Introdução à probabilidade

Tiago M. Magalhães

Departamento de Estatística - ICE-UFJF

Juiz de Fora, 19 de abril de 2024

Roteiro

Roteiro

Probabilidade

Motivação

A Probabilidade é uma quantificação da incerteza. Ela é um peso dado para cada possível resultado de um experimento.

Probabilidade

Motivação

A Probabilidade é uma quantificação da incerteza. Ela é um peso dado para cada possível resultado de um experimento.

Roteiro

Probabilidade

A Teoria da Probabilidade foi construída a partir de três definições, chamadas de **Axiomas da Probabilidade** (Kolmogorov, 1933).

Axiomas da Probabilidade

Sejam um experimento ε, Ω o espaço amostral associado ao experimento ε e $E_1, E_2, \ldots$ eventos de Ω. Os Axiomas da Probabilidade são os seguintes:

1. $0 \leq \mathbb{P}(E_i) \leq 1$;

Axiomas da Probabilidade

Sejam um experimento ε, Ω o espaço amostral associado ao experimento ε e $E_1, E_2, \ldots$ eventos de Ω. Os Axiomas da Probabilidade são os seguintes:

1. $0 \leq \mathbb{P}(E_i) \leq 1$;
2. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$;

Axiomas da Probabilidade

Sejam um experimento ε, Ω o espaço amostral associado ao experimento ε e $E_1, E_2, \ldots$ eventos de Ω. Os Axiomas da Probabilidade são os seguintes:

1. $0 \leq \mathbb{P}(E_i) \leq 1$;
2. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$;
3. Se dois eventos E_i e E_j são **mutuamente exclusivos**,

Axiomas da Probabilidade

Sejam um experimento ε, Ω o espaço amostral associado ao experimento ε e $E_1, E_2, \ldots$ eventos de Ω. Os Axiomas da Probabilidade são os seguintes:

1. $0 \leq \mathbb{P}(E_i) \leq 1$;
2. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$;
3. Se dois eventos E_i e E_j são **mutuamente exclusivos**, então:

$$\mathbb{P}(E_i \cup E_j) = \mathbb{P}(E_i) + \mathbb{P}(E_j).$$

Axiomas da Probabilidade

Sejam um experimento ε, Ω o espaço amostral associado ao experimento ε e $E_1, E_2, \ldots$ eventos de Ω. Os Axiomas da Probabilidade são os seguintes:

1. $0 \leq \mathbb{P}(E_i) \leq 1$;
2. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$;
3. Se dois eventos E_i e E_j são **mutuamente exclusivos**, então:

$$\mathbb{P}(E_i \cup E_j) = \mathbb{P}(E_i) + \mathbb{P}(E_j).$$

Teoremas da Probabilidade

Dos Axiomas da Probabilidade, nós temos as seguintes propriedades:

1. Se $\emptyset$ é o conjunto vazio, então $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$;

Teoremas da Probabilidade

Dos Axiomas da Probabilidade, nós temos as seguintes propriedades:

1. Se $\emptyset$ é o conjunto vazio, então $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$;
2. Se E_i^c é o complemento do evento E_i, então $\mathbb{P}(E_i^c) = 1 - \mathbb{P}(E_i)$;

Teoremas da Probabilidade

Dos Axiomas da Probabilidade, nós temos as seguintes propriedades:

1. Se $\emptyset$ é o conjunto vazio, então $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$;
2. Se E_i^c é o complemento do evento E_i, então $\mathbb{P}(E_i^c) = 1 - \mathbb{P}(E_i)$;
3. Se $E_i \subset E_j$, então $\mathbb{P}(E_i) \leq \mathbb{P}(E_j)$;

Teoremas da Probabilidade

Dos Axiomas da Probabilidade, nós temos as seguintes propriedades:

1. Se $\emptyset$ é o conjunto vazio, então $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$;
2. Se E_i^c é o complemento do evento E_i, então $\mathbb{P}(E_i^c) = 1 - \mathbb{P}(E_i)$;
3. Se $E_i \subset E_j$, então $\mathbb{P}(E_i) \leq \mathbb{P}(E_j)$;
4. Sejam E_i e E_j dois **eventos quaisquer**, então

$$\mathbb{P}(E_i \cup E_j) = \mathbb{P}(E_i) + \mathbb{P}(E_j) - \mathbb{P}(E_i \cap E_j).$$

Teoremas da Probabilidade

Dos Axiomas da Probabilidade, nós temos as seguintes propriedades:

1. Se $\emptyset$ é o conjunto vazio, então $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$;
2. Se E_i^c é o complemento do evento E_i, então $\mathbb{P}(E_i^c) = 1 - \mathbb{P}(E_i)$;
3. Se $E_i \subset E_j$, então $\mathbb{P}(E_i) \leq \mathbb{P}(E_j)$;
4. Sejam E_i e E_j dois **eventos quaisquer**, então

$$\mathbb{P}(E_i \cup E_j) = \mathbb{P}(E_i) + \mathbb{P}(E_j) - \mathbb{P}(E_i \cap E_j).$$

Exemplo

Seja o experimento ε: em um único lançamento de um dado convencional é anotado a face voltada para cima, isto é, $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Sejam os eventos: E_1: face par; E_2: face 2; E_3: face ímpar; E_4: face 7.

Exemplo

1. $\mathbb{P}(E_4) = \mathbb{P}(\{7\}) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0.$

Exemplo

1. $\mathbb{P}(E_4) = \mathbb{P}(\{7\}) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0.$
2. $\mathbb{P}(E_3) = \mathbb{P}(\{1, 3, 5\}) = 1 - \mathbb{P}(E_3^c) = 1 - \mathbb{P}(\{2, 4, 6\}) = 1 - \mathbb{P}(E_1).$

Exemplo

1. $\mathbb{P}(E_4) = \mathbb{P}(\{7\}) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0.$
2. $\mathbb{P}(E_3) = \mathbb{P}(\{1,3,5\}) = 1 - \mathbb{P}(E_3^c) = 1 - \mathbb{P}(\{2,4,6\}) = 1 - \mathbb{P}(E_1).$
3. $\mathbb{P}(E_2) = \mathbb{P}(\{2\}) < \mathbb{P}(\{2,4,6\}) = \mathbb{P}(E_1).$

Exemplo

1. $\mathbb{P}(E_4) = \mathbb{P}(\{7\}) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0.$
2. $\mathbb{P}(E_3) = \mathbb{P}(\{1, 3, 5\}) = 1 - \mathbb{P}(E_3^c) = 1 - \mathbb{P}(\{2, 4, 6\}) = 1 - \mathbb{P}(E_1).$
3. $\mathbb{P}(E_2) = \mathbb{P}(\{2\}) < \mathbb{P}(\{2, 4, 6\}) = \mathbb{P}(E_1).$
4. $\mathbb{P}(E_2 \cup E_3) = \mathbb{P}(\{1, 2, 3, 5\}) = \mathbb{P}(E_2) + \mathbb{P}(E_3) - \mathbb{P}(E_2 \cap E_3).$

Exemplo

1. $\mathbb{P}(E_4) = \mathbb{P}(\{7\}) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0.$
2. $\mathbb{P}(E_3) = \mathbb{P}(\{1, 3, 5\}) = 1 - \mathbb{P}(E_3^c) = 1 - \mathbb{P}(\{2, 4, 6\}) = 1 - \mathbb{P}(E_1).$
3. $\mathbb{P}(E_2) = \mathbb{P}(\{2\}) < \mathbb{P}(\{2, 4, 6\}) = \mathbb{P}(E_1).$
4. $\mathbb{P}(E_2 \cup E_3) = \mathbb{P}(\{1, 2, 3, 5\}) = \mathbb{P}(E_2) + \mathbb{P}(E_3) - \mathbb{P}(E_2 \cap E_3).$

Exemplo

Sortear um recém-nascido em Minas Gerais. Sejam os eventos A: o bebê sorteado é juiz-forano, B: o bebê sorteado não é juiz-forano e C: o bebê sorteado é da Zona da Mata. Nós podemos observar que:

Exemplo

Sortear um recém-nascido em Minas Gerais. Sejam os eventos A: o bebê sorteado é juiz-forano, B: o bebê sorteado não é juiz-forano e C: o bebê sorteado é da Zona da Mata. Nós podemos observar que:

- $\mathbb{P}(B) = 1 - \mathbb{P}(A)$. Pois A e B são eventos complementares;

Exemplo

Sortear um recém-nascido em Minas Gerais. Sejam os eventos A: o bebê sorteado é juiz-forano, B: o bebê sorteado não é juiz-forano e C: o bebê sorteado é da Zona da Mata. Nós podemos observar que:

- $\mathbb{P}(B) = 1 - \mathbb{P}(A)$. Pois A e B são eventos complementares;
- $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(C)$. Pois A é um subconjunto de C.

Exemplo

Sortear um recém-nascido em Minas Gerais. Sejam os eventos A: o bebê sorteado é juiz-forano, B: o bebê sorteado não é juiz-forano e C: o bebê sorteado é da Zona da Mata. Nós podemos observar que:

- $\mathbb{P}(B) = 1 - \mathbb{P}(A)$. Pois A e B são eventos complementares;
- $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(C)$. Pois A é um subconjunto de C.

Espaços amostrais equiprováveis

Um espaço amostral é equiprovável se todos os seus elementos têm a mesma probabilidade de ocorrer.

Neste tipo de espaço amostral, o cálculo de uma probabilidade é mais simples.

Espaços amostrais equiprováveis

Um espaço amostral é equiprovável se todos os seus elementos têm a mesma probabilidade de ocorrer.

Neste tipo de espaço amostral, o cálculo de uma probabilidade é mais simples.

Probabilidades em espaços amostrais equiprováveis

Seja um evento E associado a um espaço amostral Ω, nós podemos calcular a probabilidade do evento E ocorrer da seguinte maneira

$$\mathbb{P}(E) = \frac{\text{número de casos favoráveis à } E}{\text{número de casos possíveis}} = \frac{n(E)}{n(\Omega)}.$$

Probabilidades em espaços amostrais equiprováveis

Seja um evento E associado a um espaço amostral Ω, nós podemos calcular a probabilidade do evento E ocorrer da seguinte maneira

$$\mathbb{P}(E) = \frac{\text{número de casos favoráveis à } E}{\text{número de casos possíveis}} = \frac{n(E)}{n(\Omega)}.$$

Exemplo

Para o exemplo sobre um único lançamento de um dado convencional:

$$\mathbb{P}(E_1) = \frac{n(E_1)}{n(\Omega)} = \frac{\{2,4,6\}}{\{1,2,3,4,5,6\}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0{,}5.$$

Exemplo

Para o exemplo sobre um único lançamento de um dado convencional:

$$\mathbb{P}(E_1) = \frac{n(E_1)}{n(\Omega)} = \frac{\{2,4,6\}}{\{1,2,3,4,5,6\}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0{,}5.$$

Pergunta: Quais são os valores para $\mathbb{P}(E_2)$, $\mathbb{P}(E_3)$ e $\mathbb{P}(E_2 \cup E_3)$?

Exemplo

Para o exemplo sobre um único lançamento de um dado convencional:

$$\mathbb{P}(E_1) = \frac{n(E_1)}{n(\Omega)} = \frac{\{2,4,6\}}{\{1,2,3,4,5,6\}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0{,}5.$$

Pergunta: Quais são os valores para $\mathbb{P}(E_2)$, $\mathbb{P}(E_3)$ e $\mathbb{P}(E_2 \cup E_3)$?

Exemplo

Seja o experimento ε: apostar na mega-sena, i.e., $\Omega = \{\text{ganhar}, \text{não ganhar}\}$.

Seja o evento: G: ter a aposta vencedora.

Pergunta

O espaço amostral é equiprovável? Isto é, $\mathbb{P}(\{\text{ganhar}\}) = 0{,}5$?

Exemplo

Seja o experimento ε: apostar na mega-sena, i.e., $\Omega = \{\text{ganhar}, \text{não ganhar}\}$.

Seja o evento: G: ter a aposta vencedora.

Pergunta

O espaço amostral é equiprovável? Isto é, $\mathbb{P}(\{\text{ganhar}\}) = 0{,}5$?

Exemplo

Resposta

Não!

Exemplo

Resposta

Não!

Pois,

$$\mathbb{P}(\{\text{ganhar}\}) = \frac{1}{50.063.860}.$$

Exemplo

Resposta

Não!

Pois,

$$\mathbb{P}(\{\text{ganhar}\}) = \frac{1}{50.063.860}.$$

Roteiro

Probabilidade condicional

Sejam A e B dois eventos de um mesmo espaço amostral, a probabilidade da ocorrência de um deles sabendo-se que o outro ocorreu é definida como

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}. \tag{1}$$

Probabilidade condicional

Sejam A e B dois eventos de um mesmo espaço amostral, a probabilidade da ocorrência de um deles sabendo-se que o outro ocorreu é definida como

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}. \tag{1}$$

Note que $\mathbb{P}(B) \neq 0$, pois B já ocorreu.

Probabilidade condicional

Sejam A e B dois eventos de um mesmo espaço amostral, a probabilidade da ocorrência de um deles sabendo-se que o outro ocorreu é definida como

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}. \tag{1}$$

Note que $\mathbb{P}(B) \neq 0$, pois B já ocorreu.

Probabilidade condicional

Se o espaço amostral for equiprovável, nós temos que:

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(\Omega)} \text{ e } \mathbb{P}(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)}.$$

Probabilidade condicional

Se o espaço amostral for equiprovável, nós temos que:

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(\Omega)} \text{ e } \mathbb{P}(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)}.$$

Logo,

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}.$$

Probabilidade condicional

Se o espaço amostral for equiprovável, nós temos que:

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(\Omega)} \text{ e } \mathbb{P}(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)}.$$

Logo,

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}.$$

Exemplo

Para o exemplo dos dados, suponham que nós estamos interessados na probabilidade de ocorrer face 2. Nós já vimos que $\mathbb{P}(E_2) = 1/6$. E, se soubéssemos que a face voltada para cima é um número par,

Exemplo

Para o exemplo dos dados, suponham que nós estamos interessados na probabilidade de ocorrer face 2. Nós já vimos que $\mathbb{P}(E_2) = 1/6$. E, se soubéssemos que a face voltada para cima é um número par, nós teríamos

$$\mathbb{P}(E_2|E_1) = \frac{n(E_1 \cap E_2)}{n(E_1)} = \frac{1}{3}.$$

Exemplo

Para o exemplo dos dados, suponham que nós estamos interessados na probabilidade de ocorrer face 2. Nós já vimos que $\mathbb{P}(E_2) = 1/6$. E, se soubéssemos que a face voltada para cima é um número par, nós teríamos

$$\mathbb{P}(E_2|E_1) = \frac{n(E_1 \cap E_2)}{n(E_1)} = \frac{1}{3}.$$

O conhecimento do evento E_1 "dobrou" a probabilidade de ocorrência do evento E_2.

Exemplo

Para o exemplo dos dados, suponham que nós estamos interessados na probabilidade de ocorrer face 2. Nós já vimos que $\mathbb{P}(E_2) = 1/6$. E, se soubéssemos que a face voltada para cima é um número par, nós teríamos

$$\mathbb{P}(E_2|E_1) = \frac{n(E_1 \cap E_2)}{n(E_1)} = \frac{1}{3}.$$

O conhecimento do evento E_1 "dobrou" a probabilidade de ocorrência do evento E_2.

Teorema da multiplicação

A ocorrência simultânea de dois eventos A e B **do mesmo espaço amostral** é igual ao produto da probabilidade de um deles pela probabilidade condicional do outro,

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}(A|B), \tag{2}$$

Teorema da multiplicação

A ocorrência simultânea de dois eventos A e B **do mesmo espaço amostral** é igual ao produto da probabilidade de um deles pela probabilidade condicional do outro,

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}(A|B), \tag{2}$$

isto é, na equação (1), nós passamos o denominador da fração no lado direito para o lado esquerdo multiplicando.

Teorema da multiplicação

A ocorrência simultânea de dois eventos A e B **do mesmo espaço amostral** é igual ao produto da probabilidade de um deles pela probabilidade condicional do outro,

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}(A|B), \tag{2}$$

isto é, na equação (1), nós passamos o denominador da fração no lado direito para o lado esquerdo multiplicando.

Roteiro

Teorema de Bayes

Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_n$, eventos mutuamente exclusivos, tais que

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \Omega,$$

como mostra a Figura 1,

Teorema de Bayes

Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_n$, eventos mutuamente exclusivos, tais que

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \Omega,$$

como mostra a Figura 1, com todas as probabilidades $\mathbb{P}(A_i)$, $i = 1, \ldots, n$, conhecidas.

Teorema de Bayes

Sejam $A_1, A_2, \dots, A_n$, eventos mutuamente exclusivos, tais que

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \Omega,$$

como mostra a Figura 1, com todas as probabilidades $\mathbb{P}(A_i)$, $i = 1, \dots, n$, conhecidas.

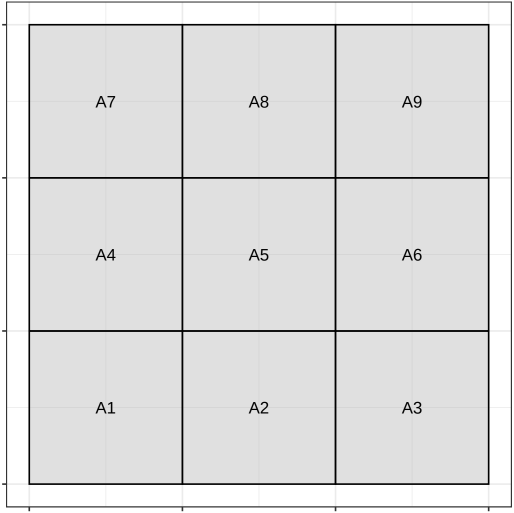

Figura 1: Eventos mutuamente exclusivos.

Exemplo

Suponham que a Figura 1 é a opção de voto para governador de Minas Gerais.

A1 a A8 são os candidatos 1, 2, ..., 8 e A9 é o voto nulo e branco.

Exemplo

Suponham que a Figura 1 é a opção de voto para governador de Minas Gerais.

A1 a A8 são os candidatos 1, 2, ..., 8 e A9 é o voto nulo e branco.

Teorema de Bayes

Voltando...

E seja B um evento qualquer de Ω, tal que todas as probabilidades condicionais $\mathbb{P}(B|A_i)$ são conhecidas.

Teorema de Bayes

Voltando...

E seja B um evento qualquer de Ω, tal que todas as probabilidades condicionais $\mathbb{P}(B|A_i)$ são conhecidas. Note que

$$B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \cdots \cup (A_n \cap B),$$

Teorema de Bayes

Voltando...

E seja B um evento qualquer de Ω, tal que todas as probabilidades condicionais $\mathbb{P}(B|A_i)$ são conhecidas. Note que

$$B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \cdots \cup (A_n \cap B),$$

com $(A_i \cap B)$ e $(A_j \cap B)$ mutuamente exclusivos, para $i \neq j$, como descreve a Figura 2.

Teorema de Bayes

Voltando...

E seja B um evento qualquer de Ω, tal que todas as probabilidades condicionais $\mathbb{P}(B|A_i)$ são conhecidas. Note que

$$B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \cdots \cup (A_n \cap B),$$

com $(A_i \cap B)$ e $(A_j \cap B)$ mutuamente exclusivos, para $i \neq j$, como descreve a Figura 2.

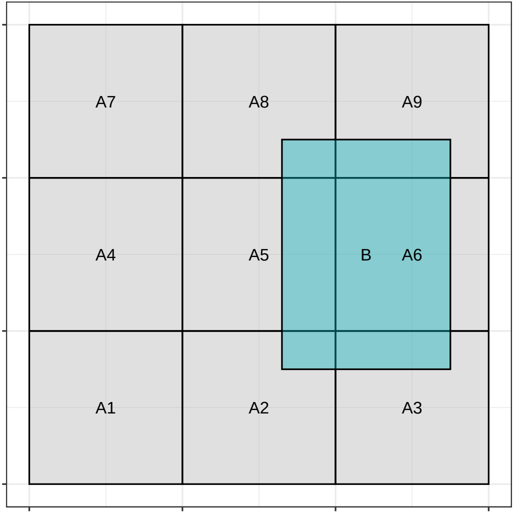

Figura 2: Representação de Ω.

Exemplo

Suponham que a Figura 2 é a opção de voto para governador de Minas Gerais. E B é o eleitor de Cássia (MG).

Nós podemos dizer, por exemplo, que os cassiense não votam nos candidatos A1, A4 e A7.

Exemplo

Suponham que a Figura 2 é a opção de voto para governador de Minas Gerais. E B é o eleitor de Cássia (MG).

Nós podemos dizer, por exemplo, que os cassiense não votam nos candidatos A1, A4 e A7.

Teorema de Bayes

Dessa forma, nós podemos escrever a probabilidade do evento B como

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}(A_1 \cap B) + \mathbb{P}(A_2 \cap B) + \cdots + \mathbb{P}(A_n \cap B) \qquad (3)\\ &= \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(B|A_1) + \mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}(B|A_2) + \cdots + \mathbb{P}(A_n)\mathbb{P}(B|A_n).\end{aligned}$$

Teorema de Bayes

Dessa forma, nós podemos escrever a probabilidade do evento B como

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}(A_1 \cap B) + \mathbb{P}(A_2 \cap B) + \cdots + \mathbb{P}(A_n \cap B) \qquad (3)\\
&= \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(B|A_1) + \mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}(B|A_2) + \cdots + \mathbb{P}(A_n)\mathbb{P}(B|A_n).
\end{aligned}
$$

A equação (3) é denominada de **Teorema da probabilidade total**.

Teorema de Bayes

Dessa forma, nós podemos escrever a probabilidade do evento B como

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A_1 \cap B) + \mathbb{P}(A_2 \cap B) + \cdots + \mathbb{P}(A_n \cap B) \tag{3}$$
$$= \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(B|A_1) + \mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}(B|A_2) + \cdots + \mathbb{P}(A_n)\mathbb{P}(B|A_n).$$

A equação (3) é denominada de **Teorema da probabilidade total**.

Teorema de Bayes

Então, por (1) e (3), nós temos, para todo evento A_i, que

$$\mathbb{P}(A_i|B) = \frac{\mathbb{P}(A_i \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(B|A_i)}{\mathbb{P}(B)} \tag{4}$$

$$= \frac{\mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(B|A_i)}{\mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(B|A_1) + \mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}(B|A_2) + \cdots + \mathbb{P}(A_n)\mathbb{P}(B|A_n)},$$

Teorema de Bayes

Então, por (1) e (3), nós temos, para todo evento A_i, que

$$\mathbb{P}(A_i|B) = \frac{\mathbb{P}(A_i \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(B|A_i)}{\mathbb{P}(B)} \tag{4}$$

$$= \frac{\mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(B|A_i)}{\mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(B|A_1) + \mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}(B|A_2) + \cdots + \mathbb{P}(A_n)\mathbb{P}(B|A_n)},$$

esta probabilidade condicional $\mathbb{P}(A_i|B)$, em (4), é conhecida como Regra ou **Teorema de Bayes**.

Teorema de Bayes

Então, por (1) e (3), nós temos, para todo evento A_i, que

$$\mathbb{P}(A_i|B) = \frac{\mathbb{P}(A_i \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(B|A_i)}{\mathbb{P}(B)} \tag{4}$$

$$= \frac{\mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(B|A_i)}{\mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(B|A_1) + \mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}(B|A_2) + \cdots + \mathbb{P}(A_n)\mathbb{P}(B|A_n)},$$

esta probabilidade condicional $\mathbb{P}(A_i|B)$, em (4), é conhecida como Regra ou **Teorema de Bayes**.

Exemplo: The legend of Zélia

Princesa Zélia é a governanta do Reino de Guaramiranga. Ela sabendo da ameaça de Cleiton Calamidade, convoca o guerreiro Berald de Maranguape, também conhecido como Lobo-Guará Branco, para discutir a segurança do seu reino.

Exemplo: The legend of Zélia

Princesa Zélia é a governanta do Reino de Guaramiranga. Ela sabendo da ameaça de Cleiton Calamidade, convoca o guerreiro Berald de Maranguape, também conhecido como Lobo-Guará Branco, para discutir a segurança do seu reino.

Exemplo: The legend of Zélia

Existem apenas dois caminhos que ligam Maranguape a Guaramiranga. E Berald não tem predileção por nenhum dos dois. Porém, Cleiton tem probabilidade $4/5$ de aparecer no primeiro e de $2/5$ no segundo.

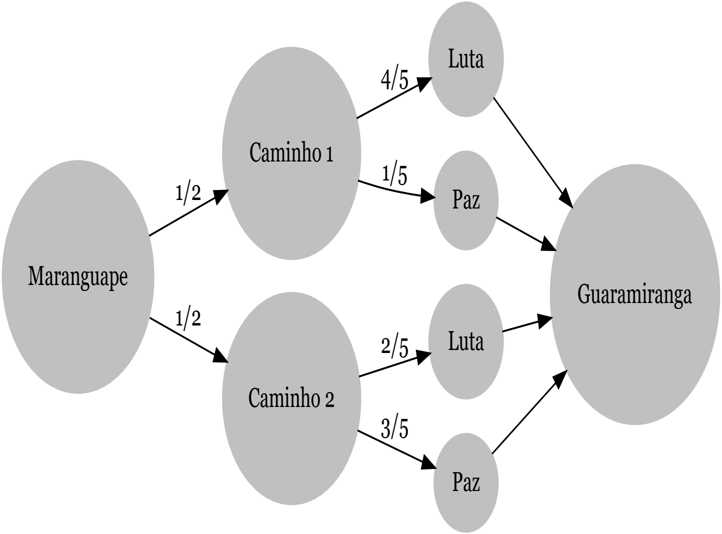

Figura 3: Árvore de possibilidades.

Exemplo: The legend of Zélia

Reflexão 1

Qual é a probabilidade do nosso herói encontrar o vilão a caminho de Guaramiranga?

Exemplo: The legend of Zélia

Se A_1 e A_2 são os caminhos 1 e 2, respectivamente, e B é aparição de Cleiton. Nós já sabemos que

- $\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(A_2) = 1/2$;
- $\mathbb{P}(B|A_1) = 4/5$;
- $\mathbb{P}(B|A_2) = 2/5$.

Exemplo: The legend of Zélia

Se A_1 e A_2 são os caminhos 1 e 2, respectivamente, e B é aparição de Cleiton. Nós já sabemos que

- $\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(A_2) = 1/2;$
- $\mathbb{P}(B|A_1) = 4/5;$
- $\mathbb{P}(B|A_2) = 2/5.$

Exemplo: The legend of Zélia

Logo,

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}(B|A_1) + \mathbb{P}(A_2) \times \mathbb{P}(B|A_2)$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{4}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{5}$$

$$= \frac{3}{5}.$$

Exemplo: The legend of Zélia

Reflexão 2

Qual é a probabilidade do Lobo-Guará Branco ter pegado o caminho 2, sabendo que ele enfrentou Cleiton Calamidade?

Exemplo: The legend of Zélia

Ora,

$$\mathbb{P}(A_2|B) = \frac{\mathbb{P}(A_2) \times \mathbb{P}(B|A_2)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{2}{5}}{3/5} = \frac{1}{3}.$$

Exemplo: The legend of Zélia

No início da jornada, nós sabíamos que havia uma probabilidade $1/2$ do Caminho 2 ter sido escolhido.

O conhecimento do combate "reduziu" essa probabilidade para $1/3$.

Exemplo: The legend of Zélia

No início da jornada, nós sabíamos que havia uma probabilidade $1/2$ do Caminho 2 ter sido escolhido.

O conhecimento do combate "reduziu" essa probabilidade para $1/3$.

Roteiro

Independência

Dois eventos A e B são ditos independentes quando a probabilidade da interseção entre eles é igual ao produto de suas respectivas probabilidades, isto é, (2) pode ser escrito como

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B).$$

Independência

Dois eventos A e B são ditos independentes quando a probabilidade da interseção entre eles é igual ao produto de suas respectivas probabilidades, isto é, (2) pode ser escrito como

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B).$$

Independência

De (1):

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(B)} = \mathbb{P}(A),$$

isto é, a ocorrência do evento B não altera a probabilidade de ocorrência do evento A.

Independência

De (1):

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(B)} = \mathbb{P}(A),$$

isto é, a ocorrência do evento B não altera a probabilidade de ocorrência do evento A.

Exemplo

Suponham que, em uma eleição americana, quer se saber a probabilidade de uma pessoa selecionada, ao acaso, votar no partido democrata (D), com a informação de que essa pessoa é do signo de touro (T), isto é,

$$\mathbb{P}(D|T) = \frac{\mathbb{P}(D \cap T)}{\mathbb{P}(T)} = \frac{\mathbb{P}(D) \times \mathbb{P}(T)}{\mathbb{P}(T)} = \mathbb{P}(D).$$

Exemplo

Suponham que, em uma eleição americana, quer se saber a probabilidade de uma pessoa selecionada, ao acaso, votar no partido democrata (D), com a informação de que essa pessoa é do signo de touro (T), isto é,

$$\mathbb{P}(D|T) = \frac{\mathbb{P}(D \cap T)}{\mathbb{P}(T)} = \frac{\mathbb{P}(D) \times \mathbb{P}(T)}{\mathbb{P}(T)} = \mathbb{P}(D).$$

Roteiro

Referências

Kolmogorov, A. N. (1933), *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Springer, Berlin.

Obrigado!

✉ tiago.magalhaes@ufjf.br

ufjf.br/tiago_magalhaes

Departamento de Estatística, Sala 319