Distribuição de probabilidades

Tiago M. Magalhães

Departamento de Estatística - ICE-UFJF

Juiz de Fora, 14 de maio de 2024

Roteiro

Roteiro

Distribuição de probabilidades

Defintção

Respeitando algumas condições, uma **distribuição de probabilidades** quantifica todos os possíveis valores (o suporte) de uma variável aleatória (VA).

Distribuição de probabilidades

Definção

Respeitando algumas condições, uma **distribuição de probabilidades** quantifica todos os possíveis valores (o suporte) de uma variável aleatória (VA).

Exemplo

Seja a VA X: o número de faces caras em um lançamento de duas moedas convencionais.

Exemplo

Seja a VA X: o número de faces caras em um lançamento de duas moedas convencionais. O suporte de X é dado por: $\mathcal{X} = \{0, 1, 2\}$. Nós temos que

Exemplo

Seja a VA X: o número de faces caras em um lançamento de duas moedas convencionais. O suporte de X é dado por: $\mathcal{X} = \{0, 1, 2\}$. Nós temos que

- A probabilidade de $X = 0$ é igual a $1/4$;

Exemplo

Seja a VA X: o número de faces caras em um lançamento de duas moedas convencionais. O suporte de X é dado por: $\mathcal{X} = \{0, 1, 2\}$. Nós temos que

- A probabilidade de $X = 0$ é igual a $1/4$;
- A probabilidade de $X = 1$ é igual a $2/4$;

Exemplo

Seja a VA X: o número de faces caras em um lançamento de duas moedas convencionais. O suporte de X é dado por: $\mathcal{X} = \{0, 1, 2\}$. Nós temos que

- A probabilidade de $X = 0$ é igual a $1/4$;
- A probabilidade de $X = 1$ é igual a $2/4$;
- A probabilidade de $X = 2$ é igual a $1/4$.

Exemplo

Seja a VA X: o número de faces caras em um lançamento de duas moedas convencionais. O suporte de X é dado por: $\mathcal{X} = \{0, 1, 2\}$. Nós temos que

- A probabilidade de $X = 0$ é igual a $1/4$;
- A probabilidade de $X = 1$ é igual a $2/4$;
- A probabilidade de $X = 2$ é igual a $1/4$.

Exemplo

Então, a distribuição de probabilidades da VA X é dada por

Tabela 1: Distribuição de probabilidades da VA X.

X	0	1	2
$p(X)$	$1/4$	$2/4$	$1/4$

Exemplo

A distribuição de probabilidades de X também pode ser representada por um figura, em que o eixo horizontal representa os valores pertencentes à $\mathcal{X}$ e no eixo vertical, a respectiva probabilidade.

A Figura 1 apresenta a distribuição de probabilidades da VA do exemplo anterior.

Exemplo

A distribuição de probabilidades de X também pode ser representada por um figura, em que o eixo horizontal representa os valores pertencentes à $\mathcal{X}$ e no eixo vertical, a respectiva probabilidade.

A Figura 1 apresenta a distribuição de probabilidades da VA do exemplo anterior.

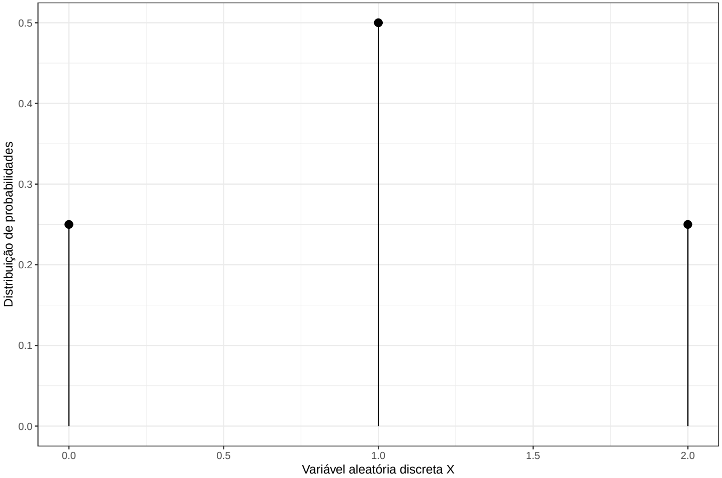


Figura 1: Distribuição de probabilidades da VAD X.

Exemplo

Observação

Notem que, pela Tabela 1, a **soma das probabilidades é igual a 1**.

Exemplo

Observação

Notem que, pela Tabela 1, a **soma das probabilidades é igual a 1**. Esta é uma **condição fundamental** para que um conjunto de probabilidades seja considerado uma distribuição de probabilidades.

Exemplo

Observação

Notem que, pela Tabela 1, a **soma das probabilidades é igual a 1**. Esta é uma **condição fundamental** para que um conjunto de probabilidades seja considerado uma distribuição de probabilidades.

Exemplo (continuação)

Seja a VA X: o número de faces caras em um lançamento de vinte moedas convencionais. O suporte de X é dado por: $\mathcal{X} = \{0, 1, \ldots, 20\}$.

Exemplo (continuação)

Seja a VA X: o número de faces caras em um lançamento de vinte moedas convencionais. O suporte de X é dado por: $\mathcal{X} = \{0, 1, \ldots, 20\}$.

Como a VA X tem 21 valores possíveis, representar sua distribuição de probabilidade por uma tabela não seria conveniente.

Exemplo (continuação)

Seja a VA X: o número de faces caras em um lançamento de vinte moedas convencionais. O suporte de X é dado por: $\mathcal{X} = \{0, 1, \ldots, 20\}$.

Como a VA X tem 21 valores possíveis, representar sua distribuição de probabilidade por uma tabela não seria conveniente. Para esse tipo de situação, nós utilizamos uma **função de probabilidades** (FP).

Exemplo (continuação)

Seja a VA X: o número de faces caras em um lançamento de vinte moedas convencionais. O suporte de X é dado por: $\mathcal{X} = \{0, 1, \ldots, 20\}$.

Como a VA X tem 21 valores possíveis, representar sua distribuição de probabilidade por uma tabela não seria conveniente. Para esse tipo de situação, nós utilizamos uma **função de probabilidades** (FP).

Função de probabilidades

Sejam X uma variável aleatória discreta (VAD), $\mathcal{X}$ seu respectivo suporte e $p(x)$ uma função que calcula a probabilidade da VAD X ser igual a um valor específico x.

Função de probabilidades

A função $p(x)$ é uma FP para a VAD X se respeita as seguintes condições:

1. Para todo elemento **dentro** do suporte, $0 < p(x) < 1$;

Função de probabilidades

A função $p(x)$ é uma FP para a VAD X se respeita as seguintes condições:

1. Para todo elemento **dentro** do suporte, $0 < p(x) < 1$;
2. Para todo elemento **fora** do suporte, $p(x) = 0$;

Função de probabilidades

A função $p(x)$ é uma FP para a VAD X se respeita as seguintes condições:

1. Para todo elemento **dentro** do suporte, $0 < p(x) < 1$;
2. Para todo elemento **fora** do suporte, $p(x) = 0$;
3. A **soma das probabilidades** de cada elemento dentro do suporte é **igual a 1**.

Função de probabilidades

A função $p(x)$ é uma FP para a VAD X se respeita as seguintes condições:

1. Para todo elemento **dentro** do suporte, $0 < p(x) < 1$;
2. Para todo elemento **fora** do suporte, $p(x) = 0$;
3. A **soma das probabilidades** de cada elemento dentro do suporte é **igual a 1**.

Exemplo (continuação)

Seja a VA X: o número de faces caras em um lançamento de vinte moedas convencionais, com suporte dado por: $\mathcal{X} = \{0, 1, \ldots, 20\}$. Sua função de probabilidade é dada por

$$\mathbb{P}(X = x) = \binom{20}{x} \left(\frac{1}{2}\right)^{20}, \ x \in \mathcal{X}.$$

Função de probabilidades

As **variáveis aleatórias contínuas** (VAC) são VA que se originam de mensurações. Por conta disso, a quantificação da probabilidade para valores específicos não é possível e, consequentemente, o uso da **FP está descartado**.

Função de probabilidades

As **variáveis aleatórias contínuas** (VAC) são VA que se originam de mensurações. Por conta disso, a quantificação da probabilidade para valores específicos não é possível e, consequentemente, o uso da **FP está descartado**. A alternativa é utilizar a **função densidade de probabilidades** (FDP).

Função de probabilidades

As **variáveis aleatórias contínuas** (VAC) são VA que se originam de mensurações. Por conta disso, a quantificação da probabilidade para valores específicos não é possível e, consequentemente, o uso da **FP está descartado**. A alternativa é utilizar a **função densidade de probabilidades** (FDP).

Função densidade de probabilidades

Sejam X uma VAC, $\mathcal{X}$ seu respectivo suporte (no caso, um intervalo) e $f(x)$ uma função que auxilia no cálculo da probabilidade da VAC X pertencer a um intervalo (x_1, x_2).

Função densidade de probabilidades

Sejam X uma VAC, $\mathcal{X}$ seu respectivo suporte (no caso, um intervalo) e $f(x)$ uma função que auxilia no cálculo da probabilidade da VAC X pertencer a um intervalo (x_1, x_2).

Função densidade de probabilidades

Exemplos:

- X é a quantidade de chuva (mm)

Função densidade de probabilidades

Exemplos:

- X é a quantidade de chuva (mm) e o interesse é saber, para um determinado dia, a probabilidade de chover entre 20 e 30mm;

Função densidade de probabilidades

Exemplos:

- X é a quantidade de chuva (mm) e o interesse é saber, para um determinado dia, a probabilidade de chover entre 20 e 30mm;
- X é o tempo (meses) para a `Netflix` produzir a nova temporada de *Stranger Things*

Função densidade de probabilidades

Exemplos:

- X é a quantidade de chuva (mm) e o interesse é saber, para um determinado dia, a probabilidade de chover entre 20 e 30mm;
- X é o tempo (meses) para a `Netflix` produzir a nova temporada de *Stranger Things* e o interesse é saber a probabilidade da temporada ficar pronta entre 4 e 8 meses.

Função densidade de probabilidades

Exemplos:

- X é a quantidade de chuva (mm) e o interesse é saber, para um determinado dia, a probabilidade de chover entre 20 e 30mm;
- X é o tempo (meses) para a `Netflix` produzir a nova temporada de *Stranger Things* e o interesse é saber a probabilidade da temporada ficar pronta entre 4 e 8 meses.

Função densidade de probabilidades

A função $f(x)$ é uma FDP para a VAC X se respeita as seguintes condições:

1. Para todo valor **dentro** do suporte, $f(x) > 0$;

Função densidade de probabilidades

A função $f(x)$ é uma FDP para a VAC X se respeita as seguintes condições:

1. Para todo valor **dentro** do suporte, $f(x) > 0$;
2. Para todo valor **fora** do suporte, $f(x) = 0$;

Função densidade de probabilidades

A função $f(x)$ é uma FDP para a VAC X se respeita as seguintes condições:

1. Para todo valor **dentro** do suporte, $f(x) > 0$;
2. Para todo valor **fora** do suporte, $f(x) = 0$;
3. A **integral** de $f(x)$ do limite inferior ao limite superior do suporte é **igual a 1**.

Função densidade de probabilidades

A função $f(x)$ é uma FDP para a VAC X se respeita as seguintes condições:

1. Para todo valor **dentro** do suporte, $f(x) > 0$;
2. Para todo valor **fora** do suporte, $f(x) = 0$;
3. A **integral** de $f(x)$ do limite inferior ao limite superior do suporte é **igual a 1**.

Função densidade de probabilidades

Observações:

1. O valor da FDP $f(x)$ avaliada em um ponto especifico, não tem um significado prático;

Função densidade de probabilidades

Observações:

1. O valor da FDP $f(x)$ avaliada em um ponto especifico, não tem um significado prático;
2. Integrar $f(x)$ significa calcular a área de uma região, no caso, calcular a probabilidade de um evento ocorrer.

Função densidade de probabilidades

Observações:

1. O valor da FDP $f(x)$ avaliada em um ponto especifico, não tem um significado prático;
2. Integrar $f(x)$ significa calcular a área de uma região, no caso, calcular a probabilidade de um evento ocorrer.

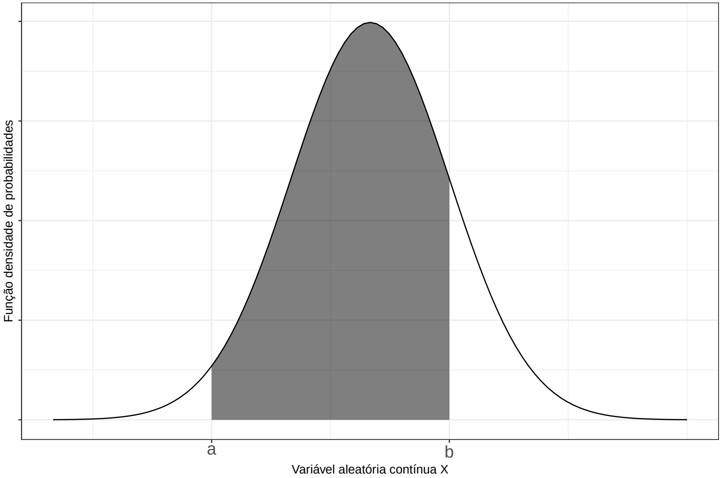


Figura 2: A probabilidade da VAC X estar entre a e b.

Roteiro

Função distribuição acumulada

Definição

Sejam X uma VA, $\mathcal{X}$ seu respectivo suporte

Função distribuição acumulada

Definição

Sejam X uma VA, $\mathcal{X}$ seu respectivo suporte e $F(x)$ uma função que calcula a probabilidade da VA X ser menor ou igual a um valor específico x.

Função distribuição acumulada

Definição

Sejam X uma VA, $\mathcal{X}$ seu respectivo suporte e $F(x)$ uma função que calcula a probabilidade da VA X ser menor ou igual a um valor específico x.

Função distribuição acumulada

A $F(x)$ é uma **função distribuição acumulada** (FDA) se ela tem as seguintes propriedades:

- $F(x)$ é não decrescente;

Função distribuição acumulada

A $F(x)$ é uma **função distribuição acumulada** (FDA) se ela tem as seguintes propriedades:

- $F(x)$ é não decrescente;
- A probabilidade de X ser menor que o seu máximo é igual a 1;

Função distribuição acumulada

A $F(x)$ é uma **função distribuição acumulada** (FDA) se ela tem as seguintes propriedades:

- $F(x)$ é não decrescente;
- A probabilidade de X ser menor que o seu máximo é igual a 1;
- A probabilidade de X ser menor que o seu mínimo é igual a 0.

Função distribuição acumulada

A $F(x)$ é uma **função distribuição acumulada** (FDA) se ela tem as seguintes propriedades:

- $F(x)$ é não decrescente;
- A probabilidade de X ser menor que o seu máximo é igual a 1;
- A probabilidade de X ser menor que o seu mínimo é igual a 0.

Função distribuição acumulada

Para o exemplo anterior,

X	0	1	2
$p(X)$	$1/4$	$2/4$	$1/4$

em que a VAD X: o número de faces caras em um lançamento de duas moedas convencionais, $\mathcal{X} = \{0, 1, 2\}$.

Função distribuição acumulada

Nós temos que

- $F(0)$, a probabilidade de $X \leq 0$ é igual a $1/4$

Função distribuição acumulada

Nós temos que

- $F(0)$, a probabilidade de $X \leq 0$ é igual a $1/4 = p(0)$;

Função distribuição acumulada

Nós temos que

- $F(0)$, a probabilidade de $X \leq 0$ é igual a $1/4 = p(0)$;
- $F(1)$, a probabilidade de $X \leq 1$ é igual a $3/4$

Função distribuição acumulada

Nós temos que

- $F(0)$, a probabilidade de $X \leq 0$ é igual a $1/4 = p(0)$;
- $F(1)$, a probabilidade de $X \leq 1$ é igual a $3/4 = p(0) + p(1)$;

Função distribuição acumulada

Nós temos que

- $F(0)$, a probabilidade de $X \leq 0$ é igual a $1/4 = p(0)$;
- $F(1)$, a probabilidade de $X \leq 1$ é igual a $3/4 = p(0) + p(1)$;
- $F(2)$, a probabilidade de $X \leq 2$ é igual a 1

Função distribuição acumulada

Nós temos que

- $F(0)$, a probabilidade de $X \leq 0$ é igual a $1/4 = p(0)$;
- $F(1)$, a probabilidade de $X \leq 1$ é igual a $3/4 = p(0) + p(1)$;
- $F(2)$, a probabilidade de $X \leq 2$ é igual a $1 = p(0) + p(1) + p(2)$.

Função distribuição acumulada

Nós temos que

- $F(0)$, a probabilidade de $X \leq 0$ é igual a $1/4 = p(0)$;
- $F(1)$, a probabilidade de $X \leq 1$ é igual a $3/4 = p(0) + p(1)$;
- $F(2)$, a probabilidade de $X \leq 2$ é igual a $1 = p(0) + p(1) + p(2)$.

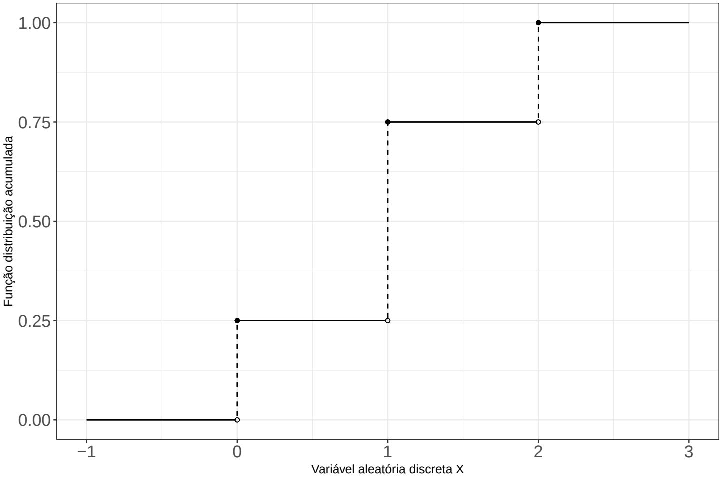


Figura 3: Função distribuição acumulada da VAD X.

Roteiro

Momentos

Motivação

Momentos são quantidades que sintetizam uma variável aleatória.

Momentos

Motivação

Momentos são quantidades que sintetizam uma variável aleatória.

Esperança

Definição

A esperança ou valor esperado de uma VA X é, simplesmente, a média dos seus possíveis valores.

Esperança

Definição

A esperança ou valor esperado de uma VA X é, simplesmente, a média dos seus possíveis valores. Porém, a esperança leva em consideração a probabilidade de ocorrência de cada possível valor de X.

Esperança

Definição

A esperança ou valor esperado de uma VA X é, simplesmente, a média dos seus possíveis valores. Porém, a esperança leva em consideração a probabilidade de ocorrência de cada possível valor de X.

Variância

Definição

A variância mede o grau de dispersão dos valores de uma VA X em torno da sua esperança.

Variância

Definição

A variância mede o grau de dispersão dos valores de uma VA X em torno da sua esperança.

Exemplos

Exemplo 1. Suponham os seguintes jogos:

1. X: No lançamento de uma moeda honesta, o jogador ganha R$ 50 se a face for cara e perde R$ 50 se a face for coroa;

Exemplos

Exemplo 1. Suponham os seguintes jogos:

1. X: No lançamento de uma moeda honesta, o jogador ganha R$ 50 se a face for cara e perde R$ 50 se a face for coroa;

2. Y: No lançamento de uma moeda, em que a probabilidade da face ser cara é $4/5$ e coroa $1/5$, o jogador ganha R$ 50 se a face for cara e perde R$ 200 se a face for coroa.

Exemplos

Exemplo 1. Suponham os seguintes jogos:

1. X: No lançamento de uma moeda honesta, o jogador ganha R$ 50 se a face for cara e perde R$ 50 se a face for coroa;
2. Y: No lançamento de uma moeda, em que a probabilidade da face ser cara é $4/5$ e coroa $1/5$, o jogador ganha R$ 50 se a face for cara e perde R$ 200 se a face for coroa.

Pergunta: Qual dos dois jogos é honesto?

Exemplos

Exemplo 1. Suponham os seguintes jogos:

1. X: No lançamento de uma moeda honesta, o jogador ganha R\$ 50 se a face for cara e perde R\$ 50 se a face for coroa;
2. Y: No lançamento de uma moeda, em que a probabilidade da face ser cara é $4/5$ e coroa $1/5$, o jogador ganha R\$ 50 se a face for cara e perde R\$ 200 se a face for coroa.

Pergunta: Qual dos dois jogos é honesto? Isto é, a valor esperado de ganho é zero.

Exemplos

Exemplo 1. Suponham os seguintes jogos:

1. X: No lançamento de uma moeda honesta, o jogador ganha R\$ 50 se a face for cara e perde R\$ 50 se a face for coroa;
2. Y: No lançamento de uma moeda, em que a probabilidade da face ser cara é $4/5$ e coroa $1/5$, o jogador ganha R\$ 50 se a face for cara e perde R\$ 200 se a face for coroa.

Pergunta: Qual dos dois jogos é honesto? Isto é, a valor esperado de ganho é zero.

Exemplos

Para o jogo X:

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{2} \times (-50) + \frac{1}{2} \times 50 = 0.$$

Exemplos

Para o jogo X:

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{2} \times (-50) + \frac{1}{2} \times 50 = 0.$$

Para o jogo Y:

Exemplos

Para o jogo X:

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{2} \times (-50) + \frac{1}{2} \times 50 = 0.$$

Para o jogo Y:

$$\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{5} \times (-200) + \frac{4}{5} \times 50 = 0.$$

Exemplos

Para o jogo X:

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{2} \times (-50) + \frac{1}{2} \times 50 = 0.$$

Para o jogo Y:

$$\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{5} \times (-200) + \frac{4}{5} \times 50 = 0.$$

Logo, os dois jogos são honestos (justos), pois o ganho esperado nos dois jogos é zero.

Exemplos

Para o jogo X:

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{2} \times (-50) + \frac{1}{2} \times 50 = 0.$$

Para o jogo Y:

$$\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{5} \times (-200) + \frac{4}{5} \times 50 = 0.$$

Logo, os dois jogos são honestos (justos), pois o ganho esperado nos dois jogos é zero.

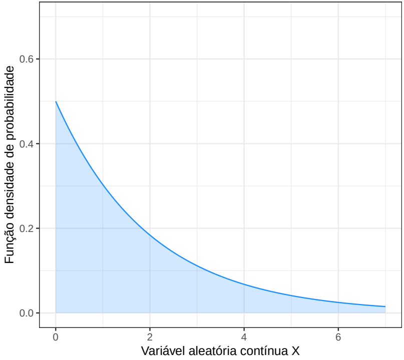
Exemplo 2. Suponham duas funcionárias Hilary e Ashley. Após um longo estudo, o gestor delas, Philip, conseguiu descrever o tempo (em dias) de entrega das tarefas destas duas por duas variáveis aleatórias, X e Y, ver Figuras 4a e 4b, respectivamente.

Pergunta: Pela Figura 4, é possível afirmar quem entregará primeiro o próximo trabalho?

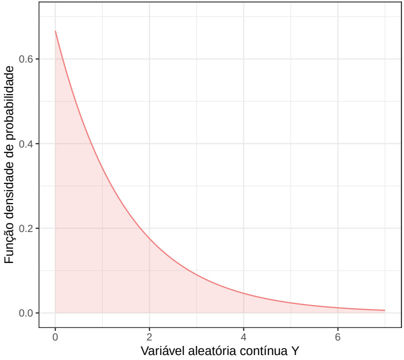
Exemplos

Exemplo 2. Suponham duas funcionárias Hilary e Ashley. Após um longo estudo, o gestor delas, Philip, conseguiu descrever o tempo (em dias) de entrega das tarefas destas duas por duas variáveis aleatórias, X e Y, ver Figuras 4a e 4b, respectivamente.

Pergunta: Pela Figura 4, é possível afirmar quem entregará primeiro o próximo trabalho?



(a) Hilary.



(b) Ashley.

Figura 4: Distribuição dos tempos (em dias) de entrega.

Exemplos

Somente pela visualização da Figura 4, não é possível determinar claramente quem será a primeira a entregar.

Porém, se o gestor sabe que $\mathbb{E}(X) = 2$ e $\mathbb{E}(Y) = 1{,}5$.

Exemplos

Somente pela visualização da Figura 4, não é possível determinar claramente quem será a primeira a entregar.

Porém, se o gestor sabe que $\mathbb{E}(X) = 2$ e $\mathbb{E}(Y) = 1{,}5$. Nós podemos afirmar que, **em média**, a Ashley entrega suas tarefas **em um tempo menor** do que a Hilary.

Exemplos

Somente pela visualização da Figura 4, não é possível determinar claramente quem será a primeira a entregar.

Porém, se o gestor sabe que $\mathbb{E}(X) = 2$ e $\mathbb{E}(Y) = 1{,}5$. Nós podemos afirmar que, **em média**, a Ashley entrega suas tarefas **em um tempo menor** do que a Hilary.

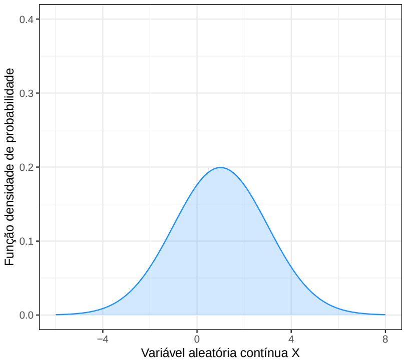
Exemplo 3. Após mais alguns estudos, Philip descreveu o tempo (em dias) de entrega das tarefas de Hilary e Ashley por duas variáveis aletórias com FDP descrita pelas Figuras 5a e 5b, respectivamente. De tal forma que, esta VA tem

- média 1 e desvio padrão igual a 2, para a Hilary;
- média 2 e desvio padrão igual a 1, para a Ashley.

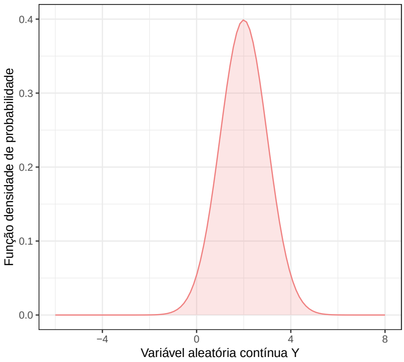
Exemplos

Exemplo 3. Após mais alguns estudos, Philip descreveu o tempo (em dias) de entrega das tarefas de Hilary e Ashley por duas variáveis aletórias com FDP descrita pelas Figuras 5a e 5b, respectivamente. De tal forma que, esta VA tem

- média 1 e desvio padrão igual a 2, para a Hilary;
- média 2 e desvio padrão igual a 1, para a Ashley.



(a) Hilary.



(b) Ashley.

Figura 5: Distribuição dos tempos (em dias) de entrega.

Exemplos

Pergunta

Se uma tarefa **importante** e **urgente** precisa ser atribuída a uma das duas funcionárias. Quem deveria receber esta importante atribuição? Por quê?

Exemplos

Pergunta

Se uma tarefa **importante** e **urgente** precisa ser atribuída a uma das duas funcionárias. Quem deveria receber esta importante atribuição? Por quê?

Roteiro

Bibliografia

Anderson, D. R., D. J. Sweeney, T. A. Williams, J. D. Camm, and J. J. Cochran (2019). *Estatística Aplicada à Administração e Economia* (8th ed.). São Paulo: CENGAGE Learning.

Doane, D. P. and L. E. Seward (2014). *Estatística Aplicada à Administração e Economia* (4th ed.). Porto Alegre: McGraw-Hill.

Martins, G. A. and O. Domingues (2019). *Estatística Geral e Aplicada* (6th ed.). São Paulo: Atlas.

Obrigado!

✉ tiago.magalhaes@ufjf.br

ufjf.br/tiago_magalhaes

Departamento de Estatística, Sala 319