

# Variáveis aleatórias

Tiago M. Magalhães

Departamento de Estatística - ICE-UFJF

Juiz de Fora, 10 de maio de 2024



# Roteiro

- 1 Introdução
- 2 Tipos de variáveis aleatórias
- 3 Observação
- 4 Bibliografia



# Roteiro

- 1 Introdução
- 2 Tipos de variáveis aleatórias
- 3 Observação
- 4 Bibliografia



# Introdução

## Variáveis aleatórias

Sejam um experimento  $\varepsilon$  e  $\Omega$  o seu respectivo espaço amostral, isto é, todos valores possíveis de  $\varepsilon$ .



# Introdução

## Variáveis aleatórias

Sejam um experimento  $\varepsilon$  e  $\Omega$  o seu respectivo espaço amostral, isto é, todos valores possíveis de  $\varepsilon$ . Nós definimos como **variável aleatória** (VA) qualquer função que associe um número real a cada elemento de  $\Omega$ .



# Introdução

## Variáveis aleatórias

Sejam um experimento  $\varepsilon$  e  $\Omega$  o seu respectivo espaço amostral, isto é, todos valores possíveis de  $\varepsilon$ . Nós definimos como **variável aleatória** (VA) qualquer função que associe um número real a cada elemento de  $\Omega$ .



# Exemplos

**Exemplo 1.** Sejam  $\varepsilon$ : o lançamento de duas moedas honestas e  $W$  a VA que conta o número de “faces caras” voltadas para cima após o lançamento.



# Exemplos

**Exemplo 1.** Sejam  $\varepsilon$ : o lançamento de duas moedas honestas e  $W$  a VA que conta o número de “faces caras” voltadas para cima após o lançamento. Definindo  $c$  para “face cara” e  $\bar{c}$  para “face coroa”,



# Exemplos

**Exemplo 1.** Sejam  $\varepsilon$ : o lançamento de duas moedas honestas e  $W$  a VA que conta o número de “faces caras” voltadas para cima após o lançamento. Definindo  $c$  para “face cara” e  $\bar{c}$  para “face coroa”, nós temos que

$$\Omega = \{(\bar{c}\bar{c}), (\bar{c}c), (c\bar{c}), (cc)\}$$

$$\downarrow W$$

$$\mathcal{W} = \{0, 1, 2\} (\subset \mathbb{R})$$



# Exemplos

**Exemplo 1.** Sejam  $\varepsilon$ : o lançamento de duas moedas honestas e  $W$  a VA que conta o número de “faces caras” voltadas para cima após o lançamento. Definindo  $c$  para “face cara” e  $\bar{c}$  para “face coroa”, nós temos que

$$\Omega = \{(\bar{c}\bar{c}), (\bar{c}c), (c\bar{c}), (cc)\}$$

$$\downarrow W$$

$$\mathcal{W} = \{0, 1, 2\} (\subset \mathbb{R})$$



# Exemplos

**Exemplo 2.** Sejam  $\varepsilon$ : o lançamento de um dado honesto e  $X$  a VA que eleva ao quadrado



# Exemplos

**Exemplo 2.** Sejam  $\varepsilon$ : o lançamento de um dado honesto e  $X$  a VA que eleva ao quadrado e subtrai 7 o valor da face voltada para cima.



# Exemplos

**Exemplo 2.** Sejam  $\varepsilon$ : o lançamento de um dado honesto e  $X$  a VA que eleva ao quadrado e subtrai 7 o valor da face voltada para cima.



# Exemplos

Tabela 1: Conjuntos  $\Omega$  e  $\mathcal{X}$  associados ao experimento  $\varepsilon$  e a VA  $X$ , respectivamente.

|               |   |   |   |   |   |   |
|---------------|---|---|---|---|---|---|
| $\Omega$      |  |  |  |  |  |  |
| $\mathcal{X}$ | -6  | -3  | 2   | 9   | 18  | 29  |

$$X = \{\text{face do dado voltada para cima}\}^2 - 7.$$

# Exemplos

Como mostra a Tabela 1, todos os valores possíveis do experimentos (espaço amostral) são as faces 1 a 6



# Exemplos

Como mostra a Tabela 1, todos os valores possíveis do experimentos (espaço amostral) são as faces 1 a 6 e todos os valores possíveis de  $X$  são os valores -6, -3, 2, 9, 18, 29.

# Exemplos

Como mostra a Tabela 1, todos os valores possíveis do experimentos (espaço amostral) são as faces 1 a 6 e todos os valores possíveis de  $X$  são os valores -6, -3, 2, 9, 18, 29.

# Exemplos

**Exemplo 3.** Sejam  $\varepsilon$ : pedir dinheiro emprestado a uma instituição financeira e  $Y$  uma variável aleatória tal que,

$$Y = \begin{cases} 1, & \text{se pedido de empréstimo for aprovado,} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$



# Exemplos

**Exemplo 3.** Sejam  $\varepsilon$ : pedir dinheiro emprestado a uma instituição financeira e  $Y$  uma variável aleatória tal que,

$$Y = \begin{cases} 1, & \text{se pedido de empréstimo for aprovado,} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$



# Exemplos

Tabela 2: Conjuntos  $\Omega$  e  $\mathcal{Y}$  associados ao experimento  $\varepsilon$  e a VA  $Y$ , respectivamente.

|               |   |   |
|---------------|---|---|
| $\Omega$      | ☹ | ☺ |
| $\mathcal{Y}$ | 0 | 1 |

# Exemplos

**Exemplo 4.** Sejam  $\varepsilon$ : o tempo entre começar a chover até o Sol voltar a brilhar “plenamente”, na próxima tempestade e  $Z$  a variável aleatória que marca o tempo, em minutos, entre a primeira e a última gota de chuva.



# Exemplos

**Exemplo 4.** Sejam  $\varepsilon$ : o tempo entre começar a chover até o Sol voltar a brilhar “plenamente”, na próxima tempestade e  $Z$  a variável aleatória que marca o tempo, em minutos, entre a primeira e a última gota de chuva.



# Exemplos

Tabela 3: Conjuntos  $\Omega$  e  $\mathcal{Z}$  associados ao experimento  $\varepsilon$  e a VA  $Z$ , respectivamente.

|               |   |
|---------------|---|
| $\varepsilon$ |  |
| $\Omega$      |  |
| $\mathcal{Z}$ | $(0, \infty)$   |

# Variáveis aleatórias

## Suporte

Ele é o conjunto com todos os valores possíveis de uma variável aleatória.



# Variáveis aleatórias

## Suporte

Ele é o conjunto com todos os valores possíveis de uma variável aleatória.

A notação costuma ser uma versão estilizada da letra (maiúscula) que representa a VA.



# Variáveis aleatórias

## Suporte

Ele é o conjunto com todos os valores possíveis de uma variável aleatória.

A notação costuma ser uma versão estilizada da letra (maiúscula) que representa a VA. Por exemplo,  $\mathcal{X}$  é o suporte da VA  $X$ .



# Variáveis aleatórias

## Suporte

Ele é o conjunto com todos os valores possíveis de uma variável aleatória.

A notação costuma ser uma versão estilizada da letra (maiúscula) que representa a VA. Por exemplo,  $\mathcal{X}$  é o suporte da VA  $X$ .



## Exemplos (continuação)

Para os experimentos e VAs descritas anteriormente, nós temos que

- 1 Todos os valores possíveis para  $W$  são  $\mathcal{W} = \{0, 1, 2\}$ ;



## Exemplos (continuação)

Para os experimentos e VAs descritas anteriormente, nós temos que

- ① Todos os valores possíveis para  $W$  são  $\mathcal{W} = \{0, 1, 2\}$ ;
- ② Todos os valores possíveis para  $X$  são  $\mathcal{X} = \{-6, -3, 2, 9, 18, 29\}$ ;



## Exemplos (continuação)

Para os experimentos e VAs descritas anteriormente, nós temos que

- ① Todos os valores possíveis para  $W$  são  $\mathcal{W} = \{0, 1, 2\}$ ;
- ② Todos os valores possíveis para  $X$  são  $\mathcal{X} = \{-6, -3, 2, 9, 18, 29\}$ ;
- ③ Todos os valores possíveis para  $Y$  são  $\mathcal{Y} = \{0, 1\}$ ;



## Exemplos (continuação)

Para os experimentos e VAs descritas anteriormente, nós temos que

- ① Todos os valores possíveis para  $W$  são  $\mathcal{W} = \{0, 1, 2\}$ ;
- ② Todos os valores possíveis para  $X$  são  $\mathcal{X} = \{-6, -3, 2, 9, 18, 29\}$ ;
- ③ Todos os valores possíveis para  $Y$  são  $\mathcal{Y} = \{0, 1\}$ ;
- ④ Todos os valores possíveis para  $Z$  são  $\mathcal{Z} = (0, \infty)$ .



## Exemplos (continuação)

Para os experimentos e VAs descritas anteriormente, nós temos que

- ① Todos os valores possíveis para  $W$  são  $\mathcal{W} = \{0, 1, 2\}$ ;
- ② Todos os valores possíveis para  $X$  são  $\mathcal{X} = \{-6, -3, 2, 9, 18, 29\}$ ;
- ③ Todos os valores possíveis para  $Y$  são  $\mathcal{Y} = \{0, 1\}$ ;
- ④ Todos os valores possíveis para  $Z$  são  $\mathcal{Z} = (0, \infty)$ .



# Roteiro

- 1 Introdução
- 2 Tipos de variáveis aleatórias**
- 3 Observação
- 4 Bibliografia



# Tipos de variáveis aleatórias

## Variáveis aleatórias discretas (VAD)

Uma VA é discreta se todos os seus possíveis valores são contáveis, enumeráveis.

# Tipos de variáveis aleatórias

## Variáveis aleatórias discretas (VAD)

Uma VA é discreta se todos os seus possíveis valores são contáveis, enumeráveis.

# Variáveis aleatórias discretas

Exemplos:

- 1  $X$ : O número de eleitores do partido dos Democratas em *Smallville*.



# Variáveis aleatórias discretas

Exemplos:

- 1  $X$ : O número de eleitores do partido dos Democratas em *Smallville*.  $\mathcal{X} = \{0, 1, \dots, M\}$ ,



# Variáveis aleatórias discretas

Exemplos:

- ①  $X$ : O número de eleitores do partido dos Democratas em *Smallville*.  $\mathcal{X} = \{0, 1, \dots, M\}$ , em que  $M$  é o número total de eleitores em *Smallville*.



# Variáveis aleatórias discretas

## Exemplos:

- ①  $X$ : O número de eleitores do partido dos Democratas em *Smallville*.  $\mathcal{X} = \{0, 1, \dots, M\}$ , em que  $M$  é o número total de eleitores em *Smallville*.
- ②  $Y$ : A quantidade de pacotes do álbum da copa comprados até encontrar a figurinha do Neymar.



# Variáveis aleatórias discretas

Exemplos:

- ①  $X$ : O número de eleitores do partido dos Democratas em *Smallville*.  $\mathcal{X} = \{0, 1, \dots, M\}$ , em que  $M$  é o número total de eleitores em *Smallville*.
- ②  $Y$ : A quantidade de pacotes do álbum da copa comprados até encontrar a figurinha do Neymar.  $\mathcal{Y} = \{1, 2, \dots\}$ .



# Variáveis aleatórias discretas

## Exemplos:

- ①  $X$ : O número de eleitores do partido dos Democratas em *Smallville*.  $\mathcal{X} = \{0, 1, \dots, M\}$ , em que  $M$  é o número total de eleitores em *Smallville*.
- ②  $Y$ : A quantidade de pacotes do álbum da copa comprados até encontrar a figurinha do Neymar.  $\mathcal{Y} = \{1, 2, \dots\}$ .
- ③  $Z$ : O número de erros tipográficos na página 2 da apostila do professor Girafales.



# Variáveis aleatórias discretas

## Exemplos:

- ①  $X$ : O número de eleitores do partido dos Democratas em *Smallville*.  $\mathcal{X} = \{0, 1, \dots, M\}$ , em que  $M$  é o número total de eleitores em *Smallville*.
- ②  $Y$ : A quantidade de pacotes do álbum da copa comprados até encontrar a figurinha do Neymar.  $\mathcal{Y} = \{1, 2, \dots\}$ .
- ③  $Z$ : O número de erros tipográficos na página 2 da apostila do professor Girafales.  $\mathcal{Z} = \{0, 1, \dots\}$ .



# Variáveis aleatórias discretas

Exemplos:

- ①  $X$ : O número de eleitores do partido dos Democratas em *Smallville*.  $\mathcal{X} = \{0, 1, \dots, M\}$ , em que  $M$  é o número total de eleitores em *Smallville*.
- ②  $Y$ : A quantidade de pacotes do álbum da copa comprados até encontrar a figurinha do Neymar.  $\mathcal{Y} = \{1, 2, \dots\}$ .
- ③  $Z$ : O número de erros tipográficos na página 2 da apostila do professor Girafales.  $\mathcal{Z} = \{0, 1, \dots\}$ .



# Tipos de variáveis aleatórias

## Variáveis aleatórias contínuas (VAC)

Uma VA é contínua se for definida como uma medição/mensuração de alguma coisa.

# Tipos de variáveis aleatórias

## Variáveis aleatórias contínuas (VAC)

Uma VA é contínua se for definida como uma medição/mensuração de alguma coisa.



# Variáveis aleatórias contínuas

Exemplos:

- 1  $X$ : A proporção de eleitores do partido dos Democratas em *Smallville*.



# Variáveis aleatórias contínuas

Exemplos:

①  $X$ : A proporção de eleitores do partido dos Democratas em *Smallville*.

$$\mathcal{X} = [0, 1].$$



# Variáveis aleatórias contínuas

Exemplos:

- ①  $X$ : A proporção de eleitores do partido dos Democratas em *Smallville*.  
 $\mathcal{X} = [0, 1]$ .
- ②  $Y$ : O tempo entre o início da greve dos caminhoneiros e o governo iniciar as negociações.



# Variáveis aleatórias contínuas

Exemplos:

- ①  $X$ : A proporção de eleitores do partido dos Democratas em *Smallville*.  
 $\mathcal{X} = [0, 1]$ .
- ②  $Y$ : O tempo entre o início da greve dos caminhoneiros e o governo iniciar as negociações.  $\mathcal{Y} = [0, \infty)$ .



# Variáveis aleatórias contínuas

Exemplos:

- ①  $X$ : A proporção de eleitores do partido dos Democratas em *Smallville*.  
 $\mathcal{X} = [0, 1]$ .
- ②  $Y$ : O tempo entre o início da greve dos caminhoneiros e o governo iniciar as negociações.  $\mathcal{Y} = [0, \infty)$ .
- ③  $Z$ : O resultado financeiro ao investir em ações da Petrobras.



# Variáveis aleatórias contínuas

Exemplos:

- ①  $X$ : A proporção de eleitores do partido dos Democratas em *Smallville*.  
 $\mathcal{X} = [0, 1]$ .
- ②  $Y$ : O tempo entre o início da greve dos caminhoneiros e o governo iniciar as negociações.  $\mathcal{Y} = [0, \infty)$ .
- ③  $Z$ : O resultado financeiro ao investir em ações da Petrobras.  $\mathcal{Z} = (-\infty, \infty)$ .



# Variáveis aleatórias contínuas

Exemplos:

- ①  $X$ : A proporção de eleitores do partido dos Democratas em *Smallville*.  
 $\mathcal{X} = [0, 1]$ .
- ②  $Y$ : O tempo entre o início da greve dos caminhoneiros e o governo iniciar as negociações.  $\mathcal{Y} = [0, \infty)$ .
- ③  $Z$ : O resultado financeiro ao investir em ações da Petrobras.  $\mathcal{Z} = (-\infty, \infty)$ .



# Roteiro

- 1 Introdução
- 2 Tipos de variáveis aleatórias
- 3 Observação
- 4 Bibliografia



# Observação

## Variáveis

Elas são valores ou características.

# Observação

## Variáveis

Elas são valores ou características.

## Variáveis aleatórias

# Observação

## Variáveis

Elas são valores ou características.

## Variáveis aleatórias

Elas são variáveis sujeitas ao acaso.

# Observação

## Variáveis

Elas são valores ou características.

## Variáveis aleatórias

Elas são variáveis sujeitas ao acaso.

# Exemplo

Suponham um carro de câmbio automático. A velocidade deste carro é uma **variável**.



# Exemplo

Suponham um carro de câmbio automático. A velocidade deste carro é uma **variável**. Ela varia (aumenta ou reduz) baseada na força utilizada pelo motorista ao pisar no acelerador.



# Exemplo

Suponham um carro de câmbio automático. A velocidade deste carro é uma **variável**. Ela varia (aumenta ou reduz) baseada na força utilizada pelo motorista ao pisar no acelerador.



# Exemplo

Agora, imaginem um motorista excêntrico. Ele controla a velocidade do carro baseando-se no resultado do lançamento de uma moeda.



# Exemplo

Agora, imaginem um motorista excêntrico. Ele controla a velocidade do carro baseando-se no resultado do lançamento de uma moeda. Se a face resultante for:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{“Cara”,} \quad \text{ele dirige a 60km/h;} \\ \text{“Coroa”,} \quad \text{ele dirige a 120km/h.} \end{array} \right.$$

# Exemplo

Agora, imaginem um motorista excêntrico. Ele controla a velocidade do carro baseando-se no resultado do lançamento de uma moeda. Se a face resultante for:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{“Cara”,} \quad \text{ele dirige a 60km/h;} \\ \text{“Coroa”,} \quad \text{ele dirige a 120km/h.} \end{array} \right.$$



# Exemplo

Dessa forma, a velocidade do carro é uma **variável aleatória**, pois a velocidade é determinada por um experimento probabilístico,



# Exemplo

Dessa forma, a velocidade do carro é uma **variável aleatória**, pois a velocidade é determinada por um experimento probabilístico, no caso, em um lançamento de uma moeda.



# Exemplo

Dessa forma, a velocidade do carro é uma **variável aleatória**, pois a velocidade é determinada por um experimento probabilístico, no caso, em um lançamento de uma moeda.

**Observação:** Não façam isso!!!



# Exemplo

Dessa forma, a velocidade do carro é uma **variável aleatória**, pois a velocidade é determinada por um experimento probabilístico, no caso, em um lançamento de uma moeda.

**Observação:** Não façam isso!!!



# Roteiro

- 1 Introdução
- 2 Tipos de variáveis aleatórias
- 3 Observação
- 4 Bibliografia



# Bibliografia

- Anderson, D. R., D. J. Sweeney, T. A. Williams, J. D. Camm, and J. J. Cochran (2019). *Estatística Aplicada à Administração e Economia* (8th ed.). São Paulo: CENGAGE Learning.
- Doane, D. P. and L. E. Seward (2014). *Estatística Aplicada à Administração e Economia* (4th ed.). Porto Alegre: McGraw-Hill.
- Martins, G. A. and O. Domingues (2019). *Estatística Geral e Aplicada* (6th ed.). São Paulo: Atlas.



# Obrigado!

✉ tiago.magalhaes@ufjf.br

🏠 [ufjf.br/tiago\\_magalhaes](https://ufjf.br/tiago_magalhaes)

☀ Departamento de Estatística, Sala 319

