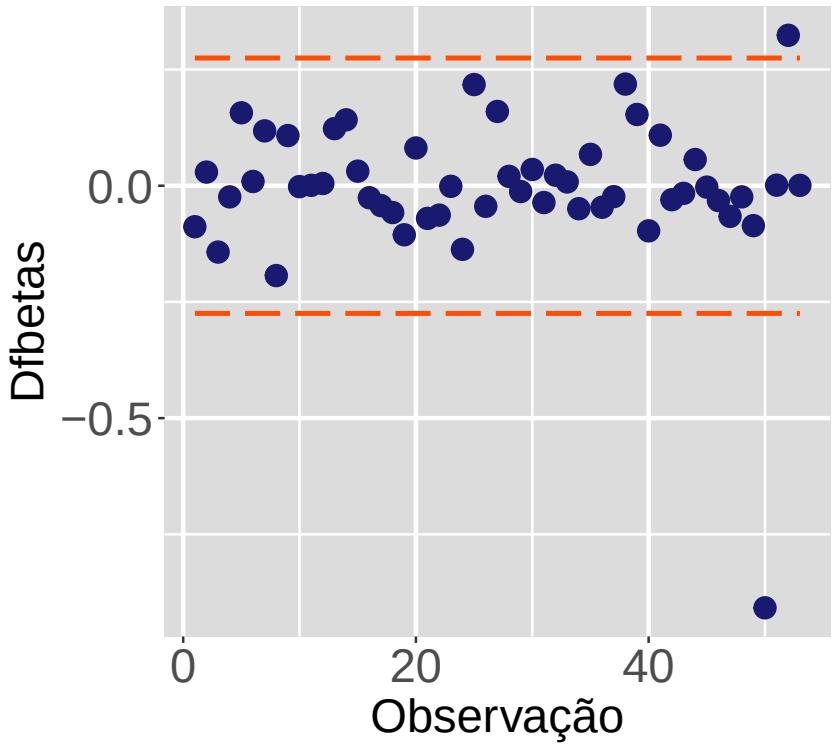
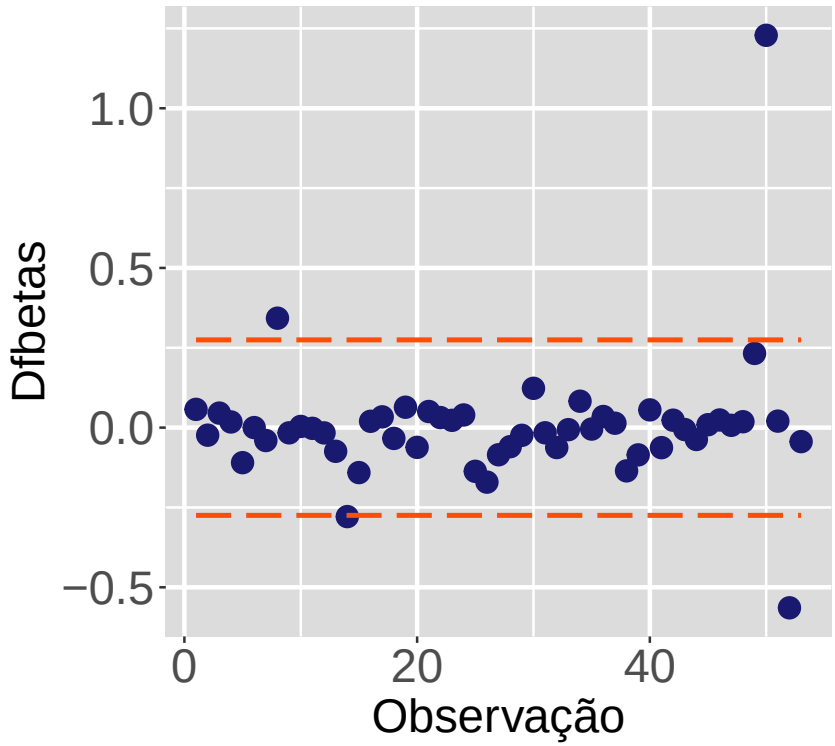


Figura 3: Distância de Cook.



(a) Intercepto.



(b) Demanda.

Figura 4: Dfbetas.

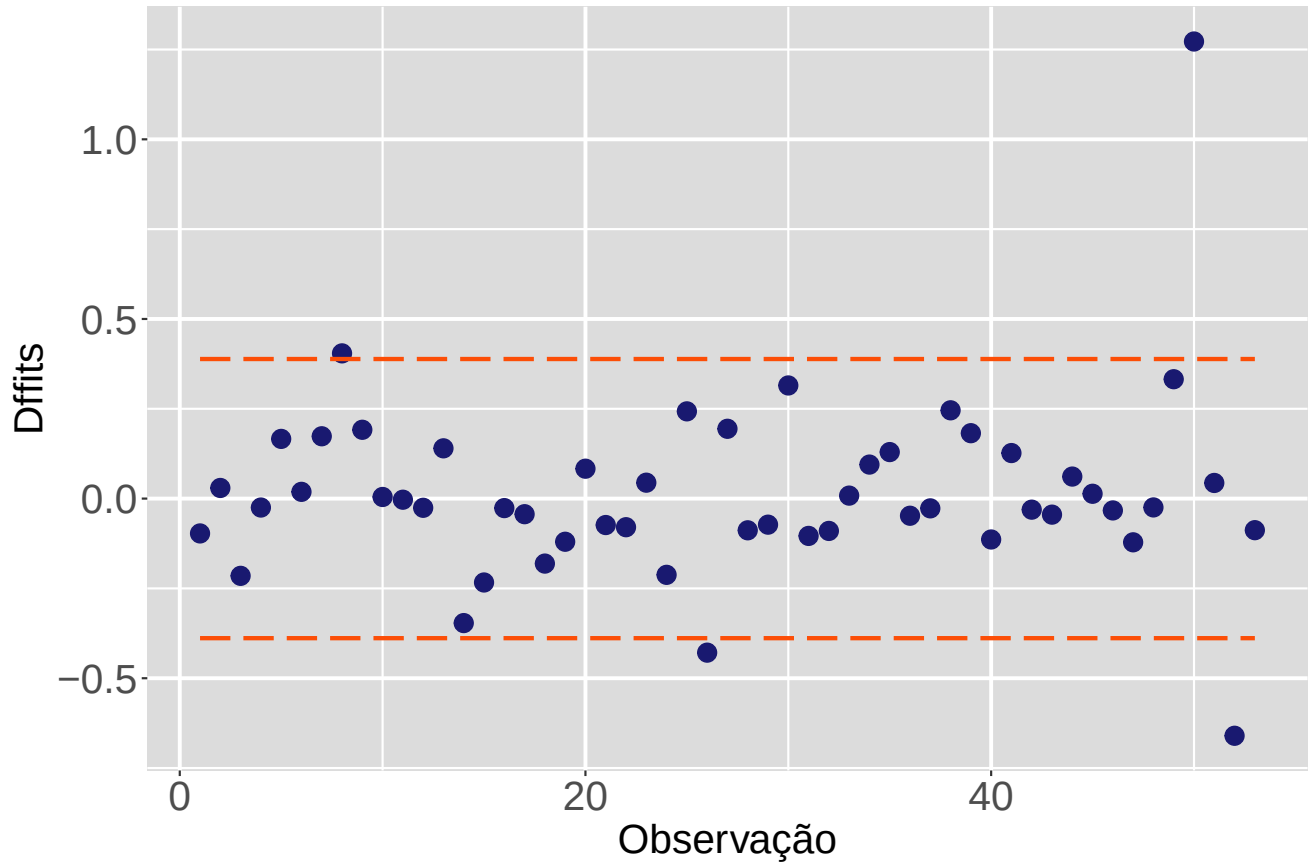


Figura 5: Dffits.

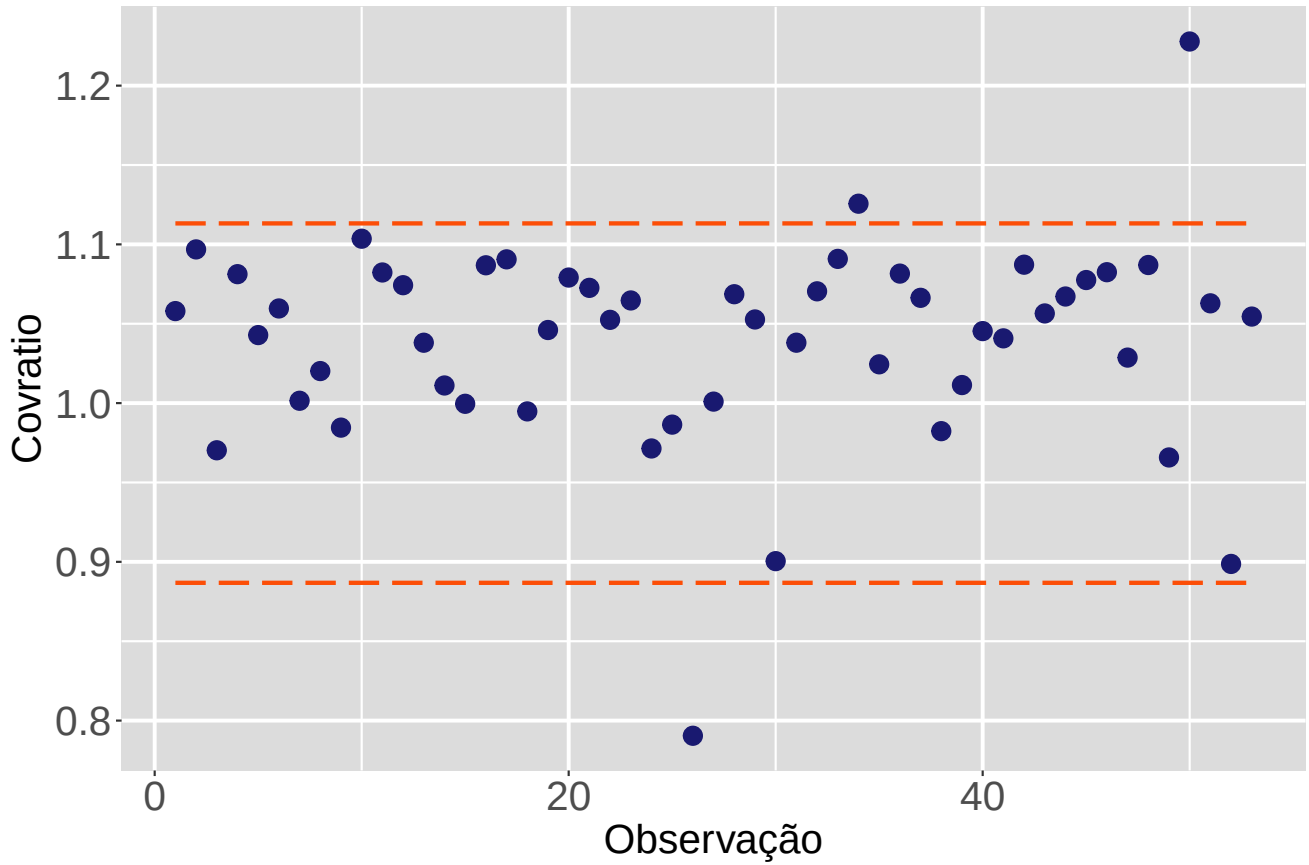


Figura 6: Covratio.

Roteiro

Referências bibliográficas I

Belsley, D. A., Kuh, E. e Welsch, R. E. (1980), *Regression Diagnostics: Identifying Influential Data and Sources of Collinearity*, Wiley, New York.

Cook, R. D. (1977), 'Detection of influential observation in linear regression', *Technometrics* **19**(1), 15–18.

Cook, R. D. (1979), 'Influential observations in linear regression', *Journal of the American Statistical Association* **74**(365), 169–174.

Montgomery, D. C., Peck, E. A. e Vining, G. G. (2021), *Introduction to linear regression analysis*, 6th edn, Wiley, New York.

Obrigado!

✉ tiago.magalhaes@ufjf.br

ufjf.br/tiago_magalhaes

Departamento de Estatística, Sala 319